Dénombrement : série 6

Exercice 1

Soit $T(N,N)$ un tableau carré comportant $(N+1)$ lignes et $(N+1)$ colonnes, les lignes et colonnes sont numérotées de 0 à N.

On remplit ce tableau de tel sorte que la case se trouvant à la n-ème ligne et p-ème colonne contienne le nombre C_n^p pou tout n, $p < N$:

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	$\cdots$	$C_{(p-1)}$	$\boxed{C_p}$	$\cdots$	C_N
L_0	C_0^0									
L_1	C_1^0	C_1^1								
L_2	C_2^0	C_2^1	C_2^2							
L_3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3						
L_4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$				
$L_{(n-1)}$							$\boxed{C_{n-1}^{p-1}}$	$\boxed{C_{n-1}^{p}}$		
$\boxed{L_n}$	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	$\cdots$		$\boxed{C_n^p}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\ddots$	
L_N	C_N^0	C_N^1	C_N^2	C_N^3	C_N^4		$\cdots$	C_N^p	$\cdots$	C_N^N

1°) Montrer les égalités suivantes :

$$C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p \qquad \text{et} \qquad C_n^{n-p} = C_n^p$$

2°) A partir de ces deux égalités, remplir le tableau $T(9,9)$ comportant 10 lignes et 10 colonnes

3°) Trouver sans faire de calcul les valeurs exactes de :

C_6^4 , C_8^5 , C_9^3 et C_9^6

Exercice 2

1°) Développer suivant les puissances décroissantes de a les expressions suivantes :

$$(a+b)^0$$

$$(a+b)^1$$

$$(a+b)^2$$

$$(a+b)^3$$

$$(a+b)^4$$

2°) Donner le développement de $(a+b)^n$, $n \in IN$ (Formule du binôme de Newton)

2°) Donner le développement de $(a-b)^n$ pour $n \in IN$

3°) Développer $(x+1)^3$, $(x-1)^3$, $(a+b)^5$, $(a-b)^6$

$(x+1)^n$, $(x-1)^n$, $(2x+1)^7$, $(x-2)^5$

Exercice 3

1°) Démontrer que $(a+b)^3+(a-b)^3 = 2a(a^2+3b^2)$

2°) En déduire une simplification de l'expression :

$$f(x) = (x+\sqrt{1+x^2})^3 + (x-\sqrt{1+x^2})^3$$

Exercice 4

1°) Quel est le coefficient de x^7 dans le développement de $(1+x)^{15}$?

2°) Quel est le coefficient de x^7 dans le développement de $(2-x)^{10}$?

Exercice 5

1°) Ecrire le développement de $(a+b)^5$

2°) Ecrire le développement de $(1+x)^5$

3°) Ecrire le développement de $(1-\sqrt{2})^5$ sous la forme $p+q\sqrt{2}$, (p , $q \in Z$)

Exercice 6

Une expérience consiste à lancer 5 fois de suite une pièce de pile ou face

1°) Combien y a-t-il de résultats possibles dans cette expérience ?

2°) Parmi ces résultats, combien font apparaître :

a) 0 fois pile b) 1 fois pile

c) 2 fois pile d) 3 fois pile

e) 4 fois pile f) 5 fois pile

3°) Montrer que $\forall n \in IN \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ puis vérifier les résultats trouvés dans 2°)

Exercice 7

Une expérience consiste à lancer 3 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6

1°) Combien y a-t-il de résultats possibles dans cette expérience ?

2°) Dans combien de cas peut-on faire apparaître :

a) 0 fois la face n°1 b) 1 fois la face numéro n°1

c) 2 fois la face n°1 d) 3 fois la face n°1

3°) Montrer que $\forall n \in IN \quad 6^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 5^k$ puis vérifier les résultats trouvés dans 2°)

Exercice 8

I – Une boîte contient 3 boules rouges numérotées de 1 à 3
3 boules vertes numérotées de 4 à 6
et 3 boules noires numérotées de 7 à 9

On tire simultanément 3 boules de la boîte.

1°) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2°) Dans combien de cas distincts peut-t-on obtenir :

a) 3 boules de couleurs différentes ?

b) 3 boules de la même couleur ?

c) 2 boules de la même couleur ?

d) 3 numéros de même parité ?

e) au moins une boule rouge ?

II – La boîte ne contient plus que 3 boules, une rouge, une verte et une noire.

L'expérience consiste à tirer n fois de suite une boule de la boîte ($n \in IN$), en remettant la boule tirée dans la boîte après chaque tirage.

1°) Combien y a-t-il de résultats possibles dans cette expérience ?

2°) Dans combien de cas peut-t-on :

a) ne jamais obtenir la boule rouge ?

b) obtenir une seule fois la boule rouge ?

c) obtenir deux fois la boule rouge ?

d) obtenir k fois la boule rouge ? $(k \leq n)$

3°) a) Donner le développement de $P(x) = (2+x)^n$, $(k \leq n)$

b) Quel est le coefficient de x^k dans le développement de $P(x)$? $(k \leq n)$