Corrigé Exercice 1 Bacc D 2018

Exercice 1

Soit le polynôme P aà variable complexe z défini par $P(z)=z^3+(1-9i)z^2-(24+6i)z-14+18i$.

1- a- On va déterminer le nombre complexe z_0 tel que $P(z)=(z-z_0)(z^2-4iz-4-2i)$.

On a en développant le second membre de cette égalité, $P(z)=z^3-(4i+z_0)z^2-(4+2i-4iz_0)z+(4+2i)z_0$

Or $P(z)=z^3+(1-9i)z^2-(24+6i)z-14+18i$, on a donc , quel que soit le nombre complexe z :

$$z^3-(4i+z_0)z^2-(4+2i-4iz_0)z+(4+2i)z_0=z^3+(1-9i)z^2-(24+6i)z-14+18i$$

Ce qui donne, par identification des coefficients des termes de même degré : $\begin{cases} -(4i+z_0)=1-9i \\ -(4+2i-4iz_0)=-(24+6i) \\ (4+2i)z_0=-14+18i \end{cases}$

$-(4i+z_0)=1-9i$ donne $z_0=-1+5i$

Ce z_0 vérifie bien les deux autres égalités, donc $z_0=-1+5i$.

On a donc $P(z)=(z+1-5i)(z^2-4iz-4-2i)$

b- *Résolution de l'équation P(z) = 0*

P(z)= 0 équivaut à $P(z)=(z+1-5i)(z^2-4iz-4-2i)$, donc à $z+1-5i=0$ ou $z^2-4iz-4-2i=0$

La première équation donne z =-1+ 5i.

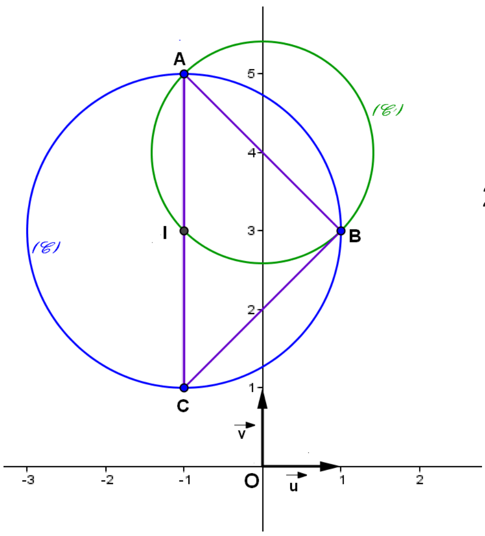
Pour la deuxième équation, $\Delta=(-4i)^2-4(1)(-4-2i)=8i$

Soit $\delta=\alpha+i\beta$ une racine de Δ . On a $\Delta=\alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta$ .et $|\Delta|=|\delta^2|=\alpha^2+\beta^2=8^2=64$

On a : $\begin{cases} \alpha^2-\beta^2=0 \\ 2\alpha\beta=8 \\ \alpha^2+\beta^2=64 \end{cases}$

La première et la troisième équation donnent $2\alpha^2=64$ ou $\alpha^2=32=(4\sqrt{2})^2$.

Donc $\alpha=4\sqrt{2}$



2- a)

b) AB $=|z_B-z_A|=|1+3i-(-1+5i)|=|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}$

$AB=2\sqrt{2}\,cm$

BC $=|z_C-z_B|=|-1+i-(1+3i)|=|-2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}$

$BC=2\sqrt{2}\,cm$

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\arg\left(\frac{-2-2i}{-2+2i}\right)=¿$

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{2}$.

Ainsi le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

c- $z_I=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{-1+5i-1+i}{2}=-1+3i$

$z_I=-1+3i$

d- Soit M(z). | z +1-3i | = IM = distance de M à I .

L'ensemble ($\mathscr{C}$) des points M d'affixe z tels que | z +1-3i | =2 est l'ensemble des points dont la distance à I est égale à 2. Donc ($\mathscr{C}$) est le cercle de centre I et de rayon 2.

3- S est la similitude directe qui laisse invariant le point A et transforme le point C en B.

Soit z' = az + b l'expression analytique de S.

On a $\begin{cases} z_B=az_C+b \\ z_A=az_A+b \end{cases}$ ou $\begin{cases} 1+3i=a(-1+i)+b \\ -1+5i=a(-1+5i)+b \end{cases}$

Par soustraction membre à membre, on a $2-2i=a(-4i)$. Ce qui donne $a=\frac{2-2i}{-4i}=\frac{1-i}{-2i}$.

En multipliant le numérateur et le dénominateur par i , on obtient $a=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}(1+i)$.

En remplaçant a par sa valeur dans une des équations, on a $b=2+3i$.

Ainsi, l'expression complexe de S est $z'=\frac{1}{2}(1+i)z+2+3i$.

Le centre de S est A(-1 +5i), le rapport est $k=\left|\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'angle

$\theta=\arg\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)=\frac{\pi}{4}$