DENOMBREMENT

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets.

1. Arrangement

1.1 Définition

E est un ensemble de n éléments et p un entier naturel $(1 \leq p < n)$. Un **arrangement** de p éléments de E est une liste ordonnée de p éléments 2 à 2 distincts choisis parmi les n éléments de E.

Remarque : 2 arrangements de p éléments de E diffèrent l'un de l'autre
- soit par la nature de p éléments choisis,
- soit par l'ordre de ces éléments.

Exemple : Soit E={a,b,c,d}. Considérons les arrangements des 4 lettres pris 3 à 3. On a (a,b,c) $\neq$ (a,b,d), (a,b,c) $\neq$ (b,a,c).

1.2 Nombre d'arrangements : A_n^p

On peut considérer que tout arrangement s'obtient en plaçant p objets pris parmi n objets dans p cases en mettant au plus un objet dans chaque case.

n	n-1	n-2	. . .	n-p+1
1^e case	2^e case	3^e case		p^e case

Il y a n(n - 1)...(n-p+1) façons de placer les p objets.

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de n éléments (p $\leq$ n) est :

$$A_n^p = n\,(n-1)\ldots(n-p+1)$$

ex. : E ={a,b,c,d}. Le nombre d'arrangements des éléments de E pris 3 à 3 est

A_4^3 =4.3.2 = 24

1.3 Permutation. Factorielle

a) Définition : E est un ensemble de n éléments. Une permutation des éléments de E est un arrangement des n éléments de E.

Remarque : 2 permutations des éléments de E diffèrent l'une de l'autre par l'ordre des éléments.
Exemple : (a,b,c,d) $\neq$ (b,a,c,d).

Le nombre de permutations, noté P_n, d'un ensemble de n éléments est :

$P_n = A_n^n$ = n (n-1)...3.2.1.

b) Factorielle : n est un entier naturel, on désigne par n! (on lit "factorielle n") l'entier défini par :

n! = 1.2.3...(n-1).n pour n γ 0.
Par convention 0!= 1.

- On a n ! = n . (n-1) !
- Le nombre de permutation de n éléments est P_n = n!
- Autre écriture de A_n^p: $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- $A_n^0 = 1 \qquad A_0^0 = 1 \qquad A_n^n = n!$

2. Combinaison

2.1 Définition

E est un ensemble de n éléments et un entier naturel (p [n). Une **combinaison** de p éléments des n éléments de E est un sous-ensemble de p éléments de E.

Remarque : 2 combinaisons de n éléments pris p à p diffèrent l'une de l'autre par la nature des éléments.
Exemple : E={a,b,c,d}. Considérons les combinaisons des 4 lettres pris 3 à 3.
On a {a,b,c} ≠ (a,b,d), {a,b,c} = {b,a,c}.

2.2 Nombre de combinaisons : C_n^p

On obtient tous les arrangements de n objets pris p à p :

- en formant toutes les combinaisons de p éléments,
- en permutant dans chacun des C_n^p combinaisons, les p éléments qui les constituent, ce qui peut se faire de p! façons.

$A_n^p = C_n^p \cdot p\,!$

Le nombre de combinaisons de p éléments des n éléments d'un ensemble E est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

c) Propriétés

$C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = n$

pour tout n , p ($p \le n$) $\quad C_n^p = C_n^{n-p} \quad ; \quad C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

3. Tirages

Nombre de façons de tirer p objets parmi n objets ($p \le n$).
–Tirage simultané : tirer simultanément p objets parmi n objets, c'est choisir une partie de p objets. On ne tient pas compte de l'ordre. Il y a C_n^p cas possibles.
–Tirage successif sans remise : tirer successivement sans remise p objets parmi n objets, c'est choisir un arrangement de p objets. Il y a A_n^p cas possibles.

-Tirage successif avec remise : d'une urne contenant n boules, on en tire une première boule b_1 parmi les n boules, que l'on remet dans l'urne ; puis, on tire une seconde boule b_2 parmi les n boules, que l'on remet dans l'urne ; … puis, on tire une p-ième boule. Les boules b_1, b_2, …, b_p ne sont pas nécessairement distinctes. Il y a n^p cas possibles.

Exemple : *Un boîte contient 6 boules dont 4 noires et 2 rouges.*
On tire au hasard et simultanément 3 boules de la boîte.
1-Calculez le nombre de cas possibles.
2- Calculez le nombre de tirages favorables à l'événement :
A : " avoir exactement 1 rouge",
B : " avoir des boules de même couleur",
C : " avoir au moins 1 rouge"
3- Reprenez les questions 1- et 2- pour des tirages
-successifs sans remise,
-successifs avec remise.