BACCALAURÉAT D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL

SESSION 2021

C

Série	: **Scientifique**	Épreuve de	: **MATHÉMATIQUES**
Option	: **C**	Durée	: **04 heures**
Code matière	: **009**	Coefficient	: **5**

N.B. : L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires.
Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

EXERCICE (04 points)

I) Arithmétique

Soient n un entier naturel, a et b deux entiers relatifs premiers entre eux.

1- Montrer que les deux entiers $2n+3$ et $n+1$ sont premiers entre eux. (0,5)

2- a) Montrer que $\text{pgcd}(a, a+b) = \text{pgcd}(b, a+b) = 1$. (0,5)

b) En déduire que $a+b$ et ab sont premiers entre eux (on pourra utiliser le théorème de Bezout). (0,75)

3- Montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{3n+4}{(n+1)(2n+3)}$ est irréductible. (0,25)

II) Probabilité

On dispose de 5 trous alignés numérotés de 1 à 5 et 5 billes numérotées de 1 à 5. On lance les 5 billes vers les 5 trous ; chaque bille entre alors dans un trou et chaque trou peut recevoir 0 à 5 billes. On admet que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

1- Calculer le nombre de dispositions possibles de répartition des 5 billes dans les 5 trous. (0,5)

2- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Toutes les 5 billes se trouvent dans un même trou ». (0,5)

B : « La bille numéro 1 se trouve dans un trou de numéro pair ». (0,5)

C : « Chaque trou contient exactement une bille ». (0,5)

PROBLÈME I (07 points)

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on considère le triangle direct OAB isocèle et rectangle en O. On désigne par C le point du plan $\mathcal{P}$ tel que BAC soit un triangle direct rectangle en B et $AC = 2AB$. Soient I et K, les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[OA]$.

Soient r : la rotation de centre O qui transforme A en B.

t : la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

s : la similitude plane directe de centre A qui transforme le point B en C.

On pose $f = t \circ r$

A) 1- Tracer les deux triangles OAB et BAC, et placer les deux points I et K, (pour la construction seulement, prendre $OA = 3cm$). (0,5)

2- Déterminer et construire le barycentre G des points A, B, C affectés des coefficients respectifs $1, -1, 1$. (0,5+0,25)

3- Déterminer et construire dans la figure précédente l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = AB^2$. (0,5+0,25)

B) 1- Déterminer l'angle de r. (0,25)

2- a) Donner la nature de f. (0,25)

b) Décomposer respectivement la rotation r et la translation t en produit de deux symétries orthogonales convenablement choisies. (0,5+0,5)

c) Caractériser f. (0,5)

3- Déterminer le rapport de s et donner une mesure en radian de l'angle de s. (0,25+0,25)

C) Le plan est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

1- Donner les affixes des points A, B et I. (0,5)

2- a) Déterminer les expressions complexes de r et t. (0,25+0,25)

b) En déduire l'expression complexe et les éléments caractéristiques de f. (0,25+0,25)

3- En admettant que $\operatorname{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$, déterminer l'expression complexe de s et l'affixe du point C. (0,5+0,5)

PROBLÈME II (09 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (1-x)e^{2x} & si\ x \in]-\infty;1[\\ f(x) = x - 1 + \ln\left(\dfrac{2x}{x+1}\right) & si\ x \in [1;+\infty[\end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité $2\ cm$.

1- Montrer que f est continue en $x_0 = 1$. (0,5)

2- Étudier la dérivabilité à gauche de f en $x_0 = 1$. (0,25)

3- a) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1}$ (on pourra poser $x = 2t+1$). (0,5)

b) Vérifier que pour tout $x > 1$ $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + \dfrac{\ln x}{x-1} - \dfrac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1}$. (0,5)

c) Étudier la dérivabilité à droite de f en $x_0 = 1$. f est-elle dérivable en $x_0 = 1$? (0,5+0,25)

4- a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (0,5)

b) Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique (D) dont on déterminera l'équation.
Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D) dans l'intervalle $[1, +\infty[$. (0,5+0,25)

5- Étudier la variation de f. (0,75)

6- Tracer $(\mathscr{C})$ en précisant les demi-tangentes au point d'abscisse $x_0 = 1$. (1,25)

Partie B

On considère la suite (I_n) définie par :

$$I_0 = \int_0^1 xe^x dx \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \ I_n = \int_0^1 xe^x(1 - e^{-2x})^n dx$$

1- Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 xe^{3x} dx$. (0,5)

2- Soit (K_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $K_n = \int_0^1 xe^{3x}(1 - e^{-2x})^n dx$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \le K_n \le \dfrac{e^3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e^2}\right)^n$. (1)

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n$. (0,5)

3- Pour tout entier naturel $n \ge 2$, on pose $T_n = I_0 + I_1 + \ldots + I_{n-1}$.

a) Démontrer que $T_n = I - K_n$. (1)

b) En déduire l'étude de convergence de la suite (T_n). (0,25)