MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SECRÉTARIAT GÉNÉRAL

DIRECTION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Service d'Appui au Baccalauréat

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL

SESSION 2020

C

Série	**: C**	**Epreuve de**	**: Mathématiques**
		Durée	**: 04 heures**
Code matière	**: 009**	**Coefficient**	**: 5**

NB : - Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.
- L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires.

EXERCICE (4 points)

Arithmétique

I. 1. Dresser les tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. (0,25 + 0,25 pt)

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ le système.

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{5}y = \bar{3} \end{cases}$$ (0,5 pt)

II. Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $10^{6n} + 10^{3n} - 2$ est divisible par 111. (0,5 pt)

Probabilité

On dispose d'un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par P_i la probabilité d'obtenir le nombre i après un lancer et on admet que $P_1 = P_3 = P_5$; $P_2 = P_4 = P_6$ et $P_2 = 2P_1$

1. On lance une fois ce dé

a. Calculer les probabilités P_i avec $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ (0,75 pt)

b. Montrer que la probabilité d'obtenir un nombre impair est $P = \frac{1}{3}$. (0,5 pt)

2. On lance le dé n fois de suite et d'une manière indépendante, où $n \in \mathbb{N}^*$

a. Calculer en fonction de n la probabilité $P(E_n)$ de l'événement

E_n : "obtenir au moins un nombre pair". (0,5 pt)

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(E_n)$. (0,25 pt)

c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $P(E_{n_0}) = \frac{2186}{2187}$. (0,5 pt)

Problème I (7 points)

Partie A

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme P défini par

$$P(z) = z^4 + 3z^2 - 6z + 10$$

1. Montrer que si un nombre complexe z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $P(\overline{z_0}) = 0$ où $\overline{z_0}$ est le nombre complexe conjugué de z_0. (0,75 pt)

2. a) Calculer $(1+i)^2$, $(1+i)^4$ et $P(1+i)$. (0,5 pt)

b) En déduire deux solutions de l'équation $P(z)=0$. (0,25 pt)

3. a) Trouver le polynôme Q(z) tel que $P(z)=\left(z^2-2z+2\right)Q(z)$. (0,5 pt)

b) Achever la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$. (0,5 pt)

Partie B

Dans le plan orienté $(\mathscr{P})$, on considère le carré direct ABDC. On désigne par E le point symétrique de B par rapport à A et par F le point symétrique de D par rapport à B.

Soient s_1 la symétrie orthogonale d'axe (AB), et s_2 la symétrie orthogonale d'axe (BC).

Soit r la rotation qui transforme B en C et C en E.

On pose $f = s_2 \circ s_1$ et $g = t_{\overrightarrow{AB}} \circ s_1$ où $t_{\overrightarrow{AB}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

I. 1. a) Tracer le carré ABDC et placer les points E et F (prendre AB = 4cm). (0,5 pt)

b) Déterminer l'image de C par g. (0,25 pt)

2. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f. (0,25 + 0,25 pt)

3. a) Montrer que r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (0,5 pt)

b) Quelle est la nature de $T = f\circ r$? (0,25 pt)

c) Décomposer r en produit de deux symétries orthogonales convenablement choisies et caractériser $T = f\circ r$. (0,5 + 0,25 pt)

II. Le plan $(\mathscr{P})$ est muni du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

1. Donner les affixes respectives des points A, B, C, D, E et F. (0,5 pt)

2. a) Déterminer les expressions complexes de r, s_1 et s_2. (3 x 0,25 pt)

b) En déduire les expressions complexes de f et T. (0,25 + 0,25 pt)

Problème II (9 points) **(Les deux parties A et B sont indépendantes)**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{-2x}-1 & \text{si } x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{x-\ln x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

I. 1. Montrer que f est continue en $x_0=0$. (0,5 pt)

2. a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0=0$. (0,5 pt)

b) Interpréter géométriquement le résultat. (0,25 pt)

3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (0,25 + 0,25 pt)

4. a) Déterminer la fonction dérivée de f sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. (0,25 + 0,25 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,75 pt)

5. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$. (0,5 pt)

b) Vérifier que $\alpha \in \left]-1, -\frac{3}{4}\right[$. (0,25 pt)

6. a) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$. (0,25 pt)

b) Tracer $(\mathcal{C})$ en précisant la tangente ou les demi-tangentes à l'origine. (1 pt)

II. Soit g la fonction définie sur $\left[-1, -\frac{3}{4}\right]$ par $g(x) = e^{2x} - 1$.

1. En utilisant l'égalité $f(\alpha) = 0$, démontrer que $g(\alpha) = \alpha$. (0,5 pt)

2. Montrer que pour tout $x \in \left[-1, -\frac{3}{4}\right]$, on a $g(x) \in \left[-1, -\frac{3}{4}\right]$ et $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ où g' est la fonction dérivée de g. (0,25 + 0,25 pt)

3. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a) A l'aide d'une démonstration par récurrence sur n, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \left[-1, -\frac{3}{4}\right]$. (0,5 pt)

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$. (0,5 pt)

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ et étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,25 + 0,25 pt)

Partie B

Soient I et J, deux intégrales définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \cos^2 x \, dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \sin^2 x \, dx$$

1. Calculer $I + J$. (0,5 pt)
2. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $I - J$. (0,5 pt)
3. En déduire les valeurs respectives des intégrales I et J. (0,5 pt)