Corrigé exercice 1 Bacc A 2014

Exercice 1

(U_n) est la suite définie par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 4$.

1.- ***Calcul de U_1 et de U_2***

- $U_1 = \frac{1}{3}U_0 - 4$

  $= \frac{1}{3}(-4) - 4$

  $= \frac{(-4) - 4(3)}{3}$

$$\boxed{U_1 = -\frac{16}{3}}$$

- $U_2 = \frac{1}{3}U_1 - 4$

  $= \frac{1}{3}(-\frac{16}{3}) - 4$

  $= \frac{(-16) - 4(9)}{9}$

$$\boxed{U_2 = -\frac{52}{9}}$$

2. (V_n) est définie par $V_n = U_n + 6$

a) $V_{n+1} = U_{n+1} + 6$.

Or $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 4$ donc $V_{n+1} = (\frac{1}{3}U_n - 4) + 6$

$V_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2$

$= \frac{1}{3}(U_n - 6)$

Ainsi $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$

(ou $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{3}$)

$V_0 = U_0 + 6 = -4 + 6 = 2$

(V_n) est donc une suite géométrique de raison $\boxed{q = \frac{1}{3}}$ et de premier terme $\boxed{V_0 = 2}$

b) ***Expression de V_n en fonction de n***

$$V_n = q^n.V_0$$

donc $V_n = (\frac{1}{3})^n.2$

Expression de U_n en fonction de n :

$V_n = U_n + 6$, Donc $U_n=V_n-6$

Ainsi $\boxed{U_n = (\frac{1}{3})^n.2 - 6}$

3.-a) Comme (V_n) est une suite géométrique de raison q, et de premier terme V_0

$$S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n = V_0 \frac{1-q^{n+1}}{1+q} \text{ avec } V_0=2 \text{ et } q = \frac{1}{3}$$

donc $S_n = 2\dfrac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 2\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$

Ainsi $\boxed{S_n = 3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}$

$$\begin{aligned} S'_n &= U_0 + U_1 + \ldots + U_n \\ &= V_0 - 6 + V_1 - 6 + \ldots. + V_n - 6 \\ &= V_0 + V_1 + \ldots. + V_n - 6 - 6\ldots. - 6 \\ &= S_n - 6(n+1) \end{aligned}$$

Alors $\boxed{S'_n = 3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] - 6(n+1)}$

b) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{S'_n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] - \frac{6(n+1)}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] - 6$$

Comme $0 < \left|\frac{1}{3}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0$, Et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S'_n = -6}$