MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SECRÉTARIAT GÉNÉRAL

DIRECTION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Service d'Appui au Baccalauréat

MESUPRES

BACCALAURÉAT D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL

SESSION 2021

S

Série	: Scientifique	Épreuve de	: **MATHÉMATIQUES**
Option	: **S**	Durée	: **04 heures**
Code matière	: **009**	Coefficient	: **6**

**N.B. : Les deux exercices et les problèmes sont obligatoires.
Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.**

EXERCICE 1 (03 points)

I. On considère les matrices carrées suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&3&0\\1&2&1\end{pmatrix};B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&-3&6\\1&2&-2\\1&-1&1\end{pmatrix} et\, C=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

1. Montrer que B est l'inverse de A. **0,5**
2. Calculer $A+C$. **0,25**
3. Démontrer par récurrence sur n que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\ C^n=\begin{pmatrix}2^n&n2^n&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$. **0,75**

II. On dispose de quatre trous T_1, T_2, T_3, T_4 et quatre billes numérotées 1, 2, 3 et 4. Chaque bille entre dans un trou et chaque trou peut recevoir zéro à quatre billes. On suppose que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

A) On lance une fois les quatre billes en direction vers les quatre trous.

1. Soit A l'événement : « La bille numéro 2 est dans le trou T_2 ».
   Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{1}{4}$. **0,25**
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de billes reçues par le trou T_3 lors d'un lancer.
   Donner la loi de probabilité de X. **0,75**

B) On lance n fois de suite, $n\in\mathbb{N}^*$, et d'une manière indépendante les quatre billes vers les quatre trous. On désigne par p_n la probabilité de l'événement A_n : « A est réalisée au moins une fois lors de ces n lancers ».

Après avoir calculé p_n en fonction de n, déterminer le plus petit entier naturel n pour que $p_n\geq 0{,}99$. **0,5**

EXERCICE 2 (03 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1\,;-1\,;1)$; $B(3\,;2\,;1)$ et $C(2\,;-1\,;0)$.

1. Vérifier que l'équation du plan (ABC) est : $3x-2y+3z-8=0$. **0,25**
2. Ecrire une équation cartésienne du plan (P) contenant le point B, de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$. **0,5**

3. a) Démontrer que l'intersection des plans (ABC) et (P) est une droite (D) d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = 3t-1 \text{ avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$ 0,75

b) Montrer que C est le projeté orthogonale de A sur (D) et en déduire la distance du point A à la droite (D). 0,75

4. Soit (Q) le plan d'équation $x-y+z=1$.

Déterminer les coordonnées du point I, intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q). 0,75

PROBLEMES

Problème 1 (06 points)

ABC est un triangle rectangle en A tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $AB = AC = 3cm$.

Soient : . I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AC]$.

. E le point symétrique de B par rapport à A.

. r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

. t la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

. h l'homothétie de centre I et de rapport 2.

On pose $f = t \circ r$ et $g = h \circ f$.

Partie A

1. a) Déterminer et construire le point D barycentre du système $S = \{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ 0,25 x 2

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel k la nature de l'ensemble (E_k) des points M du plan vérifiant $MA^2 - MB^2 + MC^2 = k$.(On pourra montrer que $MD^2 = k+18$). 0,75

2. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre C et de rayon CB dont l'intersection autre que B avec (BC) est notée par F. Montrer que $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$. 0,25

3. a) Donner la nature de f. 0,25

b) On note K le milieu de $[ED]$. En décomposant t et r en deux symétries orthogonales convenablement choisies, déterminer les éléments caractéristiques de f. 0,5

4. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g. 0,75

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1. Donner l'affixe du point I 0,25

2. a) Déterminer les expressions complexes de t, r et h 0,25 x 3

b) En déduire les expressions complexes de f et g. 0,25 x 2

c) A l'aide de l'expression complexe, retrouver les éléments caractéristiques de g. 0,25 x 3

Partie C

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 + (3-3i)z^2 + (1-6i)z - 1 - 3i$$

Calculer $P(-1)$ et en déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. 0,25 + 0,5

Problème 2 (08 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 + x\ln(1-\frac{1}{x}), si\ x<0 \\ \dfrac{2}{1+e^{-x}}\ ,\ si\ x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

Partie A

1. a) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$. **0,5**

   b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$. **0,5**

   Que peut-on conclure pour la fonction f ? **0,25**

2. Pour tout $x \in]0;+\infty[$; Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f. **0,25**

3. a) Soit g la fonction définie sur $]-\infty,0[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x-1} + \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

   Etudier la variation de g et en déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty,0[$. **0,75 + 0,25**

   b) Pour tout $x \in]-\infty;0[$; montrer que $f'(x) = g(x)$. **0,25**

4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. **1**

5. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que sa tangente (ou ses demi-tangentes) au point d'abscisse $x_0 = 0$. **1**

Partie B

1. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$.

   A l'aide de l'étude de variation de h sur l'intervalle $[1;2]$, montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1;2]$. **0,75**

2. Démontrer que pour tout $x \in [1;2]$: $f(x) \in [1;2]$ et que $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$. **0,25 x 2**

3. On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

   a) Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \in [1;2]$. **0,5**

   b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|U_n - \alpha|$ et $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. **0,5 x 2**

   c) En déduire l'étude de convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **0,25**

   d) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que U_{n_0} soit la valeur approchée de α à 10^{-3} près. **0,25**