CORRECTION BACC 2011

EXERCICE 1 :

1°/ Soit P le polynôme à variable complexe z définie par :
P(z) = $z^3 - (1 - 2i)\, z^2 + (1 - 4i)\, z + 3 - 6i$
a) Calcul de P(–3i). Interprétation de résultat
$P(-3i) = (-3i)^3 - (1-2i)(-3i)^2 + (1-4i)(-3i) + 3 - 6i$ $P(-3i) = 27i + 9 - 18i - 3i - 12 + 3 - 6i$
$P(-3i) = 0$ z = -3i est solution de P(z) = 0.

b) Démonstration que l'équation P(z) = 0 admet une solution réelle α que l'on déterminera.
Soit z = α solution de l'équation.
$$\alpha^3 - \alpha^2(1-2i) + \alpha(1-4i) + 3 - 6i = 0$$
$$\alpha^3 - \alpha^2 + 2\alpha^2 i + \alpha - 4\alpha i + 3 - 6i = 0$$
$$(\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 3) + i(2\alpha^2 - 4\alpha - 6) = 0$$
$$\begin{cases} \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 3 = 0 \\ 2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0 \end{cases}$$
$$2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16$$
$$\begin{cases} \alpha' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ \alpha'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Vérification : $(-1)^3 - (-1)^2 - 1 + 3 = 0$
et $(3)^3 - (3)^2 + 3 + 3 = 33 - 9 = 24 \quad 24 \neq 0$
L'équation P(z) admet une solution réel

$\boxed{\alpha = z_2 = -1}$

$$P(z) = (z-\beta)(z+3i)(z+1)$$

c) Calcul de nombre complexe β tel que :
P(z) = (z – β) (z + 3i) (z + 1) $P(z) = (z-\beta)(z^2 + z + 3iz + 3i)$
$$P(z) = z^3 + z^2 + 3iz^2 + 3iz - \beta z^2 - \beta z - 3iz\beta - 3i\beta$$
$$P(z) = z^3 + z^2(1 + 3i - \beta) + z(3i - \beta - 3i\beta) - 3i\beta = 0$$

Par identification

$$\begin{cases} 1+3i-\beta=-1+2i \\ 3i-\beta-3i\beta=1-4i \\ -3i\beta=3-6i \end{cases}$$

$-3i\beta=3-6i$

$$\beta=\frac{(6i-3)(i)}{3(i)^2}=\frac{6i-3}{3i}$$

$$\beta=\frac{6+3i}{3}=2+i$$

$\beta=2+i$

Verification de l'équation (1)

1+3i-(2+i) =1+3i-2-i= -1+2i

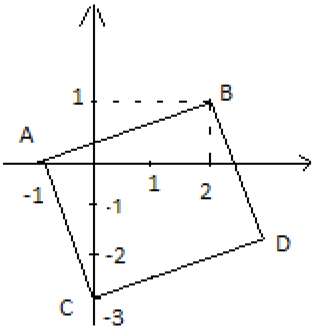
$\beta=2+i$ Donc P(z) peut s'écrit :

$\boxed{P(z)=(Z-2-i)(Z+3i)(Z+1)}$

2°/ Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A=-1$; $z_B=2+i$ et $z_C=-3i$

a) Représentation graphique



b) On pose $Z=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

- Le module et l'argument de Z

$$Z=\frac{2+i+1}{-3i+1}=\frac{3+i}{1-3i}=\frac{(3+i)(1+3i)}{1-(3i)^2}\quad Z=\frac{3+9i+i-3}{1+9}=\frac{10i}{10}=i$$

$\boxed{z=i}$

$|Z|=1$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta&=\frac{a}{|z|}=\frac{0}{1}=0 \\ \sin\theta&=\frac{b}{|z|}=\frac{1}{1}=1 \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{Z=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]}$$

La nature du triangle ABC

AB =Z_B-Z_A = 2 + i + 1 = 3 + i

AC = A_C-Z_A=-3i + 1 = 1 – 3i

$|AB| = \sqrt{(3)^2 + 1} = \sqrt{10}$

$|AC| = \sqrt{1 + (3)^2} = \sqrt{10}$

(ABC) est un triangle équilatérale et rectangle en A.

3°/ Détermination de l'affixe du point D pour que ABDC soit un parallélogramme.

$AB = CD \Leftrightarrow$ Z_B – Z_A = Z_D - Z_C

$2 + i + 1 = Z_D + 3i$

$Z_D = 2 + i + 1 - 3i = 3 - 2i$

$\boxed{Z_D = 3 - 2i}$

EXERCICE 2 :

Un panier contient 10 jetons indiscernables au toucher dont la répartition suivant la lettre et la couleur est donnée par le tableau ci-dessous :

Couleurs / Lettres	Jaunes	Bleus	Noirs
K	1	2	3
L	2	1	1

1) On tire au hasard et simultanément 3 jetons du panier.

Calcul de la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Avoir 3 jetons de même lettre »

B : « Avoir au plus 2 jetons jaunes »

2) On tire successivement sans remise 3 jetons du panier.

a – Détermination de nombre de tirages possibles.

b – Calcul de la probabilité de chacun des événements suivants :

C : « Avoir aucun jeton portant la lettre L »

D : « Avoir exactement 3 jetons de même lettre et de même couleur ».

N.B : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

PROBLEME :
PARTIE A
Soit f la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\ln x-x+1$
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'unité 2 cm.

1°/ a) Calcul de la $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x-x+1)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1}$

b) Démonstration que pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[\quad f(x)=x\left(\ln x-1+\frac{1}{x}\right)$

$f(x)=x\ln x-x+1=x\left[\ln x-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right]$

$\boxed{f(x)=x\left(\ln x-1+\frac{1}{x}\right)}$

Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln x-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ Branche Infinie

c) Déduction Interprétation graphiquement

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\ln x-1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty}$

La courbe (C) admet une Branche Parabolique de Direction Asymptotique à l'axe y'oy.

2°/ a) Calcul de la dérivée $f'(x)$ $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}x-1$

$=\ln x+1-1=\ln x$

$\boxed{f'(x)=\ln x}$

b) Etude de signe de $f'(x)$

$f'(x)\rangle 0\Leftrightarrow \ln x\rangle 0=\ln 1$

$x\rangle 1$

$f'(x)\langle 0 \quad\Leftrightarrow x\langle 1$

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	$-\infty$	-	0	+	
f(x)	1	↘	0	↗	$+\infty$

f'(0) = ln0 = $-\infty$
f(1) = 1ln1 – 1 + 1 = 0

3°/ a) Détermination des coordonnées du point A sur lequel la tangente (T) à (**C**) en ce point est parallèle à la droite (D) : $y = x$

$$f'(x_0) = 1$$

$$f'(x) = \ln x \Leftrightarrow f'(x_0) = 1$$
$$\Leftrightarrow \ln x_0 = 1$$
$$\Leftrightarrow \ln x_0 = \ln e$$

$$x_0 = e$$

$$y_0 = e\ln e - e + 1 = e - e + 1 = 1$$

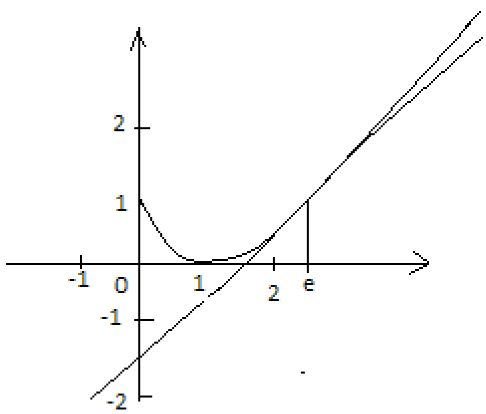
$$\boxed{A(e,1)}$$

b) Equation de la tangente (T′) à (C) au point d'abscisse $x_O = e$

$$\boxed{y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)} \qquad x_0 = e$$

$$f'(x) = \ln x$$
$$f'(e) = \ln e = 1$$
$$f(e) = e\ln e - e + 1$$
$$= e - e + 1 = 1$$
$$y = (x - e) + 1 = x - e + 1$$

$$\boxed{(\Gamma) = y = x - e + 1}$$



4°/ Courbe (T′) et (**C**) dans un même repère

5°/ Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\mathrm{F}(x)=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+x$$

a) Démonstration que F(x) est une primitive de f(x) sur $]0\,;+\infty[$

On dérive F(x) :

$$F'(x)=\frac{2x}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+1$$

$$=x\ln x-\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}+1=x\ln x-\frac{2x}{2}+1$$

$$\boxed{F'(x)=x\ln x-x+1=f(x)}$$

F(x) est primitive de f(x)

b) Calcul, en cm², l'aire (A) du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe $(x'ox)$ et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$

$$A=\int_1^e f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+x\right]_1^e$$

$$=\frac{e^2}{2}\left(\ln e-\frac{3}{2}\right)+e-\left[\frac{1}{2}\left(\ln 1-\frac{3}{2}\right)+1\right] \qquad =\frac{e^2}{2}\left(1-\frac{3}{2}\right)+e-\left[-\frac{3}{4}+1\right]$$

$$=\frac{e^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+e-\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{e^2}{4}+e-\frac{1}{4}$$

$$\boxed{A=\left(e-\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)*4cm^2=2{,}51[cm^2]}$$

On donne : e = 2,7 ; e^2 = 7,3 ; $\ln 2=0{,}7$.

PARTIE B

1°/ On considère la suite numérique (U_n) $n\in\mathrm{IN}$ définie par :

$$\mathrm{U}_n=\frac{2n+3}{n+1}$$

a) Calcul de U_0 et U_1

$$U_0=\frac{0+3}{0+1}=3$$

$$U_1=\frac{2+3}{1+1}=\frac{5}{2}$$

$$\boxed{U_0=3 \qquad U_1=\frac{5}{2}}$$

c) Expression de U_{3n} en fonction de n

$$U_{3n} = \frac{2(3n)+3}{3n+1} = \frac{6n+3}{3n+1}$$

$$\boxed{U_{3n} = \frac{6n+3}{3n+1}}$$

2°/ Soit la suite géométrique (V_n) n∈IN définie par : $\frac{V_{16}}{V_{12}} = 81$ Vérifier que la raison $q = 3$

$$\frac{V_{16}}{V_{12}} = 81$$

On a 2 systèmes de deux équations à 2 inconnues

$$\left.\begin{array}{l} V_{16} = q^{16}V_0 \\ V_{12} = q^{12}V_0 \end{array}\right\}$$

Division membre à membre

$$\frac{V_{16}}{V_{12}} = \frac{q^{16}V_0}{q^{12}V_0} = q^{16-12} = q^4$$

$$q^4 = 81 \Leftrightarrow q = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3*3*3*3} = 3$$

$$\boxed{q = 3}$$
