Inéquations trigonométriques : Exemples

Exemple 1

Soit à résoudre l'inéquation $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

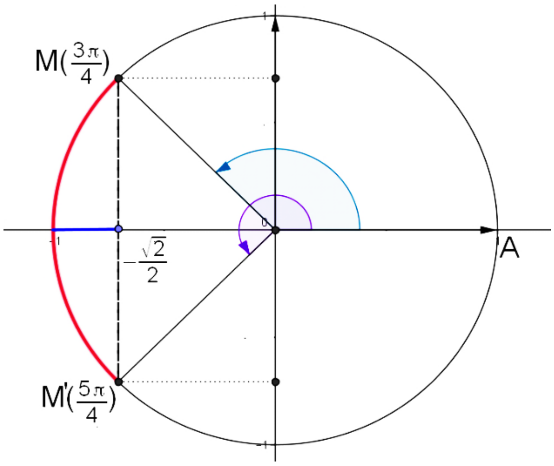
a) Résoudre l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) Placer sur le cercle trigonométrique les images de ces solutions
c) Déterminer sur le cercle les points dont les images ont pour abscisses inférieures à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) En déduire les solutions de l'inéquation

<u>Réponse</u>

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

b) On va prendre $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$ pour que l'arc soit continu



c) Les points dont les images ont pour abscisses sont les points appartenant à l'arc orienté MM' , donc si $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

d) L'ensemble des solutions est donc la réunion de tous les intervalles de la forme $\left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$ où k est un entier relatif.

Exemple 2

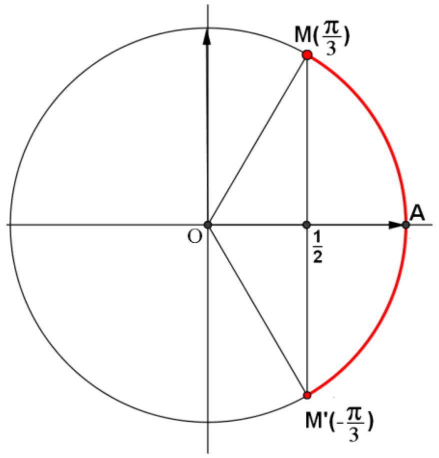
Résoudre $2\cos x - 1 > 0$

$2\cos x - 1 = 0$ équivaut à $\cos x = \frac{1}{2}$

Les solutions de cette équation dans $[-\pi ; \pi]$ sont

$\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$

Plaçons les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique.



x est solution de l'inéquation si l'image de x appartient à l'arc (orienté) $M'M$ donc si

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

L'ensemble des solutions est la réunion des intervalles de la forme $\left]-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[$ où k est une entier relatif.

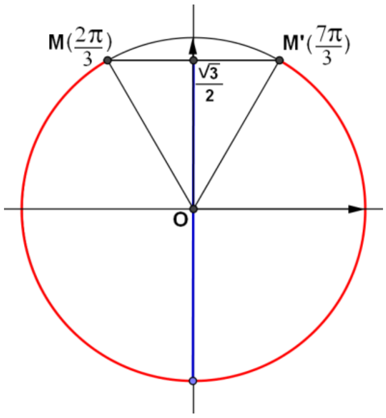
Exemple 3

Résoudre : $2\sin x - \sqrt{3} < 0$

Réponse

Résolvons d'abord l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Les solutions dans $[0 ; 2\pi]$ sont $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$.



Plaçons les images de ces solutions sur le cercle x est solution de l'inéquation si son image appartient à l'arc (orienté) MM'

donc si $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{3} + 2k\pi$

L'ensemble des solutions est la réunion des intervalles de la forme $\left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad \frac{7\pi}{3} + 2k\pi\right[$ où k est une entier relatif.

Exemple 4

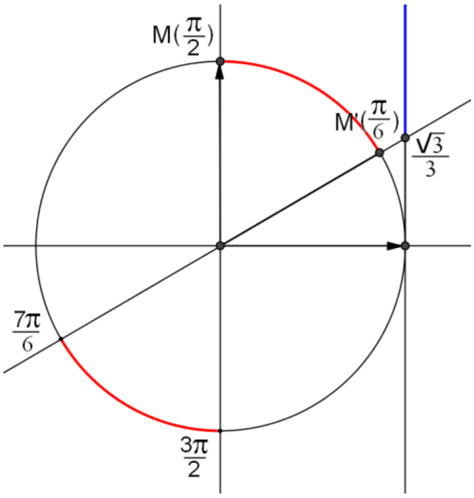
Soit à résoudre l'inéquation : $\tan x > \sqrt{3}$

Réponse

$\tan x = \sqrt{3}$ équivaut à $\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$

La solution de cette équation dans

$[0;\pi]$ est $\frac{\pi}{3}$.



x est solution de l'inéquation si son image appartient à l'arc orienté M'M.

donc si $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

Puisque $\tan(x+\pi) = \tan x$

L'ensemble des solutions est la réunion des

intervalles de la forme $\left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ où k est une entier relatif.

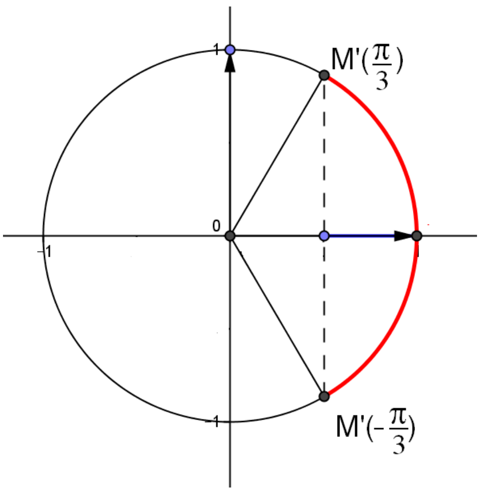
Exemple 5

Résoudre_$2\cos 3x - 1 \geq 0$

Réponse

$2\cos 3x - 1 \geq 0$ équivaut à $\cos 3x \geq \frac{1}{2}$

$\cos 3x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ si et seulement si $3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$



x est solution si et seulement si l'image de 3x appartient à l'arc M'M. donc si

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Ce qui donnent $-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$

L'ensemble des solutions est la réunion des intervalles de la forme $\left]-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \; , \; \frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right[$

où k est un entier relatif.

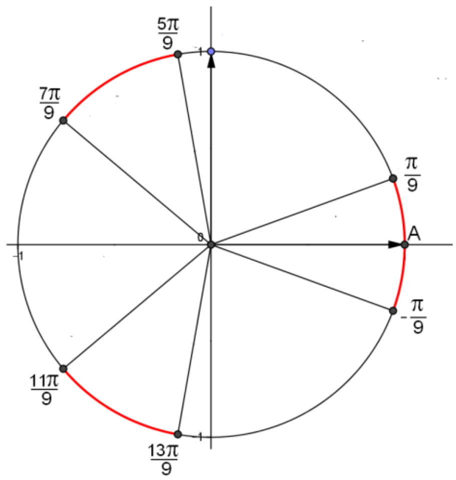
Pour k = 0, $\left]-\frac{\pi}{9} \; , \; \frac{\pi}{9}\right[$

Pour k = 1, $\left]\frac{5\pi}{9} \; ; \; \frac{7\pi}{9}\right[$

Pour k = 2, $\left]\frac{11\pi}{9} \; , \; \frac{13\pi}{9}\right[$

Pour k = 3, $\left]\frac{17\pi}{9} \; , \; \frac{19\pi}{9}\right[$

…….



Exemple 6

Résoudre_$\cos x - \sin x \geq 0$

Réponse

Transformons d'abord le premier membre S = cos x – sin x.

$$S = \sqrt{1^2+1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\sin x\right)$$

Ce qui donne $S = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ et aussi $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$, on peut écrire

$S = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Ainsi , l'inéquation s'écrit $\sqrt{2}.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ ou encore $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$.

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$ si et seulement si $x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ou $x = \frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{2}+2k\pi$.

Exemple 7

Résoudre l'inéquation $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \geq 0$ dans $[\ 0;2\pi\ ]$ et en déduire les solutions dans IR.

Réponse

Posons X = sin x, l'inéquation s'écrit $2X^2 - 3X + 1 \geq 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 1 > 0$

On a donc deux racines $X' = \dfrac{3-1}{2.2} = \dfrac{1}{2}$ et $X'' = \dfrac{3+1}{2.2} = 1$

Pour $X = \dfrac{1}{2}$, on a $\sin x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$, ce qui donne $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Pour $X = 1$, on a $\sin x = 1 = \sin\dfrac{\pi}{2}$, ce qui donne $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

L'inéquation s'écrit, en factorisant, $2(\sin x - \dfrac{1}{2})(\sin x - 1) \geq 0$

Étudions le signe dans $[\ 0;2\pi\ ]$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
2		+		+		+		+		+	
$\sin x - \frac{1}{2}$		−	0	+		+	0	−		−	
$\sin x - 1$		−		−	0	−		−	0	−	
$2(\sin - \frac{1}{2})(\sin x - 1)$		+	0	−	0	−	0	+	0	+	

L'ensemble des solutions dans $[\ 0;2\pi\ ]$ est $\left[\ 0;\dfrac{\pi}{6}\ \right] \cup \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \cup \left[\ \dfrac{5\pi}{6};2\pi\ \right]$

L'ensemble de toutes les solutions est donc

$$S = \left[\ 2k\pi\ ;\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\ \right] \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cup \left[\ \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi;2\pi + 2k\pi\ \right] k \in \mathbf{Z}$$