

Trigonométrie : équations et inéquations

On rappelle que $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \quad \text{quel que soit } k \in \mathbb{Z}$$

1. Équation $\cos x = a$, $a \in \mathbb{R}$

- Si $|a| > 1$, équation n'admet aucune solution
- Si $|a| \leq 1$, on a une infinité de solution. En effet si α est solution, (c'est-à-dire $\cos \alpha = a$), $-\alpha$ est aussi solution (car $\cos(-\alpha) = \cos \alpha = a$)
Et comme $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha = a$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha + 2k\pi$ est aussi solution, de même que $-\alpha + 2k\pi$
En admettant que ce sont les seules solutions, on a

Théorème :

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Cas général :

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 2k\pi \text{ ou } f(x) = -g(x) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

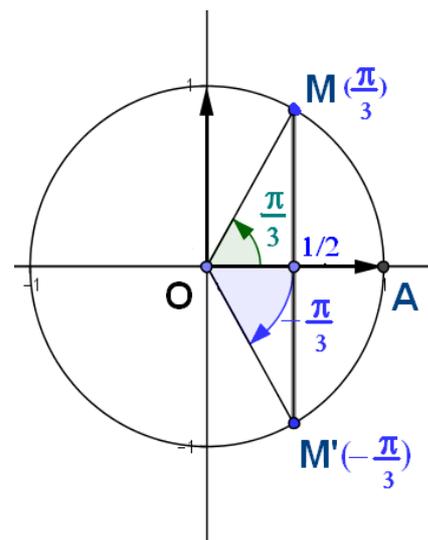
Exemple :

- Résoudre $2\cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\} \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$$



- Résoudre $\cos^2(2x + \frac{\pi}{3}) + 2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 3 = 0$

Posons $X = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

$$X^2 + 2X - 3 = 0$$

$$(X - 1)(X + 3) = 0$$

$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 1 \text{ ou } \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -3$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\cos(2k + \frac{\pi}{3}) = -3 \text{ n'a pas de solution}$$

$$S = \left\{ k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Équation $\sin x = a$

- Si $|a| > 1$ pas de solution
- Si $|a| \leq 1$ on a une infinité de solution

Si α est solution

Comme $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, $\pi - \alpha$ est aussi solution, donc $\pi - \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) aussi

En admettant que ce sont les seules solutions on a :

Théorème :

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Plus généralement

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 2k\pi \text{ ou } f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemples :

- Résoudre $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$
- $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1) \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi$$

$$x = \frac{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi + \pi$$

$$x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi + \pi$$

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

● $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$

○ Posons $X = \sin x$

L'équation s'écrit $2X^2 - 5X + 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$X' = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \quad X'' = \frac{8}{4} = 2$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin x = 2$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$\sin x = 2$ n'a pas de solution

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

3. Équation $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$

Posons $S = a \cos x + b \sin x$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

On a alors $S = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$

$$\text{or} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Ce qui signifie que $OM = 1$ où M est le point de coordonnées $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

Ainsi le point $M \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ appartient au cercle trigonométrique.

Soit $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$, alors $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

S peut s'écrire alors

$$S = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta)$$

Et l'équation s'écrit $\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta) = c$ ou $\cos(x - \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

En résumé, on a : $a \cos x + b \sin x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta) = c \Leftrightarrow \cos(x - \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

avec $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, et on retrouve le cas $\cos x = a$

Exemple :

Résoudre $\cos x - \sin x = 1$

$a = 1$ et $b = -1$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right] = \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right]$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{donc } \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 1 \text{ équivaut à } \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

Et les solutions sont les réels x tels que

$$x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad x + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad x = 2k\pi$$

$$\text{Et } S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi, k, (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

4. Équation $\tan x = a$

Théorème :

Quel que soit le réel a , l'équation $\tan x = a$ admet toujours une infinité de solution.

Si α est solution, $\alpha + k\pi$ est aussi solution, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

Exemple : $\tan x - 1 = 0$

$$\tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

5. Images des solutions d'une équation

L'image d'une solution α d'une équation est le point M du cercle trigonométrique tel que $(\vec{OA}; \vec{OM}) = \alpha$

➤ Si les solutions sont de la forme $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, $n \geq 3$ les images des solutions forment un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Si $n = 3$, on a un triangle équilatéral

Si $n = 4$, on a un carré,

Si $n = 5$, on a un pentagone régulier

.....

➤ si $n = 1$, on un seul point

➤ si $n = 2$, on a deux points symétriques par rapport à l'origine du repère