CORRECTION BACC 2007

<u>EXERCICE</u> I

On considère l'équation (E): $z^2 + a z + b = 0$

z étant l'inconnu et a et b sont des nombres complexes.

1-<u>Détermination des nombres complexes</u> a et b sachant que $z_1 = -2$ et $z_2 = -3i$ sont les solutions de l'équation (E).

$$\begin{cases} z_1 = -2 \Leftrightarrow (-2)^2 + a(-2) + b = 0 \\ z_2 = -3i \Leftrightarrow (-3i)^2 + a(-3i) + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + b = -4 \\ -3ai + b = 9 \end{cases}$$

$$-2a + 3ai = -9 - 4$$

$a(-2+3i) = -13$

$$a = \frac{-13}{3i-2} = \frac{-13(3i+2)}{(3i)^2-(2)^2} = \frac{-39i-26}{-9-4} = \frac{39i+26}{13}$$

$$a = \frac{13(3i+2)}{13} = 2+3i \qquad \boxed{a = 2 + 3i}$$

$-2a + b = -4$

$b = -4 + 2a = -4 + 2(2+3i) = -4 + 4 + 6i = 6i$

$\boxed{b = 6i}$

2 -a-<u>Résolution dans IC l'équation (E) si on prend</u> $a = 2 + 3i$ et $b = 6i$.

$$z^2 + (2+3i)z + 6i = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (2+3i)^2 - 4(1)(6i) = 4 + 12i - 9 - 24i = -5 - 12i \quad \Delta = -5 - 12i$$

Soit z = x + iy racine de Δ

$z^2 = \Delta$

$|\Delta| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \end{cases}$$

$2x^2 = 8$

$x = \pm 2$

$$-\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \end{cases}$$

$2y^2 = 18$

$y = \pm 3$

2xy = -12 veut dire que x et y de signe contraire

$\sqrt{\Delta} = -2 + 3i$

.

$\sqrt{\Delta} = 2 - 3i$

$$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 3i - 2 + 3i}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 3i + 2 - 3i}{2} = \frac{-6i}{2} = -3i$$

$$\boxed{S = \{-2; -3i\}}$$

b-<u>Mets les solutions sous formes</u> <u>trigonométriques.</u>

$Z_1 = -2$ $\quad |Z_1| = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{0}{2} = 0 \end{array}\right\} \theta = \pi + 2k\pi$$

$Z_1 = [2, \pi]$ Forme polaire

$\boxed{Z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)}$ Forme trigonométrique

$Z_2 = -3i$ $\quad |Z_2| = 3$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{a}{\rho} = \frac{0}{3} = 0\\ \sin\theta &= \frac{b}{\rho} = \frac{-3}{3} = -1\end{aligned}\right\} \quad \theta = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$$

$$Z_2 = \left[3, \frac{-\pi}{2}\right]$$

$$Z_2 = 3\left[\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{Z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

3-<u>Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}$), on donne les points A, B, et C d'affixes respectives</u>

<u>$z_A = -2$; $z_B = -3i$; et $z_C = 1 + 2i$.</u>

Soit $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

a- <u>Mets Z sous-forme algébrique puis sous-forme trigonométrique</u>.

$$Z = \frac{1+2i+2}{-3i+2} = \frac{3+2i}{2-3i} = \frac{(3+2i)(2+3i)}{2^2-(3i)^2}$$

$$Z = \frac{6+9i+4i-6}{4+9} = \frac{13i}{13} = i$$

$$\boxed{Z = i}$$

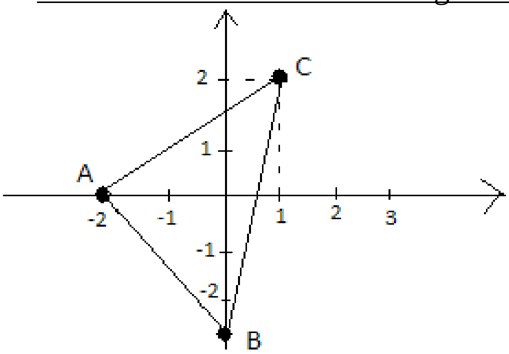
<u>Sous forme trigo</u>

$|Z| = 1$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{a}{\rho} = \frac{0}{1} = 0\\ \sin\theta &= \frac{b}{\rho} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}\right\} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\boxed{Z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}$$

b- Déduction de la nature du triangle ABC.



$\overrightarrow{AC} = z_c - z_A = 1+2i+2 = 3+2i$

$\overrightarrow{AB} = z_B - z_A = -3i+2$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

AC=BC

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

(ABC) est triangle rectangle en A. Et équilatérale.

EXERCICE II

Dans une classe de douze élèves, la répartition suivant l'ancienneté et le sexe est donnée par le tableau ci-dessous :

Anciennetés / Sexes	Passants	Redoublants
Garçons	4	3
Filles	3	2

On choisit au hasard et simultanément trois élèves de la classe.

1. Détermination de nombre de choix possibles.

$Card\Omega = C_{12}^{3} = 220$ $\boxed{Card\Omega = 220}$

2. Calcul de la probabilité de chacun des événements suivants :

A : ''Les trois élèves choisis sont des passants''.

A{3GP ou 3FP}

$P(A) = \dfrac{C_4^3 + C_3^3}{C_{12}^3} = \dfrac{4+1}{220} = \dfrac{1}{44}$ $\boxed{P(A) = \dfrac{1}{44}}$

B : ''On a choisi exactement deux filles''.

B{2F} B{2F et 1 $\overline{F}$ }

$P(B) = \dfrac{C_5^2 C_7^1}{C_{12}^3} = \dfrac{10*7}{220} = \dfrac{70}{220} = \dfrac{7}{22}$ $\boxed{P(B) = \dfrac{7}{22}}$

C : ‘‘ On a choisi au moins deux garçons’’.
C{2G Ou 3G}
C{2G et1 $\overline{G}$ ou3G et 0G}

$$P(C)=\frac{C_7^2C_5^1+C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{21*5+35}{220}=\frac{140}{220}=\frac{7}{11}$$

$$\boxed{P(C)=\frac{7}{11}}$$

D : ‘‘On a choisi trois filles passantes’’.
D{3F$_P$}

$$P(D)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220} \qquad \boxed{P(D)=\frac{1}{220}}$$

<u>PROBLEME</u>

Soit la fonction numérique f définie sur IR par : f(x) = e^{-x} + x – 1.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct ($0,\vec{i},\vec{j}$) d'unité : 2cm

1.a-<u>Détermination</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+x+1)=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

b- <u>Démonstration pour tout</u> x∈IR,
f(x) = e^{-x} (1 + xe^{x} – e^{x})

$$f(x)=e^{-x}+x-1=e^{-x}\left(1+\frac{x}{e^{-x}}-\frac{1}{e^{-x}}\right)$$

$$\boxed{f(x)=e^{-x}\left(1+xe^{x}-e^{x}\right)}$$

et déduction $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(1+xe^{x}-e^{x}\right)=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$$

2. a-Calcul de dérivée f'(x)

$\boxed{f'(x) = -e^{-x} + 1}$

et étude de son signe.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 > 0$

$\Leftrightarrow -e^{-x} > -1$

$\Leftrightarrow e^{-x} < 1$

$\Leftrightarrow \ln e^{-x} < \ln 1$

$\Leftrightarrow -x < 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

b-Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = e^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

c-Equation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

$y = f'(x)(x - x_0) + f(x)$

$f'(x) = -e^{-x}+1$

$f'(x) = -e^{-1}+1 = \dfrac{-1}{e} + 1$

$f'(1) = -e^{-1} + 1 = \dfrac{-1}{e} + 1$

$f(1) = e^{-1} + 1 - 1 = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$$\boxed{y = \left(1 - \frac{1}{e}\right)(x-1) + \frac{1}{e}}$$

3.a-Démonstration de la droite (D) d'équation y = x – 1 est une asymptote oblique à la courbe (C).

$si \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (x-1) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[e^{-x} + x - 1 - (x-1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x}\right) = 0$

y= x-1 est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

Etude de la position relative de (C) par rapport à la droite (D).
Signe de $\left[f(x) - y \right]$

$\left[f(x) - y \right]$

$\left[f(x) - y \right] = e^{-x} + x - 1 - \left(x - 1 \right) = e^{-x}$ Signe de e^{-x}

$e^{-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{e^{x}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 0$ vrais.

La courbe (C) est au-dessus de la droite y = x -1.

b-<u>Traçage (T), (D) et (C).</u>

$$y_T = \left(1 - \frac{1}{e} \right)\left(x - 1 \right) + \frac{1}{e}$$

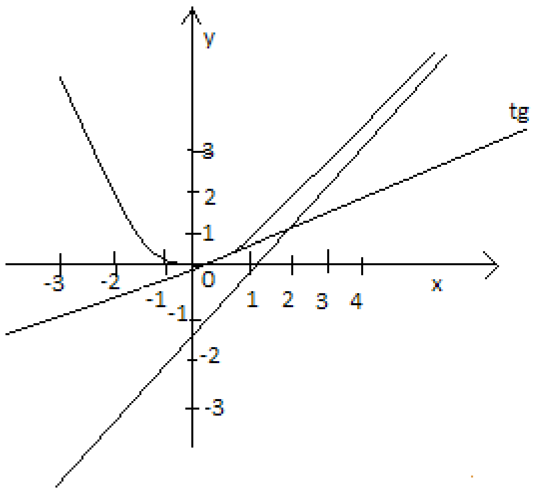
$$\frac{1}{e} = 0,36$$

$\boxed{y_T = 0,64x - 0,28}$

x	0	1
y	-0,28	0,36

y = x – 1

x	0	1
y	-1	0



4. Calcul, en cm^2, l'aire A, du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations : x = 0 et x = 1.

$$A=\int_0^1[f(x)-(x-1)]dx=\int_0^1\left(e^{-x}+x-1-x+1\right)dx$$

$$A=\int_0^1 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}+e^0=1-e^{-1}$$

$$\boxed{A=\left(1-e^{-1}\right)\ \text{x 4 cm}^2}$$

5. On considère les suites $(U_n)_{n\in IN}$ et $(V_n)_{n\in IN}$ définies par :
$U_n = f(n) - (n-1)$ et $V_n = f(n) - e^{-n}$ $n \in IN$.

a. Démonstration de la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$$U_n=e^{-n}+n-1-n+1=e^{-n}$$

Calcul de U_{n+1}

$$U_{n+1}=e^{-n-1}$$

Calcul de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{e^{-n-1}}{e^{-n}}=\frac{e^{-n}.e^{-1}}{e^{-n}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1}{e}=q$$

La suite $\left(U_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{e}$ et de premier terme $U_0 = 1$

b. Calcul, en fonction de n, la somme :

$$S_n=U_0+U_1+.......+U_n$$

$$S_n=e^0+e^{-1}+e^{-2}+.......+e^{-n}$$

$$S_n=\frac{U_0\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{1\left(1-\frac{1}{e^n}\right)}{1-\frac{1}{e}}=\frac{\frac{e^n-1}{e^n}}{\frac{(e-1)}{e}}=\frac{e}{(e-1)}\left(\frac{e^n-1}{e^n}\right)$$

$$\boxed{S_n=\frac{e}{(e-1)}\left(\frac{e^n-1}{e^n}\right)}$$

c. Démonstration de la suite $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

$V_n = f(n) - e^{-n} = e^{-n} + n - 1 - e^{-n} = n - 1$

$\boxed{V_n = n - 1}$

Calcul de $V_{n+1} - V_n$

$V_{n+1} - V_n = n - n + 1 = 1$

$V_{n+1} - V_n = r = 1$

(V_n) est une suite arithmétique de raison r = 1 et de première terme $V_0 = -1$

Terme générale $V_n = n - 1$

d. Calcul, en fonction de n, la somme

$R_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

Nombre de terme = dernière terme – première terne +1 = n-0+1 = n +1

$V_n = n-1 \quad V_0 = -1$

$$R_n = \frac{(n+1)(-1+n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \boxed{R_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$