

Limite d'une fonction : les formes indéterminées

1. Limite d'un polynôme

La limite d'une fonction polynôme quand x tend vers l'infini, est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

2. Limite d'une fonction rationnelle

La limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur (quand x tend vers l'infini)

Exemple

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = F.I$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Si la limite d'une fonction rationnelle en x_0 est de la forme $\frac{0}{0}$, on met $x - x_0$ en facteur et on simplifie

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0} : \text{C'est une forme indéterminée.}$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$