CORRECTION BACC 2009

EXERCICE I

Le plan complexe (**P**) est rapporté à un repère orthonormé **R** $=(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1cm.

1) Résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^2-(6-i)z+11-3i=0.$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (6-i)^2 - 4(1)(11-3i) = 36 - 12i - 1 - 44 + 12i$

$\Delta = -9$

$$Z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+6-i-3i}{2}=\frac{6-4i}{2}=3-2i$$

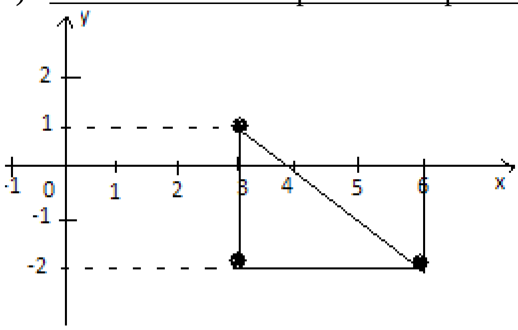
$$Z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+6-i+3i}{2}=\frac{6+2i}{2}=3+i$$

$$\boxed{S=\{3-2i;3+i\}}$$

2) On note A, B et C les points d'affixes respectives :

a= 3+ i ; b = 3 – 2i et c = 6– 2i.

a) On Place dans le repère I**R** les points A, B et C



b) On pose : $Z=\frac{a-b}{c-b}$.

Détermination de module et argument de Z.

$$Z=\frac{a-b}{c-b}=\frac{3+i-3+2i}{6-2i-3+2i}=\frac{3i}{3}=i$$

$|Z|=1$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{a}{\rho}=\frac{0}{1}=0\\ \sin\theta=\frac{b}{\rho}=\frac{1}{1}=1\end{array}\right\}\qquad \theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

Forme polaire : Z=[1, $\frac{\pi}{2}$]

Sous forme trigo

$$\boxed{Z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}$$

a- Déduction de la nature du triangle ABC.

Calcul de $|BA|,|BC|,|AC|$

$BA = Z_A - Z_B = 3 + i - 3 + 2i = 3i$

$BC = Z_C - Z_B = 6 - 2i - 3 + 2i = 3$

$AC = Z_C - Z_A = 6 - 2i - 3 - i = 3 - 3i$

$|BA| = 3$

$|BC| = 3$

$|AC| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

Le triangle (ABC) est triangle rectangle en B, équilatérale.

c) Détermination l'affixe du point D tel que le ABCD soit quadrilatère parallélogramme.

ABCD soit un carré : BC =AD

$Z_C - Z_B = Z_D - Z_A$

$6-2i -3 + 2i = Z_D -3 - i$

$Z_D = 6 - 2i - 3 + 2i + 3 + i = 6 + i$

$\boxed{Z_D = 6 + i}$

EXERCICE II

N.B. : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une trousse contient 2 stylos verts, 3 stylos rouges et 5 stylos bleus. Chaque stylo a la même probabilité d'être tiré.

2 verts : 1,1

3 rouges : 1, 2,3

4 blanches : 1, 2, 3,4

1)On tire au hasard et simultanément 3 stylos de la trousse.

Calcul de la probabilité de chacun des événements suivants :

$Card\Omega : C_9^3 = 84$ $\boxed{Card\Omega : 84}$

A « tirer 3 stylos de couleurs différentes »

Une urne contient 9 boules

A{2v et 1$\overline{v}$ ou 3b ou 3r}

$$P(A) = \frac{C_2^2 C_4^1 + C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{1*4+4+1}{84} = \frac{3}{28}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{3}{28}}$$

B « tirer au moins un stylo vert »

2)On tire successivement sans remise 3 stylos de la trousse.
a) Détermination de nombre de cas possibles.
b) Calcul de la probabilité des événements suivants :
C « tirer 3 stylos de même couleur»
D « tirer 2 stylos rouges exactement»

PROBLEME

I – Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$f(x) = -2 + \frac{1}{x} + 2\ln x.$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé
R $=(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1)a) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{1}{x}+2\ln x\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2\ln x}{x}\right]=0$$

Interprétation de résultat : La courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe x'ox

b) <u>Démonstration de</u> $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(-2+\frac{1}{x}+2\ln x\right)=+\infty-\infty FI$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left[-2x+1+2x\ln x\right]=+\infty$$

Interprétation de résultat. x=0 est asymptote vertical.

2)a) <u>Démonstration pour tout</u> $x>0\ ;\ f'(x)=\frac{2x-1}{x^2}$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{-1+2x}{x^2}\qquad \boxed{f'(x)=\frac{2x-1}{x^2}}$$

b) <u>Le tableau de variation de f.</u>

$2x-1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

x	0		½		+∞
f'(x)		-	0	+	
f(x)	+∞	↘	-2ln2	↗	+∞

$f(1/2) = -2+\dfrac{1}{\frac{1}{2}}+2\ln\dfrac{1}{2} = -2+2-2\ln 2 = -\,2\ln 2 = 1.38$

c) <u>Démonstration que la courbe (**C**) admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.</u>

Il existe un point d'inflexion si f''(x) = 0

$f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$

$U = 2x - 1 \qquad U' = 2$

$V = x^2 \qquad V' = 2x$

$f''(x) = \dfrac{U'V-V'U}{V^2} = \dfrac{2(x^2)-2x(2x-1)}{x^4} = \dfrac{2(-x+1)}{x^3}$ f''(x) = 0 $\Leftrightarrow$ -x + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 1

$f(1) = -2 + 1 + 2\ln 1 = -1$

$\boxed{I(1,-1)}$

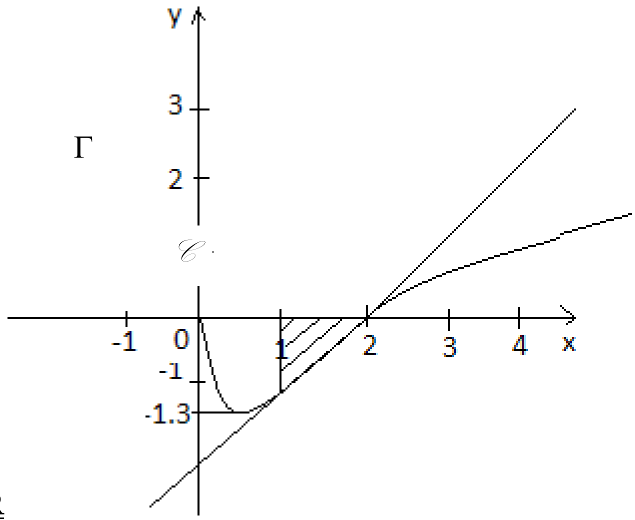
d) <u>Détermination une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A (1;-1)</u>

$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$f'(1) = \dfrac{2-1}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$y = 1(x-1)-1 = x - 1 - 1 = x - 2$

(Γ) $\boxed{y = x - 2}$



3) Construction de (T) et (C) dans **R**

4) Soit G la fonction définie sur]0 ; + ∞[par G(x) = (2x + 1) ln(x) – 4x.

a) Démonstration que G est une primitive de f sur]0 ; + ∞[.

$$G'(x) = 2\ln x + \frac{1}{x}(2x+1) - 4 \qquad G'(x) = 2\ln x + \frac{2x+1-4x}{x}$$

$$\boxed{G'(x) = 2\ln x + \frac{1}{x} - 2 = f(x)}$$

G(x) est primitive de f(x).

b) Calcul en cm², l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 2.

$$A = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(-2 + \frac{1}{x} + 2\ln x\right)dx \quad A = \left[(2x+1)\ln x - 4x\right]_1^2$$

$$A = \left[(4+1)\ln 2 - 8 - \left[3\ln 1 - 4\right]\right]$$

$$A = (5\ln 2 - 4)4[cm^2]$$

$$\boxed{A = -2.13[cm^2]}$$

II – Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{5}{6}$ pour tout entier naturel n et $U_o = 2$.

1) Calcul de U_1 et U_2.

$$U_1 = \frac{1}{2}U_0 - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}2 - \frac{5}{6} = \frac{6-5}{6}$$

$$U_1 = \frac{1}{6}$$

$U_2 = \frac{1}{2}U_1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1-10}{12} = \frac{-9}{12}$

$$U_2 = \frac{-3}{4}$$

$$\boxed{U_1 = \frac{1}{6} \quad U_2 = \frac{-3}{4}}$$

2) Soit $(V_n)_{n \in IN}$ la suite définie par
$V_n = 3U_n + 5$, pour tout n $\in$IN.

a) D<u>émonstration que $(V_n)_{n \in IN}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0 .</u>

Calcul de V_{n+1}

$V_{n+1} = 3U_{n+1} + 5 = 3\left[\frac{1}{2}U_n - \frac{5}{6}\right] + 5$

$V_{n+1} = \frac{3}{2}U_n - \frac{15}{6} + 5 = \frac{3}{2}U_n + \frac{15}{6} \quad V_{n+1} = \frac{3U_n}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(3U_n + 5)$

Calcul de $\frac{V_{n+1}}{V_n}$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{2}$

(V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme :

$V_0 = 3U_0 + 5 = 3(2) + 5 = 6 + 5 = 11.$

b) <u>Expression de V_n en fonction de n et U_n en fonction de n.</u>

$V_n = q^n V_0 = 11\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\boxed{V_n = 11\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

c<u>) Calcul de $\lim_{n \to +\infty} U_n$.</u>

$\lim_{x \to +\infty} U_n = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{11}{3.2^n} - \frac{5}{3}\right] = -\frac{5}{3} \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} U_n = -\frac{5}{3}}$

d) <u>On pose</u> $\underline{S = V_o + V_1 + \ldots + V_{99}}$.

Preuve de $S = 11\left(2 - \frac{1}{2^{99}}\right)$

On donne $\ln 2 \approx 0{,}7$

$$S = \frac{V_0\left(1 - q^{nb\,\mathrm{de}\,Tr}\right)}{1-q} = \frac{11\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{11\left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right)}{\frac{2-1}{2}} = \frac{11\left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{11}{1} * \frac{2}{1}\left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right) = 11\left(2 - \frac{2}{2^{100}}\right) = 11\left(2 - \frac{1}{2^{99}}\right)$$

$$\boxed{S = 11\left(2 - \frac{1}{2^{99}}\right)}$$
