CORRECTION BACC 2008

EXERCICE 1 NOMBRES COMPLEXES

On considère, dans IC, le polynôme Q défini par
$Q(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$.

1 -a)Calcul de Q(3). Interprétation ce résultat.

$Q(3)=3^3 -3(3)^2 + 4(3) -12 = 27-27 + 12 - 12 = 0$

$Q(3) = 0$ donc $\boxed{z_1 = 3}$ est racine de Q(z).

b) Détermination des nombres réels m et n tels que :

$Q(z) = (z - 3)(z^2 + mz + n)$.

$Q(z) = z^3+mz^2 + nz -3z^2 -3mz -3n$

$Q(z) = z^3 + (m-3)z^2 + (n-3m)z - 3n$

Par identification :

$$\begin{cases} m-3 = -3 & \Rightarrow \quad m = 0 \\ n - 3m = 4 & \\ -3n = -12 & \Rightarrow \quad n = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{Q(z) = (z-3)(z^2+4)}$$

c)Résolution, dans IC, l'équation : $Q(z) = 0$.

$Q(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 3)(z^2 + 4) = 0$

$\Leftrightarrow z - 3 = 0$ ou $z^2 + 4 = 0$

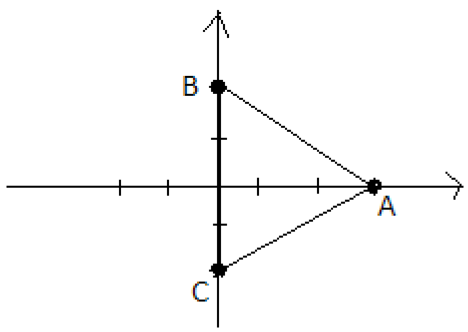
$\Leftrightarrow z = 3$ ou $z^2 = -4$

$\Leftrightarrow z = 3$ ou $z = \pm 2$

$$\boxed{S=\{-2i\,;\,2i\,;\,3\}}$$

2 -Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives (3) ; (2i) et (– 2i).

a)Emplacement des points A, B et C.



b) Calcul de $|z_B - z_A|$ et $|z_C - z_A|$.

$$|z_B - z_A| = |2i - 3| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|z_C - z_A| = |-2i - 3| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \quad \text{Donc}$$

$$|z_C - z_A| = |z_B - z_A| = \sqrt{13}$$

c) Déduction de la nature du triangle ABC.
(ABC) est triangle équilatérale

EXERCICE 2 PROBABILITE
Une urne contient 9 jetons indiscernables au toucher et numérotés de 21 à 29. Le jeu consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1 – Détermination de nombre de tirages possibles.

$Card\Omega = C_9^3 = 84$ $\boxed{\text{Card } \Omega = 84}$

2 – Calcul de la probabilité de chacun des événements suivants :
A : ″deux et deux seulement des numéros sortis sont impairs″.
A{2(imp)}
A{2(imp) et 1(paire)}

$$P(A) = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^3} = \frac{10*4}{84} = \frac{10}{21} \qquad \boxed{P(A) = \frac{10}{21}}$$

B : ″les trois numéros sortis sont tous impairs″.
B{3(imp)}

$$P(B) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42} \qquad \boxed{P(B) = \frac{5}{42}}$$

C : ″le produit des trois numéros sortis est égal à 12 075″.
C{21 et 23 et25}

$$P(C) = \frac{C_1^1 C_1^1 C_1^1}{C_9^3} = \frac{1}{84} \qquad \boxed{P(C) = \frac{1}{84}}$$

PROBLEME FONCTION ET SUITE
g est la fonction numérique définie sur IR par

$$g(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

On désigne par (**C**) sa courbe représentative dans un plan (**P**) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A

1 -Démonstration de g est une fonction impaire.

$$g(-x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$

$$g(-x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=-\frac{\left(1-e^x\right)}{1+e^x}$$

g(-x) = - g(x)

Interprétation graphique de résultat.

g(x) est impair. La courbe (C) est symétrique par rapport au centre de symétrique.

2 -a) Détermination des deux réels c et d tels que pour tout réel x : $g(x)=c+\frac{d}{1+e^x}$.

$$g(x)=c+\frac{d}{1+e^x}=\frac{c(1+e^x)+d}{1+e^x}=\frac{c+ce^x+d}{1+e^x}$$

$$g(x)=\frac{ce^x+c+d}{1+e^x}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} c=-1 \\ c+d=1 \Rightarrow d=1-c=1+1=2 \end{cases}$$

$$\boxed{g(x)=-1+\frac{2}{1+e^x}}$$

b) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{1+e^x}\right)=-1}$$

Interprétation graphique de résultat :

La courbe admet une Asymptote horizontal y = -1

c) Calcul de g'(x) où g' est la fonction dérivée de g. $g'(x)=0-2\frac{V'}{V^2}$ avec $V=1+e^x$ $V'=e^x$

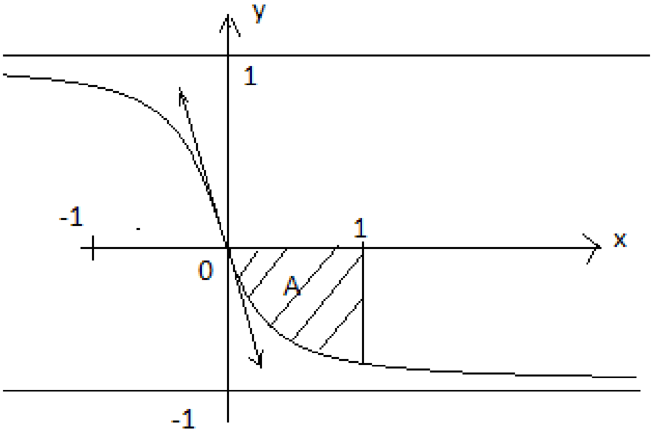
$$\boxed{g'(x)=-2\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}}$$

d) Dressage de tableau de variation de g uniquement sur [0 ;+∞[.

x	0		+∞
f'	-1/2	—	
f	0	↘	-1

f(0) = 0

3 –Utilisation de la parité de g pour construire (**C**) sur IR tout entier ; on précisera la tangente à l'origine.



4 -G est la fonction numérique définie sur IR par
G(x) = x – 2ln (1 + e^x).

a)Démonstration que G est une primitive de g sur IR.

$$G'(x) = 1 - \frac{2\left(1+e^x\right)'}{1+e^x} = 1 - \frac{2e^x}{1+e^x}$$

$$G'(x) = \frac{1+e^x-2e^x}{1+e^x} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = g(x)$$ Donc G(x) est primitive de g(x).

$$\boxed{G(x) = \int\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)dx}$$

b) Déduction, en cm², l'aire **A** du domaine plan délimité par (**C**), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

$$A = \int_0^1 \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} \right) dx = \left[x - 2\ln\left(1+e^x\right) \right]_0^1$$

$$A = 1 - 2\ln(1+e) - \left[0 - 2\ln(1+e^0) \right]$$

$$\boxed{A = \left[1 - 2\ln(1+e) + 2\ln 2\right]\left[*4cm^2\right]}$$

c)Hachure de l'aire **A**. voir graphique.

PARTIE B

$(V_n)_{n\in IN}$ est la suite numérique définie par

$V_n = \ln[3(2^n)]$.

1 –Calcul des V_0 , V_1 et V_2

$V_0 = \ln[3(2^0)] = \ln 3$

$V_1 = \ln[3.2] = \ln 6$

$V_2 = \ln[3.2^2] = \ln 12$

$\boxed{V_0 = \ln 3 \quad V_1 = \ln 6 \quad V_2 = \ln 12}$

2 –Démonstration de $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison.

$V_n = \ln 3 + n\ln 2$

$V_{n+1} = \ln 3 + (n+1)\ln 2$

Calcul de $V_{n+1} - V_n$

$V_{n+1} - V_n = \ln 3 + n\ln 2 + \ln 2 - \ln 3 - n\ln 2 = \ln 2$

$V_{n+1} - V_n = \ln 2 = r$

$\boxed{(V_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = \ln 2 \text{ et de premier terme } V_0 = \ln 3}$