Corrigé Exercice 1 bacc D session 2016

Exercice 1

1) P est le polynôme à variable complexe z défini par $P(z)=z^3-2z^2+(2+i)z-1-i$

a) $P(1)=1^3-21^2+(2+i)1-1-i=0$

$(1-2i)^2=1-2.2i+(2i)^2=-3-4i$

b) P(1)=0, donc 1 est une solution de l'équation P(z) = 0.

On peut alors factoriser P(z) par (z-1) : il existe des nombres a, b et c tels que $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$

En développant, on a $P(z)=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$

Par identification avec les coefficients de $P(z)=z^3-2z^2+(2+i)z-1-i$ on a :

a = 1, b-a = -2, c-b = 2+i et -c = -1-i.

Ce qui donne : a =1, b = -1 et c = 1+i

On a alors $P(z)=(z-1)(z^2-z+1+i)$

P(z)= 0 équivaut à z-1 = ou $z^2-z+1+i=0$

La première équation donne z = 1

Pour la deuxième équation, $\Delta=(-1)^2-4(1+i)=-3-4i$

D'après le résultat de la question 1) a), $\Delta=-3-4i=(1-2i)^2$

Donc 1-2i est une racine carrée de Δ.

Nous avons alors $z'=\dfrac{1-1+2i}{2}=i$ et $z''=\dfrac{1+1-2i}{2}=1-i$

Ainsi $S=\{1;i;1-i\}$

2) On considère les points A, B et C tels que $z_A = 1$, $z_B = 1-i$ et $z_C=i$

$$a=\frac{z_B}{z_C}=\frac{1-i}{i}=\frac{(1-i)(-i)}{i(-i)}$$

d'où **a = -1-i**

On a |a|= $\sqrt{((-1)^2+(-1)^2)}=\sqrt{2}$

Alors a = $\sqrt{2}(\frac{-1}{\sqrt{2}}+i\frac{-1}{\sqrt{2}})$

Soit α un argument de a, on a $\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Ce qui donne $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ (ou $\alpha=\frac{-3\pi}{4}$)

Finalement **a =** $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

et $a^4=(\sqrt{2})^4(\cos 4.\frac{5\pi}{4}+i\sin 4.\frac{5\pi}{4})$ **=** $4(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=4(-1)$

d'où $a^4 = -4$

3) S est la similitude plane directe dont l'expression complexe es z' = (1-i) z + 2i.

a) Notons Ω (ω) le centre de S, k on rapport et θ son angle.

On a :

- $\omega = \dfrac{2i}{1-(1-i)} = \dfrac{2i}{i} = 2$
- k=|1-i|= $\sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$
- θ = arg (1-i) : $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

  d'où $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

Ainsi le centre est Ω (2), le rapport est k = $\sqrt{2}$ et l'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

Ainsi S est la similitude plane de centre Ω (2), de rapport k = $\sqrt{2}$ et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

b) $S^4 = SoSoSoS$ est une similitude de centre Ω(2), de rapport $k^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$ et d'angle $4\theta = -4\dfrac{\pi}{4} = -\pi$.

C'est donc une homothétie de centre Ω(2) et de rapport - 4.

c) Construction

$z_A' - z_\Omega = -4(z_A - z_\Omega) = -4(1-2)$ donc $z_A' = 6$

$z_B' - z_\Omega = -4(z_B - z_\Omega) = -4(1-i-2)$ donc $z_B' = 6+4i$

$z_C' - z_\Omega = -4(z_C - z_\Omega) = -4(i-2)$ donc $z_C' = 10-4i$