Corrigé problème Bacc D 2017

Problème

f est la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=1-e^{x} & \text{si } x\leqslant 0 \\ f(x)=x(-1+\ln x) & \text{si } x>0 \end{cases}$. Sa courbe est notée $(\mathscr{C})$

1- Continuité de f en $x_0=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-e^{x})=1-e^{0}=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x(-1+\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x+x\ln x)=0+0=0$

$f(0)=1-e^{0}=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$ donc f est continue en 0.

2-a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(1-e^{x})-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-\frac{(e^{x}-1)}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(1-\ln x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-1+\ln x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

La courbe admet en 0 deux demi-tangentes, à gauche de pente -1 et à droite parallèle à l'axe des ordonnées.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(1-e^{x})$

$\lim\limits_{x\to -\infty}(e^{x})=0$, donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x(-1+\ln x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(-1+\ln x)=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

3-a) Pour x >0, $f(x)=x(-1+\ln x)$, $f'(x)=1(-1+\ln x)+x(0+\frac{1}{x})=-1+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=-1+\ln x+1=\ln x$

Si 0 < x < 1, f'(x) < 0, et si x > 1, f '(x) > 0.

b) Pour x < 0, $f(x)=1-e^{x}$ $f'(x)=0-e^{x}=-e^{x}$

Quel que soit x < 0, $e^{x}>0$ donc > $f'(x)<0$ pour tout x < 0.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-1 \parallel -\infty$	$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Équation de la tangente en x_0= e

$y=f'(e)(x-e)+f(e)$

$f(e)=e(-1+\ln e)=0$

$f'(e)=\ln e=1$

Donc l'équation est $y=x-e$.

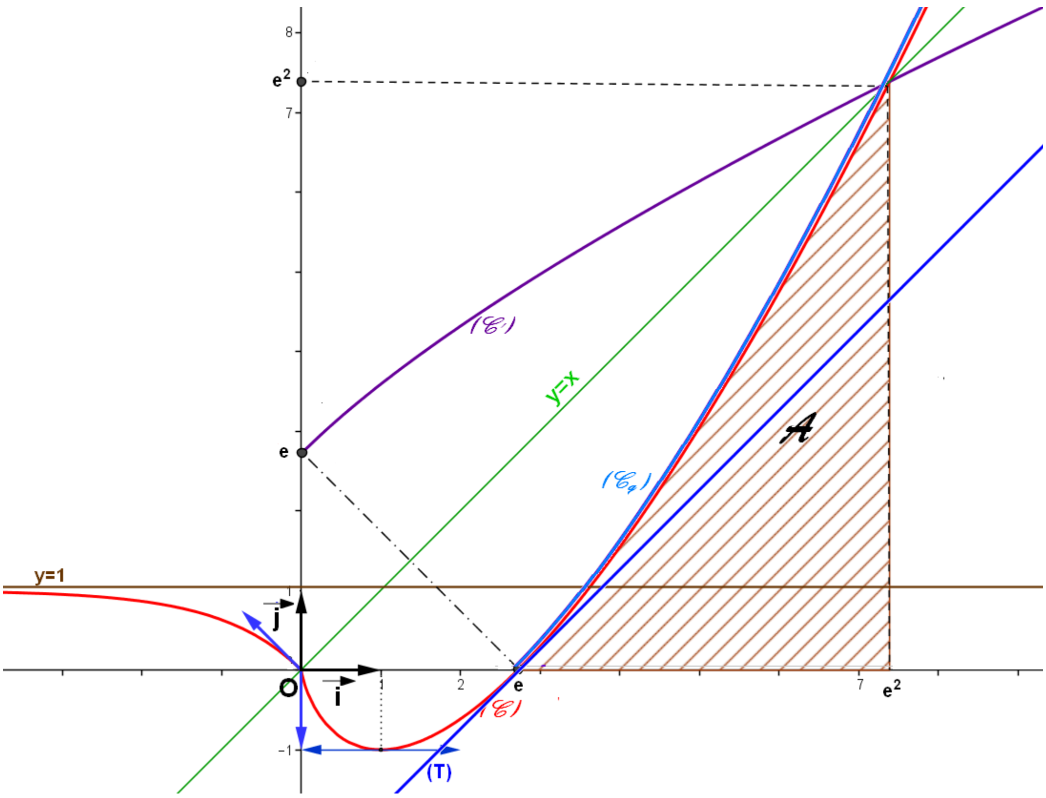
5-a) $f(e^2) = e^2(-1+\ln e^2) = e^2(-1+2) = e^2$.

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ donc on a une asymptote parallèle à l'axe des abscisses en $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(-1+\ln x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-1+\ln x)=+\infty$

donc, on a une branche parabolique de direction asymptotique (y'y).

6- Construction



7- Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=[e;+\infty[$.

a) La fonction g est continue et strictement croissante sur $I=[e;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et g(e) = f(e)=0

Donc g est une bijection de I sur $J=g(I)=[0;+\infty[$.

Alors , g admet une réciproque g^{-1} de $J=[0;+\infty[$ sur I.

b) g est strictement croissante, donc sa réciproque g^{-1} est aussi strictement croissante.

x	0	$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	$+$	
$g^{-1}(x)$	e $\nearrow$	$+\infty$

c) Tracé de ($\mathscr{C}'$) : voir courbe précédent

d) $g(e^2)=f(e^2)=e^2$ donc $g^{-1}(e^2)=e^2$

$$(g^{-1})'(e^2)=\frac{1}{g'[g^{-1}(e^2)]}=\frac{1}{g'(e^2)}$$

$$g'(e^2)=f'(e^2)=\ln e^2=2$$

Donc $(g^{-1})'(e^2)=\frac{1}{2}$

8- Calcul d'aire :

$$A=\int_e^{e^2} f(x)\,dx=\int_e^{e^2} x(-1+\ln x)\,dx$$

Posons u'(x) = x. et v(x)= -1+ ln x

On a $u(x)=\frac{x^2}{2}$ et $v'(x)=\frac{1}{x}$

Alors $A=\int_e^{e^2} x(-1+\ln x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}(-1+\ln x)\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}(-1+\ln x)\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$$A=\left[\frac{x^2}{2}(-1+\ln x)\right]_e^{e^2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_e^{e^2}$$

$$A=\frac{e^4+e^2}{4}\ \text{cm}^2$$

$$A=15{,}54\,\text{cm}^2$$