GÉNÉRALITÉS SUR LES ENSEMBLES

1. Ensemble - Élément

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de E telle que quel que soit l'objet a, on peut dire sans ambiguïté que a est ou n'est pas un élément de E

Si a est un élément de E, on écrit $a \in E$ si non $a \notin E$

Deux ensembles E et F sont égaux, et on écrit $E = F$, s'ils possèdent les mêmes éléments.

On dit que E est donné en compréhension s'il est défini par une propriété caractéristique de ses éléments.

Exemple : $E = \{x, x \text{ est un nombre entier inférieur ou égal à } 6\}$

On dit que E est donné en extension s'il est défini par la donnée d'une liste de ses éléments
Exemple : $E = \{a, b, c\}$

L'ensemble vide, noté ϕ , est l'ensemble qui n'a aucun élément.

Un ensemble qui n'a qu'un seul élément est un singleton.

2. Partie d'un ensemble : Inclusion

2.1. Définition

Soit A et E deux ensembles
On dit que A est une partie de E (ou un sous ensemble de E ou inclus dans E) si tous les éléments de A sont éléments de E.

On écrit $A \subset E$
($A \subset E$) signifie :(si $x \in A$ alors $x \in E$)
A n'est pas inclus dans E s'il existe un élément de A qui n'est pas dans E.

2.2. Propriétés :

- Quel que soit l'ensemble E
  $E \subset E$ et $\phi \subset E$
- Soient A, B et C des ensembles
  . Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$
  . Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$

3. Ensemble des parties d'un ensemble

Les parties d'un ensemble E constituent un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $P(E)$:

$$P(E) = \{A, A \subset E\}$$

$$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

Propriétés

Quel que soit l'ensemble E

$E \in P(E)$, $\emptyset \in P(E)$ donc $P(E) \neq \emptyset$

- $Si\ \ E=\emptyset$
  $P(E)=\{\emptyset\}$
- $Si\ \ E=\{a\}$
  $P(E)=\{\emptyset,\{a\}\}$
- $E=\{a,b\}$
  $P(E)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$
- $E=\{a,b,c\}$
  $P(E)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\}\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$

Si E a n éléments alors P(E) en a 2^n

4. Complémentaire d'une partie

4.1. Définition

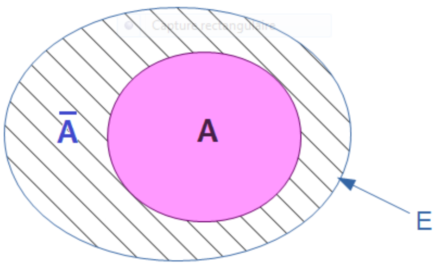
Soit E un ensemble, eA une partie de E

L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A est appelé complémentaire de A dans E et noté

$C_E A$ ou $\overline{A}$

$\overline{A}=C_E A=\{x, x\in E\ et\ x\notin A\}$

Si x est un élément de E, on a : $x\in\overline{A}$ si et seulement si $x\notin A$



Exemple

Si $E=\{a,b,c,d,e,f\}$ et $A=\{a,b,c,d\}$, alors $\overline{A}=\{e,f\}$

4.2. Propriétés

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E

$\overline{E}=\emptyset$; $\overline{\emptyset}=E$

$\overline{\overline{A}}=\overline{(\overline{A})}=A$ (On dit que A et $\overline{A}$ sont complémentaires (l'un de l'autre))

$A=B$ si et seulement si $\overline{A}=\overline{B}$

$A\subset B$ si et seulement si $\overline{B}\subset\overline{A}$

$A=\overline{B}$ si et et seulement si $\overline{A}=B$

5. Réunion et intersection de deux ensembles

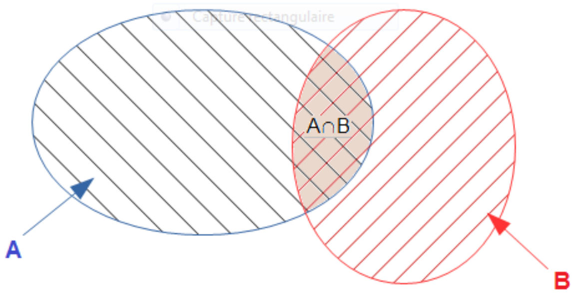
5.1. Définitions

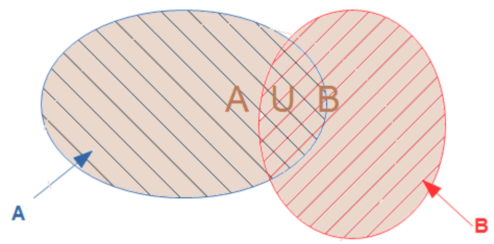
Soient A et B deux ensembles, la réunion de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B .

$A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Et l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et B est l'intersection de A et B et noté $A \cap B$

$A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\}$





Exemple

Si $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{a, c, e, f\}$, alors $A \cap B = \{a, c\}$ et $A \cup B = \{a, b, c, e, f\}$

5.2. Propriétés :

Quels que soient A et B

$A \subset A \cup B$

$B \subset A \cup B$

$A \cap B \subset A$

$A \cap B \subset B$

$A \cup A = A$

$A \cup B = B \cup A$

$A \cup \emptyset = A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cap A = A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Si $A \subset E$

$A \cup \overline{A} = E$

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

$A \subset B$ si et seulement si $A \cap B = A$

$A \subset B$ si et seulement si $A \cup B = B$

Si $A \subset B$ alors $A \cap C \subset B \cap C$ et $A \cup C \subset B \cup C$ quel que soit C

Loi de De Morgan :

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

6. Partition d'un ensemble

Soient E un ensemble et A_1, A_2, …, A_n des parties de E.

$\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ est une partition de E si les A_i sont tous non vides et si quel que soit $x \in E$ il existe un et un seul A_i tel que $x \in A_i$

On montre que $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ est une partition de E si :

- $A_i \neq \emptyset$, *quel que soit* i
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$ signifie $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ … $A_1 \cap A_n = \emptyset$, $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ …. $A_{n-1} \cap A_n = \emptyset$

Exemple : Soit $E \neq \emptyset$; $A \subset E$; $A \neq \emptyset$ *et* $A \neq E$
$\{A, \overline{A}\}$ est- il une partition de E ?

$A \neq \emptyset$, $\overline{A} \neq E$ *car* $A \neq E$
$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \overline{A} = E$
$\{A, \overline{A}\}$ est donc une partition de E

7. Ensemble produit

On appelle produit (cartésien) de A et B l'ensemble des couples (x ;y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. On le note : $A \times B$

$A \times B = \{(x ; y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$

Exemple
Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{0, 1\}$

A \ B	0	1
a	(a, 0)	(a, 1)
b	(b, 0)	(b , 1)
c	(c , 0)	(c, 1)

$A X B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$

Remarques

- (x ; y) = (x'; y') si et seulement si x = x' et y = y'
- (x ; y) ≠ (y ; x) sauf si x = y
- Si A = B , $A \times B = A \times A = A^2$

Généralisation

- $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) / x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, et \ x_n \in A_n\}$
- Ses éléments sont appelés des n-uplets, n-uples, n-tuples, ou n-listes
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ si et seulement si $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \ldots$ et $x_n = x'_n$
- Si $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ alors $A_1 X A_2 X \ldots X A_n = A X A X \ldots X A = A^n$