Corrigé problème 2 série C 2018

Problème 2

Soit f al fonction définie par $\begin{cases} \mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}} \text{ si } \mathbf{x} \in \ 0;+\infty \\ \mathbf{f(}0\mathbf{)} = 1 \end{cases}$

Partie A

1.- g est définie par $\mathbf{g(x)} = \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+1} - \mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}$

a) g est définie pour tout $\ 0;+\infty$

Elle est dérivable sur cet intervalle et $\mathbf{g'(x)} = \dfrac{1}{(\mathbf{x}+1)^2} - \dfrac{1}{\mathbf{x}+1} = \dfrac{1-(\mathbf{x}+1)}{(\mathbf{x}+1)^2}$

Alors $\mathbf{g'(x)} = \dfrac{-\mathbf{x}}{\mathbf{x}+1\ ^2}$ pour tout x de cet intervalle.

$\mathbf{g'(x)} \leq 0$ pour tout $\mathbf{x} \geq 0$.
Alors g est décroissante sur cet intervalle.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
g'(x)	—
g(x)	↘

b) $\mathbf{g'(x)} < 0$ pour tout x > 0, donc g est strictement décroissante sur $\ 0;+\infty$.

Comme $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0} \mathbf{g(x)} = \mathbf{g(}0\mathbf{)} = 0$, alors g (x) < 0 pour tout x > 0.

2.- h est définie par $\mathbf{h(x)} = \mathbf{ln(x}+1\mathbf{)} - \mathbf{x} + \dfrac{\mathbf{x}^2}{2} - \dfrac{\mathbf{x}^3}{3}$

a).h est dérivable sur cet intervalle et $\mathbf{h'(x)} = \dfrac{-\mathbf{x}^3}{\mathbf{x}+1}$ pour tout $\mathbf{x} \geq 0$.

$\mathbf{h'(x)} \leq 0$ pour tout $\mathbf{x} \geq 0$. Ainsi h est décroissante sur $\ 0;+\infty$

b) h est décroissante sur $\ 0;+\infty$ et h(0) = 0, donc $\mathbf{h(x)} \leq 0$ pour tout $\mathbf{x} \geq 0$.

c) Soit k la fonction définie par $\mathbf{k(x)} = \mathbf{ln(x}+1\mathbf{)} - \mathbf{x} + \dfrac{\mathbf{x}^2}{2}$

On a $\mathbf{k'(x)} = \dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{x}+1}$.

$\mathbf{k'(x)} \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \geq 0$, donc k est croissante.

Et comme k(0)= 0, on a $\mathbf{k(x)} \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \geq 0$, ce qui équivaut à $\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)} - \mathbf{x} + \dfrac{\mathbf{x}^2}{2} \geq 0$

d) D'après le résultat de b), $\mathbf{h(x)} \leq 0$ donc $\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)} - \mathbf{x} \leq -\dfrac{\mathbf{x}^2}{2} + \dfrac{\mathbf{x}^3}{3}$

Ainsi, en divisant par x^2, pour x > 0, on a $\dfrac{\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}-\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} \leq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathbf{x}}{3}$.**(1)**

Et d'après c), $\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)} - \mathbf{x} + \dfrac{\mathbf{x}^2}{2} \geq 0$, ce qui donne $\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)} - \mathbf{x} \geq -\dfrac{\mathbf{x}^2}{2}$

Ou , en divisant par x, pour x > 0, $\dfrac{\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}-\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} \geq -\dfrac{1}{2}$ **(2)**

Les inégalités **(1)** et **(2)** permettent d'écrire $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}-\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} \leq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathbf{x}}{3}$

e) $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}-\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} \leq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathbf{x}}{3}$

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} (-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{2}$, et $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathbf{x}}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

Donc d'après le théorème d'encadrement des limites, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} \dfrac{\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}-\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} = -\dfrac{1}{2}$

Ou $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} \dfrac{\dfrac{\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}}{\mathbf{x}} - 1}{\mathbf{x}} = -\dfrac{1}{2}$.

Partie B

1) φ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi\mathbf{(x)} = \dfrac{1}{\mathbf{f(x)}}$.

Nous savons que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} \dfrac{\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}}{\mathbf{x}} = 1$, donc $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} \dfrac{1}{\dfrac{\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}}{\mathbf{x}}} = \lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{ln(x}+1\mathbf{)}} = \dfrac{1}{1}$

Ainsi $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} \mathbf{f(x)} = 1 = \mathbf{f(}0\mathbf{)}$ et f est continue à droite en 0.

. φ est l'inverse de la fonction f, continue à droite en 0, et en 0 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} \mathbf{f(x)} \neq 0$, donc φ est aussi continue à droite en 0.

2) a) $\dfrac{\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(}0\mathbf{)}}{\mathbf{x}} = \dfrac{\dfrac{1}{\varphi\mathbf{(x)}} - \dfrac{1}{\varphi(0)}}{\mathbf{x}} = -\dfrac{\varphi\mathbf{(x)} - \varphi(0)}{\mathbf{x}} \cdot \dfrac{1}{\varphi\mathbf{(x)}\varphi(0)}$.

b) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} \dfrac{\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(}0\mathbf{)}}{\mathbf{x}} = \lim\limits_{\mathbf{x}\to 0^+} -\dfrac{\varphi\mathbf{(x)} - \varphi(0)}{\mathbf{x}} \cdot \dfrac{1}{\varphi\mathbf{(x)}\varphi(0)}$

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}-1}{x} = -\frac{1}{2},$$

$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = 1$, et $\varphi(0) = \frac{1}{1} = 1$

Donc $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = -\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{1.1} = \frac{1}{2}$

La fonction f est donc dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}$

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln\left[x(1+\frac{1}{x})\right]}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0^+$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} = 0^+$, alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} = 0^+$

Par conséquent $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x+1)} = +\infty$

4) $f(x) = \frac{x}{\ln(x+1)}$.

a) f est le quotient de deux fonction dérivables, donc dérivable.

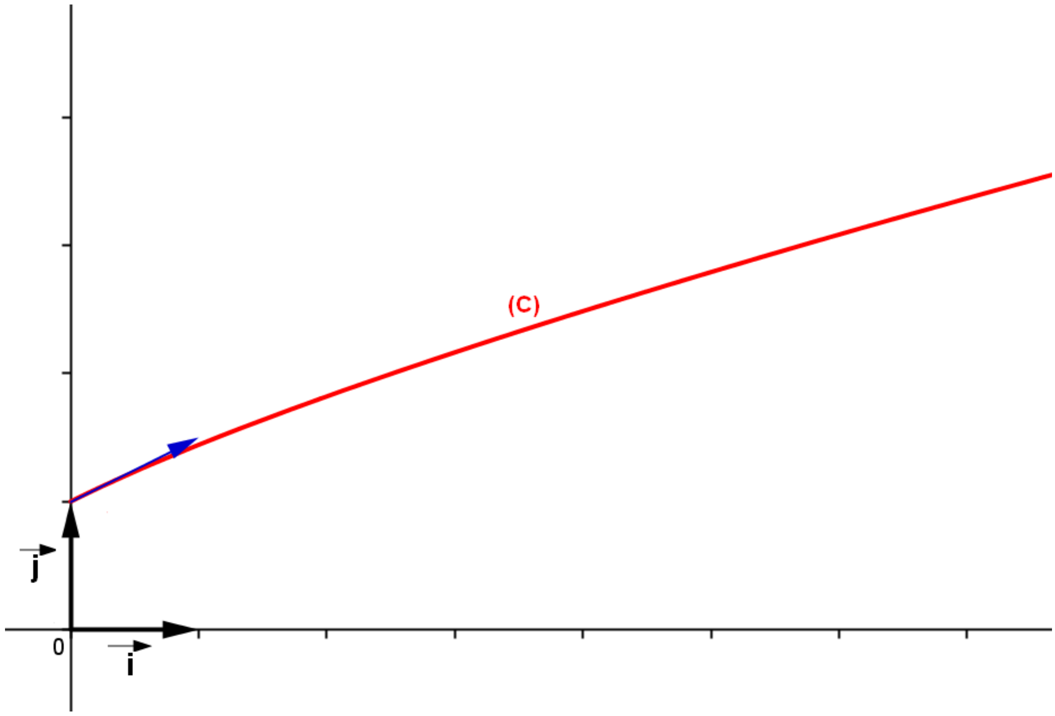
$$f'(x) = \frac{1.\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}.x}{\ln(x+1)^{2}} = \frac{-g(x)}{(\ln(x+1))^2}.$$

b) $(\ln(x+1))^2$ est positif ou nul pour tout x positif, donc f '(x) et g(x) sont de signes contraires.
D'après le résultat de A.1- b), g(x) < 0 pour tout x > 0, ainsi, f '(x) > 0 pour tout x > 0.
Tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
f '(x)	$\frac{1}{2}$	+	
f (x)	1	↗	$+\infty$

5.- a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x+1)} = 0$, donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (x'Ox).

b)



Partie C

1) Pour $\mathbf{t} \in [0;1]$, $0 \leq \mathbf{t}^2 \leq 1$, donc $1-\mathbf{t}^2 \leq 1$, ou $(1-\mathbf{t})(1+\mathbf{t}) \leq 1$

Puisque $1+\mathbf{t} \geq 1 > 0$, on peut diviser les deux membres de l'inégalité par 1+t, et on a

$$1-\mathbf{t} \leq \frac{1}{1+\mathbf{t}}$$

D'autre part, $1+\mathbf{t} \geq 1$, donc en prenant les inverses, $\frac{1}{1+\mathbf{t}} \leq 1$

D'où $1-\mathbf{t} \leq \frac{1}{1+\mathbf{t}} \leq 1$

2) - Pour x = 0, f(x)= 1, $\frac{2}{2-\mathbf{x}} = \frac{2}{2} = 1$, donc $1 \leq \mathbf{f}(0) \leq \frac{2}{2-0}$

- Soit $0 < \mathbf{x} \leq 1$.

On a $1-\mathbf{t} \leq \frac{1}{1+\mathbf{t}} \leq 1$, donc en intégrant entre 0 et x, pour $\mathbf{x} \in [0;1]$,(ce qui est justifiée, puisque f est continue en 0), $\int_0^{\mathbf{x}} (1-\mathbf{t})\mathbf{dt} \leq \int_0^{\mathbf{x}} \frac{1}{1+\mathbf{t}}\mathbf{dt} \leq \int_0^{\mathbf{x}} 1.\mathbf{dt}$

Ce qui donne $\left[\mathbf{t}-\frac{\mathbf{t}^2}{2}\right]_0^{\mathbf{x}} \leq \mathbf{ln}(1+\mathbf{t}\ {}_0^{\mathbf{x}} \leq \mathbf{t}\ {}_0^{\mathbf{x}}$

$$\left(x-\frac{x^2}{2}\right)-(0-\frac{0^2}{2})\leq \ln(1+x)-\ln 1\leq x-0$$

ou $\dfrac{2x-x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$

En divisant par x, on a, puisque $0<x\leq 1$, $\dfrac{2-x}{2}\leq\dfrac{\ln(1+x)}{x}\leq 1$,

Et en prenant les inverses, $\dfrac{2}{2-x}\geq\dfrac{x}{\ln(x+1)}\geq 1$

ou $1\leq f(x)\leq\dfrac{2}{2-x}$.

3) $1\leq f(x)\leq\dfrac{2}{2-x}$, donc $\int_0^1 1.dx\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\int_0^1\dfrac{2}{2-x}dx$

Comme $\int_0^1 1.dx=[x]_0^1=1$, et $\int_0^1\dfrac{2}{2-x}dx=-2[\ln(2-x)]_0^1=-2[\ln 1-\ln 2]=2\ln 2$

on a $1\leq\int_0^1 f(x)dx\leq 2\ln 2$