Corrigé problème 2 Bacc C 2016

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}(x-1)\ln(1-x)\ \mathrm{si}\ x<0\\ e^{\frac{x}{2}}-x-1\ \mathrm{si}\ x\geq 0\end{cases}$

On désigne par ($\mathcal{C}$) la courbe de f.

A- 1°/ **Continuité de f en 0**

$$f(0)=e^0-0-1=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)\ln(1-x)=-1.0=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{x}{2}}-x-1=1-0-1=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$. Ainsi f est continue en 0

Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{(x-0)}=\lim_{x\to 0^-}(x-1)\frac{\ln(1-x)}{x}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$ **et** $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln\frac{(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-\frac{\ln(1+(-x))}{(-x)}=-1$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{(x-0)}=-1.(-1)=1=f'_g(0)$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{(x-0)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{x/2}-x-1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{x/2}-1)}{x}-\frac{x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{(x-0)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{x/2}-1)}{x}-1$$

Posons $X=\frac{x}{2}$. On a x = 2X ; et quand $x\to 0$ alors $X\to 0$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{(x-0)}=\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{(e^X-1)}{2X}-1$

$\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{(e^X-1)}{X}=1$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{(x-0)}=\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{(e^X-1)}{2X}-1=\frac{1}{2}-1$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{(x-0)}=-\frac{1}{2}=f'_d(0)$

par conséquent, f est dérivable à gauche et à droite en 0, mais comme $f'_d(0)\neq f'_g(0)$, elle n'est pas dérivable en 0.

2) Limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)\ln(1-x)$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\ln(1-x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}}-x-1$$

$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(-x-1)=-\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}}+(-x-1)$ est une forme indéterminée.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}-\frac{(x+1)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}-1-\frac{1}{x}\right)$$

Posons $X=\frac{x}{2}$. On a x = 2X ; et quand $x\to+\infty$, $X\to+\infty$

$\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}\right)=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{e^{X}}{2X}\right)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} -1-\frac{1}{x}=-1$ donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}-\frac{(x+1)}{x}\right)=+\infty$

b- Variations

f est définie sur $\mathbb{R}$ =] $-\infty;+\infty$ [.

- Si x < 0, $f(x)=(x-1)\ln(1-x)$.

$$f'(x)=1.\ln(1-x)+\frac{-1}{1-x}(x-1)=\ln(1-x)+1$$

Si x < 0, alors 1-x >1, donc ln(1-x) > 0. Alors f ’(x) > 0 pour tout x < 0.

D’où f est strictement croissante sur] $-\infty$; 0 [

- Si x < 0, alors $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-x-1$.

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-1$$.

f ’(x) = 0 si et seulement si $e^{\frac{x}{2}}=2$ donc si $\frac{x}{2}=\ln 2$ ou x = 2 ln2

f’(x) < 0 si x < 2 ln2, et f ‘(x) > 0 si x > 2 ln 2.

Ainsi f est strictement décroissante sur] 0 ; 2 ln 2[et f est strictement croissante sur] 2 ln 2 ; + ∞ [.

Tableau de variation

x	$-\infty$		0			2ln2		$+\infty$
f '(x)		+	1 || $-\frac{1}{2}$	−		0	+	
f	$-\infty$	↗	0	↘		1-2ln2	↗	$+\infty$

c) f est continue sur [2 ln 2 ; + ∞ [. et $f(2)=e^2-2-1=e-3<0$ et $f(3)=e^3-3-1\simeq 4{,}3-4>0$,
donc il existe un réel a de l’intervalle [2;3] tel que f(a)=0

Comme f est strictement croissante sur [2 ln 2 ; + ∞ [, elle l’est aussi sur [2;3]. Par conséquent, a est la solution unique de l’équation f(x)= 0 sur 2 ln 2 ; + ∞ [, en particulier sur [2;3].

3) Branches infinies

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})\ln(1-x)$$

Or $\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})=1$ et $\lim_{x\to-\infty}\ln(1-x)=+\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})\ln(1-x)=+\infty$.

On a alors une branche parabolique de direction asymptotique (y'y) au voisina ge de - ∞ .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}-\frac{(x+1)}{x})=\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}-1-\frac{1}{x})$$

Posons $X=\frac{x}{2}$. On a x = 2X ; et quand $x\to+\infty$, $X\to+\infty$ et donc $\lim_{X\to+\infty}(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x})=\lim_{X\to+\infty}(\frac{e^{X}}{2X})=+\infty$

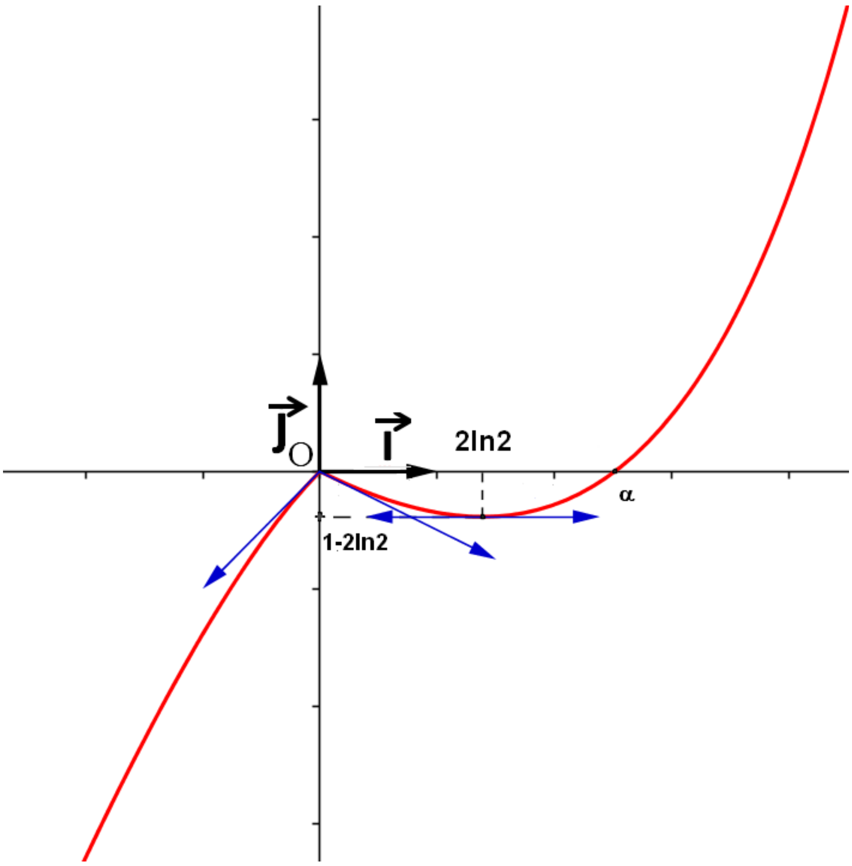
$\lim_{x\to+\infty}-1-\frac{1}{x}=-1$ donc $\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}-1-\frac{1}{x})=+\infty$

Alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}-1-\frac{1}{x})=+\infty$ On a donc une branche parabolique de direction asymptotique (y'y) au voisinage de + ∞ .

Demi-tangentes en 0

$f'_d(0)=-\frac{1}{2}$ et $f'_g(0)=1$, donc on a deux demi tangentes en 0, à gauche de pente $f'_g(0)=1$ et à droite de pente $f'_d(0)=-\frac{1}{2}$.

Courbe



B- On se propose de trouver une valeur approchée de la solution α de l'équation f(x) = 0.
On considère la fonction g définie sur] -1 , + ∞ [par g(x) = 2 ln (x+1).
1.Variation de g

g est dérivable et $g'(x)=\frac{2}{x+1}$.

g'(x) > 0 sur] -1 , + ∞ [, donc g est strictement croissante sur cet intervalle.
2. Montrons que α est solution de l'équation g(x) = x.

$\alpha\in[2;3]$ donc $\alpha\in]-1,+\infty[$.

$f(\alpha)=0$ équivaut à $e^{\frac{\alpha}{2}}-\alpha-1=0$.

Ce qui implique $e^{\frac{\alpha}{2}}=\alpha+1$
Ce qui donne $\ln(\alpha+1)=\frac{\alpha}{2}$, ou $2\ln(\alpha+1)=\alpha$

Ainsi $g(\alpha)=\alpha$,
Alors α est solution de l'équation g(x) = x.
3. $x\in[2;+\infty[$ signifie $x\geqslant 2$. Et comme g est croissante, on a $g(x)\geqslant g(2)$.
Or g(2) = 2 ln 3 > 2, donc $g(x)\geqslant 2$.
Ainsi, pour tout $x\in[2;+\infty[$, $g(x)\in[2;+\infty[$

4- (U_n) est la suite définie par $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=g(U_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

a- Montrons que quel que soit n de IN, $U_n\geqslant 2$.
Pour n = 0, $U_n=U_0=3\geqslant 2$.
Supposons que $U_n\geqslant 2$ et montrons que $U_{n+1}\geqslant 2$.
D'après le résultat de 3-, si $x\in[2;+\infty[$, alors $g(x)\in[2;+\infty[$.
Donc, comme $U_n\geqslant 2$, $g(U_n)=U_{n+1}\geqslant 2$.
Par conséquent $U_n\geqslant 2$ quel que soit l'entier naturel n

b- $g'(x)=\frac{2}{x+1}$

Pour $x\geqslant 2$, $x+1\geqslant 3$ alors . $\frac{1}{x+1}\leqslant\frac{1}{3}$ et $0<\frac{2}{x+1}\leqslant\frac{2}{3}$

d'où $|g'(x)|\leqslant\frac{2}{3}$.

c- D'après le théorème des inégalités des accroissements finis, si $|g'(x)|\leqslant M$ pour tout x appartenant à un intervalle I, alors $|g(b)-g(a)|\leqslant M|b-a|$ .quels que soient les réels a et b de I.

Comme $|g'(x)|\leqslant\frac{2}{3}$ quel que soit $x\in[2;+\infty[$ et $\alpha\in[2;+\infty[$, $U_n\in[2;+\infty[$, alors en appliquant le théorème énoncé ci-dessus, $|g(U_n)-g(\alpha)|\leqslant\frac{2}{3}|U_n-\alpha|$.

Or $g(U_n)=U_{n+1}$ et $g(\alpha)=\alpha$, donc $|U_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{2}{3}|U_n-\alpha|$.

Déduisons-en que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $|U_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Première méthode

On a . $|U_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{2}{3}|U_n-\alpha|$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$. Donc

$|U_1-\alpha|\leqslant\frac{2}{3}|U_0-\alpha|$

$|U_2-\alpha|\leqslant\frac{2}{3}|U_1-\alpha|$

……..

$|U_n-\alpha|\leqslant\frac{2}{3}|U_{n-1}-\alpha|$.

Tous les termes sont positifs, donc
En multipliant membre à membre ces n inégalités , on a

$|U_1-\alpha||U_2-\alpha|...|U_n-\alpha|\leqslant\frac{2}{3}|U_0-\alpha|\frac{2}{3}|U_1-\alpha|....\frac{2}{3}|U_{n-1}-\alpha|$

Par simplification par

$|U_1-\alpha|,|U_2-\alpha|...$ et U_{n-1} dans les deux membres de l'inégalité, on a $|U_n-\alpha|\leqslant\frac{2}{3}\frac{2}{3.}...\frac{2}{3}|U_0-\alpha|$

Puisque U_0 = 3 et $\alpha\in[2;3]$, on a $|U_0-\alpha|\leqslant 1$.

De plus, on a n inégalités, donc $\underbrace{\frac{2}{3.}\frac{2}{3.}...\frac{2}{3}}_{n}=(\frac{2}{3})^n$.

Ainsi $|U_n-\alpha|\leqslant(\frac{2}{3})^n$.

Deuxième méthode
Raisonnons par récurrence
Pour n = 0, $|U_0-\alpha|\leqslant 1$ car U_0 = 3 et $\alpha\in[2;3]$.

alors $|U_0-\alpha|\leqslant(\frac{2}{3})^0$

Ainsi l'inégalité est vérifiée pour n = 0.

Supposons que $|U_n-\alpha|\leqslant(\frac{2}{3})^n$ et montrons que $|U_{n+1}-\alpha|\leqslant(\frac{2}{3})^{n+1}$.

On a $|U_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{2}{3}|U_n-\alpha|$ et $|U_n-\alpha|\leqslant(\frac{2}{3})^n$, donc $|U_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{2}{3}|U_n-\alpha|\leqslant\frac{2}{3.}(\frac{2}{2})^n$.

Ce qui donne $|U_{n+1}-\alpha|\leqslant(\frac{2}{3})^{n+1}$.

Par conséquent, $|U_n-\alpha|\leqslant(\frac{2}{3})^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

d- Montrons que la suite (U_n) converge vers a

On a . $|U_n-\alpha|\leqslant(\frac{2}{3})^n$ et $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n=0$, donc $\lim_{n\to+\infty}|U_n-\alpha|=0$.

Ainsi (U_n) converge vers a.

<u>Le plus petit entier n_0 tel que</u> U_{n_0} <u>soit une valeur approchée de a à 10^{-1} près</u>

U_{n_0} est une valeur approchée de a à 10^{-1} près dès que $(\frac{2}{3})^{n_0}\leqslant 10^{-1}$.

$(\frac{2}{3})^{n_0}\leqslant 10^{-1}$ équivaut à $\ln(\frac{2}{3})^{n_0}\leqslant\ln 10^{-1}$

On a alors $n_0(\ln 2-\ln 3)\leqslant-\ln 10$, d'où $n_0\geq\frac{\ln 10}{\ln 2-\ln 3}\simeq 5{,}67$.

Ainsi la plus petite valeur de n_0 est 6

Partie C

Soit l'équation différentielle (E) : 2 y' - y = x -1

1) Montrons que la fonction f définie par $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-x-1$ est une solution de (E)

$f(x)=e^{\frac{x}{2}}-x-1$ donc $f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-1$

$2f'(x)-f(x)=2\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-2-e^{\frac{x}{2}}+x+1=x-1$.

Ainsi f est solution de (E).

2) Solution générale de (E)

Les solutions générales de l'équation sans second membre associée à (E) : 2 y' - y = 0 sont les fonctions définies par $y=\lambda e^{\frac{x}{2}}$ avec $\lambda\in$ IR.

Donc les solutions générales de (E) sont les fonctions φ définie par $\varphi(x)=e^{\frac{x}{2}}-x-1+\lambda e^{\frac{x}{2}}$,

ou $\varphi(x)=(1+\lambda)e^{\frac{x}{2}}-x-1$ avec $\lambda\in$ IR.