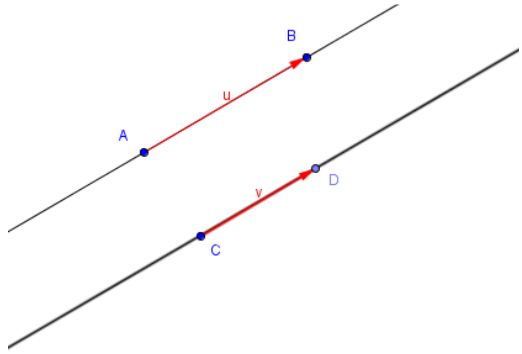
VECTEURS DU PLAN :Colinéarité et orthogonalité

1. Vecteurs colinéaires

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Si on pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. Nous avons déjà vu que si $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, $\vec{u} = k\vec{v}$.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On a $\vec{u} = k\vec{v}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$, donc si k= $\frac{x}{x'}$ et k = $\frac{y}{y'}$.

Alors $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ ou encore xy'= x'y enfin xy'-x'y =0.

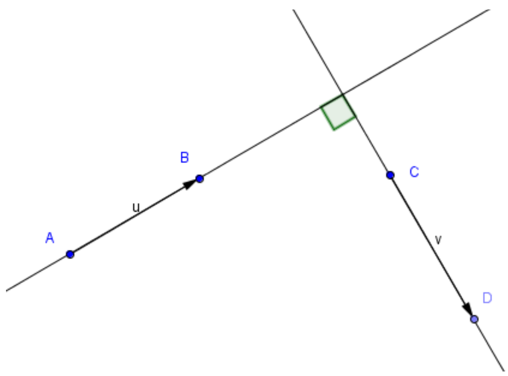
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si xy'-x'y = 0.

2. Vecteurs orthogonaux

2.1 Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B, C, D quatre points tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si les deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

On note $\vec{u} \perp \vec{v}$



Exemple:

Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u}$ et $k\vec{v}$ sont orthogonaux pour toute valeur de k.

2.2 Propriété 1

Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs orthogonaux au même vecteur $\vec{u}$ non nul, alors ,

les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

2.3 Propriété 2

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour composantes $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors, $\vec{u} \perp \vec{v}$ si xx' + yy' = 0.

3. Produit scalaire

3.1 Définition

3.1.1 Cas de deux vecteurs colinéaires

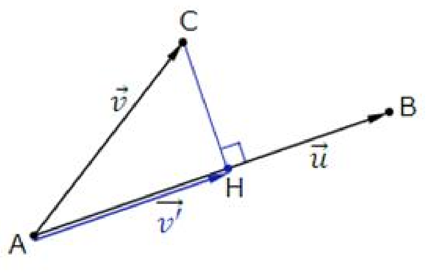
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. Le produit scalaire de ses vecteurs noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le réel défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| x ||\vec{v}||$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\ ||\vec{u}|| x ||\vec{v}||$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires

3.1.2 Cas général

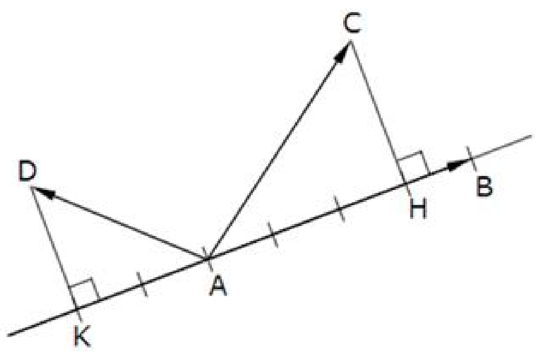
Soient $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{AC}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires. Soit $\vec{v}\,'=\vec{AH}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{v}$. Par définition on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}\,'$ ou encore

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$



3.1.3 Exemples

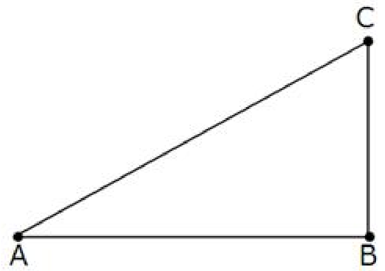
1- Dans la figure ci-dessous ,



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ = AB. AH = 4 x 3 = 12 .($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ vecteurs colinéaires de même sens)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK}$ = - AB . AK = - 4 x 2 = - 8 .($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ vecteurs colinéaires de sens contraires)

2- Soit ABC un triangle direct rectangle en B. 0n a :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ = AB², puisque C se projette orthogonalement en B sur (AB).

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{0}$ = 0 car le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BC}$ sur $\overrightarrow{AB}$ est $\vec{0}$

De façon plus générale, le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

3.2 Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ des vecteurs et *k* un nombre réel **:**

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\,\vec{v}) = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$