CORRECTION BACC 2010

EXERCICE 1

Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{3\pi}{4}$ tel que $|z| = 2\sqrt{2}$

1). a) Ecriture de z sous la forme trigonométrique.

Forme polaire de Z: $Z = \left[2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Forme trigo de Z : $\boxed{Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$

b) La partie réelle et la partie imaginaire de z^4.

$$Z^4 = \left[2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]^4 = \left[\left(2\sqrt{2}\right)^4, \frac{12\pi}{4}\right] = [64, 3\pi]$$

$$Z^4 = 64(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 64(-1 + oi) = -64$$

$$\boxed{R_{Z^4} = -64 \qquad \mathrm{Im}_{Z^4} = 0}$$

c) Résolution dans IC, l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(8) = -16$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm 4i$$

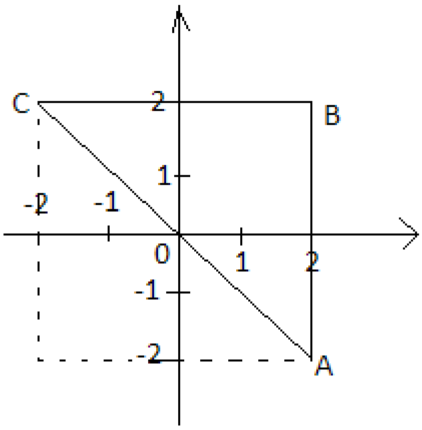
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 - 4i}{2} = 2 - 2i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 + 4i}{2} = 2 + 2i$$

$$\boxed{S = \{2 - 2i, 2 + 2i\}}$$

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé **R** $= (O, \vec{u}, \vec{v})$,
on donne les points A,B et C d'affixes respectives $z_A = 2 - 2i$; $z_B = 2 + 2i$ et $z_c = -2 + 2i$.

a) En placement des points A, B et C dans ce repère.



b) On pose $\mathbf{Z}=\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En utilisant l'argument de **Z** et le module de **Z**, détermination de la nature du triangle ABC.

$$Z=\frac{2-2i-2-2i}{-2+2i-2-2i}=\frac{-4i}{-4}=i$$

$$|Z|=1$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{a}{\rho}=\frac{0}{1}=0\\ \sin\theta&=\frac{b}{\rho}=\frac{1}{1}=1\end{aligned}\right\}\qquad \theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$AB=Z_B-Z_A=2+2i-2+2i=4i$ $\qquad |AB|=4$ $\;BC=Z_C-Z_B=-2+2i-2-2i=-4$

$|BC|=4$ AB = BC = 4

$\boxed{\text{(ABC) triangle rectangle, équilatérale.}}$

c) Constriction dans le repère **R ,** l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que $\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right|=1$

Soit Z= x + iy

$$\left|\frac{x+iy-2+2i}{x+iy+2-2i}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{(x-2)+i(2+y)}{(x+2)+i(y-2)}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y+2)}}{\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y+2)}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+4+4y+y^2=x^2+4x+4+y^2-4y+4$$

$$\Leftrightarrow -4x+4+4+4y-4x-4+4y-4=0$$

$$\Leftrightarrow -8x+8y=0$$

$$\Leftrightarrow -x+y=0 \qquad \Rightarrow\ y=x$$

L'ensemble des points est une droite d'équation y = x (Première bissectrice)

<u>EXERCICE</u> 2

Un bassin contient 10 poissons indiscernables au toucher dont 5 carpes, 2 « tilapia » et 3 poissons rouges.

1) <u>On prend au hasard et simultanément 3 poissons du bassin</u>.

a) Calcul de nombre de cas possibles.

Ω Ensemble de cas possible

$n(\Omega) = C_{10}^{3} = 120$ $\boxed{\Omega = 120}$

b) Calcul de la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir trois carpes » $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

$\boxed{P(A) = \frac{1}{12}}$

B :« obtenir exactement un « tilapia »

$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{C_2^1 * C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{2*28}{120} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$

$\boxed{P(B) = \frac{7}{15}}$

C :« obtenir aucun poisson rouge ».

$P(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120}$ $\boxed{P(C) = \frac{7}{24}}$

2) On tire successivement avec remise 4 poissons du bassin.

Calcul de la probabilité de chacun des évènements suivants :

D : « obtenir quatre « tilapia » ».

$P(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega')}$

$Card(\Omega') = A_{10}^4 = 10^4 = 10000$

$Card(D) = 2^4 = 16$

$P(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega')} = \frac{16}{10000} = \frac{8}{5000} = \frac{4}{2500}$

$\boxed{P(D) = \frac{4}{2500}}$

E : « obtenir dans l'ordre deux carpes aux deux premiers tirages et un « tilapia » au dernier tirage ».

$Card(E) = 5*5*3*2 = 25*6 = 150$

$P(E) = \frac{150}{10000} = \frac{15}{1000}$ $\boxed{P(E) = \frac{3}{200}}$

<u>N.B.</u> : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

PROBLEME

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x)=e^{2x}-e^{x}$. (C) désigne la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé **R** $=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$d'unité 4cm.

1) a) Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-e^{x}\right)=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=0}$$

Conclusion pour la courbe (C) : l'axe y'oy est Asymptote de la courbe au voisinage de -∞.

b) Démonstration de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty \quad \text{BI}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}-e^{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x}=+\infty$$

La courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe y'oy au voisinage de +∞

2)a) Preuve de pour tout réel x ; $f'(x)$ peut s'écrire $f'(x)=e^{x}(2e^{x}-1)$. Où f ' est la fonction dérivée de f .

$$f'(x)=2e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(2e^{2x}-1\right) \qquad \boxed{f'(x)=e^{x}\left(2e^{2x}-1\right)}$$

b) Etude de signe de $f'(x)$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{2x}-1>0$

$\Leftrightarrow 2e^{x}>1$

$\Leftrightarrow e^{x}>\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln e^{x}>\ln\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x>\ln 1-\ln 2$

$\Leftrightarrow x>-\ln 2$

c) <u>Le tableau de variation de</u> f .

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

f(-ln2)=-1/2

-ln2=-0.6

3) <u>Justification de la courbe (C) passe par les points</u> $A\left(-\ln 2 ; -\frac{1}{4}\right)$ et $B\left(-2\ln 2 ; \frac{-3}{16}\right)$

<u>On calcul</u> f(-ln2)

$$f(-\ln 2) = e^{2(-\ln 2)} - e^{\ln\frac{1}{2}}$$

$$f(-\ln 2) = e^{2\left(\ln\frac{1}{2}\right)} - e^{\ln\frac{1}{2}}$$

$$f(-\ln 2) = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2} - e^{\ln\frac{1}{2}} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} - e^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$f(-\ln 2) = -\frac{1}{4} = y_A$$

Donc la courbe (C) passe par A.

<u>On calcul</u> f(-2ln2)

$$-2\ln 2 = 2\ln\frac{1}{2} = \ln\frac{1}{4}$$

$$f\left(\ln\tfrac{1}{4}\right) = e^{2\ln\frac{1}{4}} - e^{\ln\frac{1}{4}} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)^2} - e^{\ln\frac{1}{4}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4}$$

$$f(-2\ln 2) = -\frac{3}{16}$$ La courbe (C) passe par B.

4) <u>Démonstration de la courbe(C) admet un point d'inflexion I dont- on précisera les coordonnées.</u>

La courbe(C) admet un point d'inflexion I si

f''(x) = 0

$$f''(x) = e^x\left(2e^x - 1\right) + (2e^x)\left(e^x\right) = e^x\left(2e^x - 1 + 2e^x\right)$$

$$f''(x) = e^x\left(4e^x - 1\right)$$

$$f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4e^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln 4 = \ln\frac{1}{4}$$

Calcul de f(-ln4)

$$f(-\ln 4) = f(\ln \tfrac{1}{4})$$

$$f(-\ln 4) = e^{2\ln\frac{1}{4}} - e^{\ln\frac{1}{4}}$$

$$f(-\ln 4) = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)^2} - e^{\ln\frac{1}{4}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4}$$

$$f(-\ln 4) = \frac{1-4}{16} = \frac{-3}{16}$$

$$\boxed{I\left(\ln\tfrac{1}{4}, \frac{-3}{16}\right) \quad \text{ou} \quad I\left(-2\ln 2, \frac{-3}{16}\right)}$$

5) <u>Détermination d'une équation de la tangente (T) à la courbe (**C**) au point 0</u>

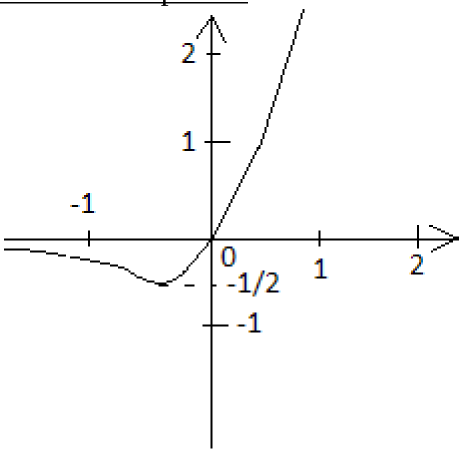
$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$f'(x_0) = f'(0) = e^0(2^{e0} - 1) = 1$

$f(x_0) = f(0) = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$

$\boxed{y = x}$

6) <u>Traçage des (T) et (C) dans le même repère **R**</u>



7) <u>Calcul, en cm², l'aire A du domaine plan</u> délimité par la courbe (**C**), l'axe des abscisses et les droites d' équations $x = -\ln 2$ et $x = 0$.

On donne e≈ 2,7, ln2 ≈ 0,7.

$$x = -\ln 2 = \ln\tfrac{1}{2}$$

$$A = \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx = \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} \left(e^{2x} - e^{x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^{x}\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{0}$$

$$A = \frac{1}{2}e^0 - e^0 - \left(\frac{1}{2}e^{2\ln\frac{1}{2}} - e^{\ln\frac{1}{2}}\right)$$

$$A = -\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}e^{\ln\frac{1}{4}} + \tfrac{1}{2} = 1 - 1 - \frac{1}{2}e^{\ln\frac{1}{4}}$$

$$A = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{8} * 4\left[cm^2\right] = -0,5\left[cm^2\right]}$$

PARTIE B

1) Vérification de $2e$ est la solution de l'équation $\ln x = 1 + \ln 2$.

ln(2e) =l n2+lne = 1 + ln2

x = 2e est la solution de l'équation lnx = 1 + ln2.

2) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \ln(U_{n+1}) = 1 + \ln(U_n) \end{cases}$.

a) Démonstration de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q = e

(U_n) est suite géométrique $\Leftrightarrow \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = q$

$\ln(U_{n+1}) = 1 + \ln(U_n)$

$U_{n+1} = ee^{\ln U_n} = eU_n \Rightarrow \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = e = q$

(U_n) suite géométrique de raison q= e et de première terme U_0 = 2

b) On pose $S_n = U_0 + U_1 + ...+ U_{n-1}$.

Nombre de terme = n - 1- 0 + 1= n

$$\boxed{S_n = \frac{2(1-e^n)}{1-e}}$$

Démonstration de $S_5 = 2(e^4 + e^3 + e^2 + e + 1)$.

$$S_5 = \frac{2(1-e^5)}{1-e}$$

Division Euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 1 - e^5 & 1 - e \\ \underline{1 - e} & \hline e - e^5 & 1 + e + e^2 + e^3 + e^4 \\ \underline{e - e^2} & \\ e^2 - e^5 & \\ \underline{e^2 - e^3} & \\ e^3 - e^5 & \\ \underline{e^3 - e^4} & \\ e^4 - e^5 & \\ \underline{e^4 - e^5} & \\ 0 - 0 & \end{array}$$