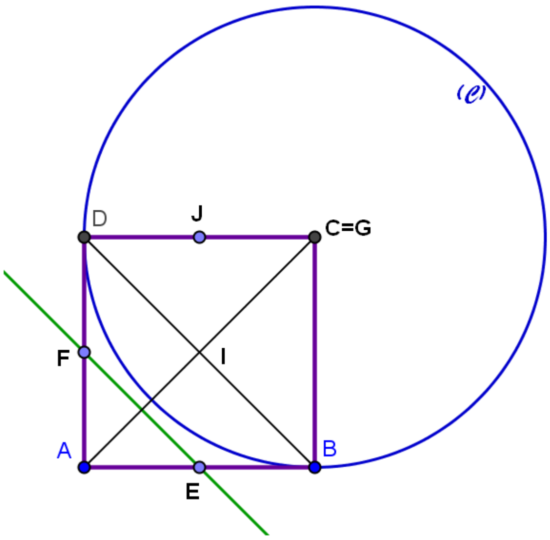
Corrigé Bacc C 2016 Problème 1

Problème 1

Les deux parties A et B sont indépendantes

On note $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et par $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$.

Partie A : Méthode géométrique



1. Soit G le barycentre de $\{(A;-1);(B;1);(D;1)\}$

Première méthode

I est le barycentre de $\{(B;1);(D;1)\}$, donc G est le barycentre de $\{(I;2);(A;-1)\}$ d'où A, I et G sont alignés.

Alors G appartient à la droite (AI)

Deuxième méthode

Comme G est le barycentre de $\{(A;-1);(B;1);(D;1)\}$, on a $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{-1+1+1}$

Ce qui donne $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}$

Or I est le milieu de [AC], donc G appartient à la droite (AI).

b) G est le barycentre de $\{(A;-1);(I;2)\}$, donc $\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AA}+2\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}$

Ainsi G = C

c) ($\mathscr{C}$) est est l'ensemble es point M tels que $2MI^2-MA^2=0$.

Montrons que B appartient à ($\mathscr{C}$), ce qui qui signifie $2BI^2-BA^2=0$

On a $2BI^2-BA^2=(\dfrac{BC}{2})^2-BA^2=2(\dfrac{BA^2+AD^2}{4})-BA^2$.

Or ABCD est un carré, donc $CA^2=AB^2+AD^2=2AB^2$,

Alors $2BI^2-BA^2=2(2\dfrac{AB^2}{4})-BA^2=AB^2-BA^2$

d'où $2BI^2 - BA^2 = BA^2 - BA^2 = 0$

Ainsi B appartient à ($\mathscr{C}$).

Comme le barycentre de $\{(I;2);(A;-1)\}$ est C, et ($\mathscr{C}$)contient B, alors ($\mathscr{C}$) est le cercle de centre C et de rayon CB.

2) Une symétrie est une rotation d'angle π, et (AC) et (BD) sont perpendiculaire et se coupent en I, alors $\sigma = S_{(AC)} o S_{(EF)}$; donc $f = S_{(AC)} o S_{(BD)} o S_{(EF)}$

Or (EF) et (BD) sont parallèles, E est le milieu de [AB], et F est le milieu de [AD], alors $S_{(BD)} o S_{(EF)} = t_{\overrightarrow{AI}} = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

D'où $f = S_{(AC)} o t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

Partie B

1) A est l'origine du repère, alors $z_A = 0$

$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB}$, donc $z_B = 1$

$\overrightarrow{AD} = 1\overrightarrow{AD}$, donc $z_D = i$

$\overrightarrow{AC} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$, donc $z_C = 1+i$

I est le milieu de [AC], donc $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

J est le milieu de [CD], donc $z_J = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{1+i+i}{2} = \frac{1}{2} + i$

2) L'expression complexe de S est z' = az+b

S(A)= I donc $a.z_A + b = z_I$

S(B) =J donc $a.z_B + b = z_J$

En soustrayant membre à membre ces deux inégalités, on a $a = \frac{z_I - z_J}{z_B} = \frac{1}{2} + i - \frac{i}{2} = \frac{i}{2}$.

Comme z_A = 0, alors $b = z_I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$S : z' = \frac{i}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$\|\frac{i}{2}\| = \frac{1}{2}$, $\arg(\frac{i}{2}) = \frac{\pi}{2}$

Soit Ω(ω) le centre de S. Alors ω vérifie $\omega = \frac{i}{2.}\omega + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

Ce qui donne $\omega = \frac{1}{5.} + \frac{3}{5}i$

Ainsi les éléments caractéristiques sont : - le centre $\Omega(\frac{1}{5.} + \frac{3}{5}i)$

- le rapport $k = \frac{1}{2}$

- l'angle $\theta=\frac{\pi}{2}$

3) (Γ_1) est le cercle de diamètre [AI] et (Γ_2) de diamètre [BJ].

a) Le centre de (Γ_1) est le milieu I_1 de [AI], soit $z_{I_1}=\frac{z_A+z_I}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$. Son rayon est $r_1=\frac{AI}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

Le centre de (Γ_2) est le milieu I_2 de [BJ], soit $z_{I_2}=\frac{z_B+z_J}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i$. Son rayon est $r_2=\frac{BJ}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

b) Montrons que Ω appartient à la fois à (Γ_1) et à (Γ_2) .

Pour cela, on va montrer que $I_1\Omega=r_1$ et $I_2\Omega=r_2$.

$\overrightarrow{I_1\Omega}$ a pour affixe $\omega-z_{I_1}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i=-\frac{1}{20}+\frac{7}{20}i$

$I_1\Omega=\sqrt{\frac{1}{400}+\frac{49}{400}}=\frac{\sqrt{2}}{4}=r_1$

$\overrightarrow{I_2\Omega}$ a pour affixe $\omega-z_{I_2}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}i=-\frac{11}{20}+\frac{2}{20}i$

$I_2\Omega=\sqrt{\frac{121}{400}+\frac{4}{400}}=\frac{\sqrt{5}}{4}=r_2$

Ainsi Ω est un point d'intersection des deux cercles (Γ_1) et à (Γ_2) .

4. a) Soit C l'image de C et K l'image de I par S.

$S:z'=\frac{i}{2}z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

Donc $z_C=\frac{i}{2}z_C+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{i}{2}(1+i)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

Ainsi $z_C=i=z_D$

De même $z_C=\frac{i}{2}z_C+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{i}{2}(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$z_K=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$

Donc $C'=D$ et $K(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i)$.

b) Montrons que les points A, Ω et K sont alignés. Pour cela, déterminons l'angle $(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{A\Omega})$.

$\frac{\omega-z_A}{z_K-z_A}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i}=\frac{4}{5}$ est un réel positif, donc $\operatorname{Arg}(\frac{\omega-z_A}{z_K-z_A})=(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{A\Omega})=2k\pi,\text{avec}\,k\in\mathbb{Z}$

Ainsi A, Ω et K sont alignés.