Corrigé problème 2 Session 2017

Pour tout entier naturel n no nul, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f_n(x)=\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.

Partie A

On note ($\mathscr{C}_n$) la courbe de f_n.

1) a- ***Limite en*** $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Limite en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$,

Si n est pair, $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)^n=+\infty$ et si n est impair, $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)^n=-\infty$ donc on a une forme indéterminée.

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^n(\frac{1}{x}+1)^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^n}$$

On pose X = -x, donc si x tend vers $-\infty$ X tend vers $+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{-X^n}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{(-1)^n X^n}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^X}{X^n}=+\infty$ on a : - si n est pair, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$

- si n est impair, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty$

Limite en -1

$$\lim_{x\to-1^-} f_n(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$$

$\lim\limits_{x\to-1^-} e^{-x}=e$

- Si n est impair, $\lim\limits_{x\to-1^-}(1+x)^n=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f_n(x)=-\infty$

- Si n est impair, $\lim\limits_{x\to-1^-}(1+x)^n=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f_n(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} e^{-x}=e$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}(1+x)^n=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f_n(x)=+\infty$.

b- ***Dérivée***

$$f_n(x)=\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$$

$$f'_n(x)=\frac{-e^{-x}(1+x)^n+ne^{-x}(1+x)^{n-1}}{((1+x)^n)^2}$$

$$f'_n(x)=\frac{e^{-x}(-x-n-1)}{(1+x)^{n+1}}$$

c) ***Tableau de variation***

$$f'_n(x)=\frac{e^{-x}(-x-n-1)}{(1+x)^{n+1}}$$

$f_n'(x)=0$ si et seulement si $e^{-x}(-x-n-1)=0$,

Comme $e^{-x}>0$ quel que soit x $f'_n(x) = 0$ si et seulement si $x = -n-1$.

$(1+x)^{n+1}>0$ Quel que soit $x > -n-1$

- Si n est pair, alors n+ 1 est impair, et $(1+x)^{n+1}<0$ si $x < -n-1$
- Si n est impair, alors n+ 1 est pair, et $(1+x)^{n+1}>0$ si $x < -n-1$

Ainsi - pour n est pair,

x	$-\infty$		$-n-1$		-1		$+\infty$
$e^{x}(-x-n-1)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$(1+x)^{n+1}$		$-$		$-$	‖	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

x	$-\infty$		$-n-1$		-1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^{n+1}}{(-n)^n}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

- pour n impair

x	$-\infty$		$-n-1$		-1		$+\infty$
$e^{x}(-x-n-1)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$(1+x)^{n+1}$		$+$		$+$	‖	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	

x	$-\infty$		$-n-1$		-1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e^{n+1}}{(-n)^n}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

2) $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ si et seulement si $\dfrac{e^{-x}}{(1+x)^n} = \dfrac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}$

Ce qui équivaut à $\dfrac{e^{-x}(1+x)}{(1+x)^{n+1}} = \dfrac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}$

ou $1 + x = 1$

donc $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ si $x = 0$.

Comme $f_n(0) = 1$, toutes les courbes ($\mathcal{C}_n$) passent par le point A(0 ; 1).

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x(1+x)^n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^{n+1}}$

En posant X = -x, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{X}}{(-1)^{n+1}X^{n+1}}$

Alors :- si n est pair, n+1 est impair et $(-1)^{n+1}=-1$, ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = -\infty$

- si n est impair, n+1 est pair et $(-1)^{n+1}= 1$, ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$

4) $f_2(x) - f_1(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+x)^2} - \dfrac{e^{-x}}{(1+x)} = \dfrac{e^{-x} - e^{-x}(1+x)}{(1+x)^2}$

$f_2(x) - f_1(x) = \dfrac{-x\,e^{-x}}{(1+x)^2}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x\,e^{x}$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1+x)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$f_2(x) - f_1(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

Ainsi ($\mathcal{C}_2$) est au-dessus de ($\mathcal{C}_1$) sur $]-\infty;-1[U]-1;0[$

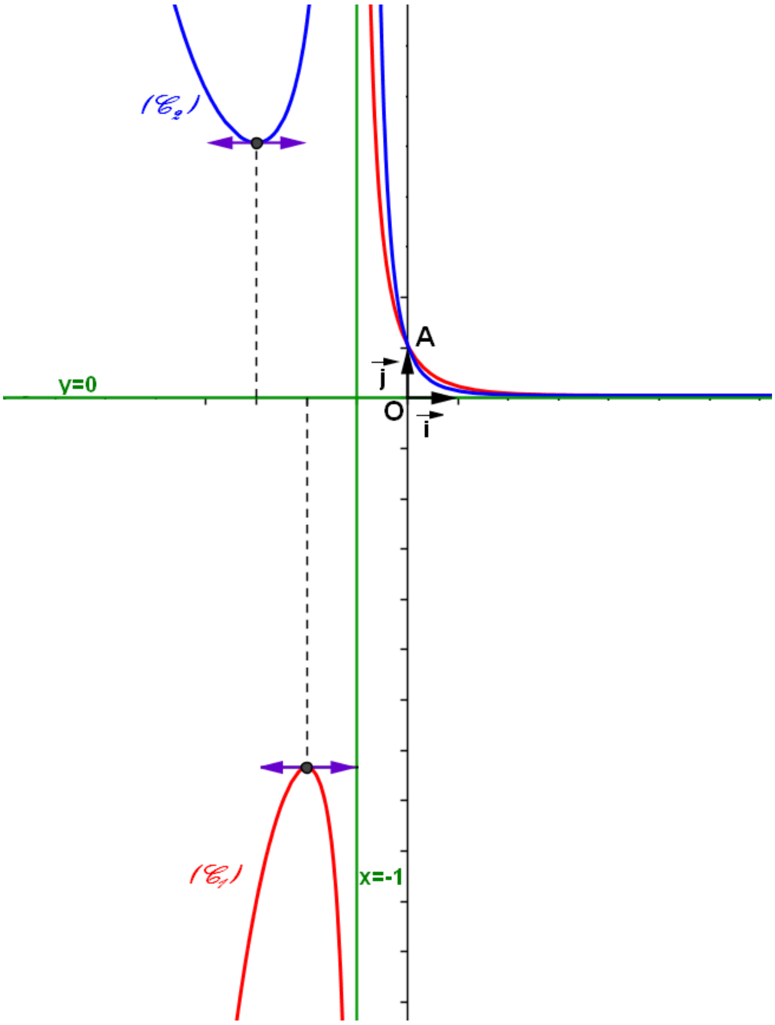
($\mathcal{C}_2$) est en-dessous de ($\mathcal{C}_1$) sur] $]0;+\infty[$

($\mathcal{C}_2$) et ($\mathcal{C}_1$) se coupent en A(0;1)

b- Courbes

Si n est pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = -\infty$ donc la courbe ($\mathcal{C}_2$) admet une branche parabolique de direction asymptotique (y'y)

Si n est impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe ($\mathcal{C}_1$) admet une branche parabolique de direction asymptotique (y'y)



Partie B

Pour tout entier naturel n > 0, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1) $f'_n(x)=\dfrac{e^{-x}(-x-n-1)}{(1+x)^{n+1}}=\dfrac{-e^{-x}(x+1)}{(1+x)^{n+1}}-\dfrac{ne^{-x}}{(1+x)^{n+1}}$

$$f'_n(x)=\frac{-e^{-x}}{(1+x)^n}-n\frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}$$

Ainsi $f'_n(x)=-f_n(x)-nf_{n+1}(x)$

a) $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx-\int_0^1\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}dx$

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{e^{-x}-e^{-x}(1+x)}{(1+x)^{n+1}}dx$$

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{-xe^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx$$

Comme $\frac{-xe^{-x}}{(1+x)^{n+1}}<0$, on a $\int_0^1 \frac{-xe^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx<0$, alors $I_{n+1}-I_n<0$ et (I_n) est décroissante.

b) $\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$ > 0 quel que soit n donc $I_n=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}dx$ > 0

(I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

3-a) Pour $0\leqslant x\leqslant 1$, $e^{-1}\leqslant e^x\leqslant e^0$, donc $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n}\leqslant\frac{e^x}{(1+x)^n}\leqslant\frac{e^0}{(1+x)^n}$

Donc $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n}\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{1}{(1+x)^n}$

En intégrant chacun des membres des inégalités, on a $\int_0^1\frac{e^{-1}}{(1+x)^n}dx\leqslant\int_0^1 f_n(x)dx\leqslant\int_0^1\frac{1}{(1+x)^n}dx$

$$\int_0^1\frac{e^{-1}}{(1+x)^n}dx=e^{-1}[\frac{1}{-n+1}\frac{1}{(1+x)^{n-1}}]=\frac{-e^{-1}}{n-1}\left[\frac{1}{(1+x)^{n-1}}\right]_0^1$$

$$\int_0^1\frac{e^{-1}}{(1+x)^n}dx=\frac{-e^{-1}}{n-1}\left[\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{1^2}\right]=\frac{e^{-1}}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x)^n}dx=[\frac{1}{-n+1}\frac{1}{(1+x)^{n-1}}]=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(1+x)^{n-1}}\right]_0^1$$

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x)^n}dx=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{1^2}\right]$$

Ainsi $\frac{e^{-1}}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$

c- $0<\frac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{-1}}{n-1}=0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{-1}}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]=0$

De même $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]=0$

$\frac{e^{-1}}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{-1}}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]=0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

4) a. D'après B- 1) $f'_n(x)=\frac{-e^{-x}}{(1+x)^n}-n\frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}$

Alors $\int_0^1 f'_n(x)dx=\int_0^1\frac{-e^{-x}}{(1+x)^n}dx-n\int_0^1\frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx=-I_n-nI_{n+1}$

$I_n + nI_{n+1} = -[f_n(x)]_0^1 = -f_n(1) + f_n(0) = f_n(0) - f_n(1)$

$I_n + nI_{n+1} = 1 - \dfrac{e^{-1}}{2^n}$

b- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-1}}{2^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_{n+1} = 1$.

Partie C

(U_n) est la suite définie par $U_n = \int_0^1 x^n \cdot \ln(x+1)dx$.

1) $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$.

Pour tout $x \in [0;1]$, $x - 1 \leq 0$ et $x^n \geq 0$.

Donc $x^{n+1} - x^n \leq 0$ Pour tout $x \in [0;1]$.

$U_n = \int_0^1 x^n \cdot \ln(x+1)dx$ Et $U_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} . \ln(x+1)dx$, donc $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^{n+1} . \ln(x+1) - x^n \ln(x+1)dx$

$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) . \ln(x+1)dx$.

$x + 1 \geq 1$ pour tout $x \in [0;1]$, donc $\ln(x+1) \geq 0$

Comme $x^{n+1} - x^n \leq 0$ et $\ln(x+1) \geq 0$, on a $(x^{n+1} - x^n)\ln(x+1) \leq 0$ pour tout $x \in [0;1]$,

alors $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) . \ln(x+1)dx \leq 0$.

Par conséquent $U_{n+1} - U_n \leq 0$ et (U_n) est décroissante.

3) Pour tout x $x \in [0;1]$, $\ln(x+1) \geq 0$, et $x^n \geq 0$, donc $x^n \ln(x+1) \geq 0$.

Alors $U_n = \int_0^1 x^n \cdot \ln(x+1)dx \geq 0$.

(U_n) est décroissante et minorée par 0, donc (U_n) est convergente.

4) Pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2$ .et $x^n \geq 0$, donc $0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2$.

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2 dx$$

$$\int_0^1 x^n \ln 2 dx = \ln 2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \ln 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}\right) = \frac{\ln 2}{n+1}$$.

Alors $0 \leq U_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$.

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{n+1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$