

Séquence 1 : Calcul dans IR

1. Historique de IR

1.1 L'ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels noté \mathbb{N} est :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 1000, \dots, 2017, 2018, \dots\} .$$

Un entier est premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

L'équation $x+n = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{N} , d'où la nécessité d'un autre ensemble plus vaste que \mathbb{N} .

1.2 L'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs noté \mathbb{Z} est :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2018, -2017, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 2017, \dots\}$$

- Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si $\text{PGCD}(a ; b) = 1$.
- L'équation $2x - 5 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z} . D'où la nécessité d'un ensemble plus vaste que \mathbb{Z} .

1.3 L'ensemble des nombres décimaux

L'ensemble des nombres décimaux noté \mathbb{D} est :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\} .$$

- Tout entier relatif p est un nombre décimal. En effet, $p = \frac{p}{1} = \frac{p}{10^0}$.
- Tout nombre décimal non nul peut s'écrire sous l'unique forme $ax10^p$ où a est un nombre décimal vérifiant $1 \leq |a| < 10$ et p un entier relatif.

1.4 L'ensemble des nombres rationnels

Un nombre **rationnel** est le rapport de deux entiers relatifs :

L'ensemble des nombres rationnels noté \mathbb{Q} est $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\} .$

Tout nombre décimal est un quotient de deux entiers donc c'est un nombre rationnel.

- Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers relatifs tels que $\text{PGCD}(p ; q) = 1$.
- Tout nombre rationnel se caractérise par une écriture décimale comportant une période.

Exemples :

$$\frac{23}{7} = 3, \underline{285714} 285714 \dots ; \quad \frac{14}{3} = 4, \underline{6} 666 \dots ; \quad \frac{347}{99} = 3, \underline{50} 5050 \dots .$$

période période période

Notation :

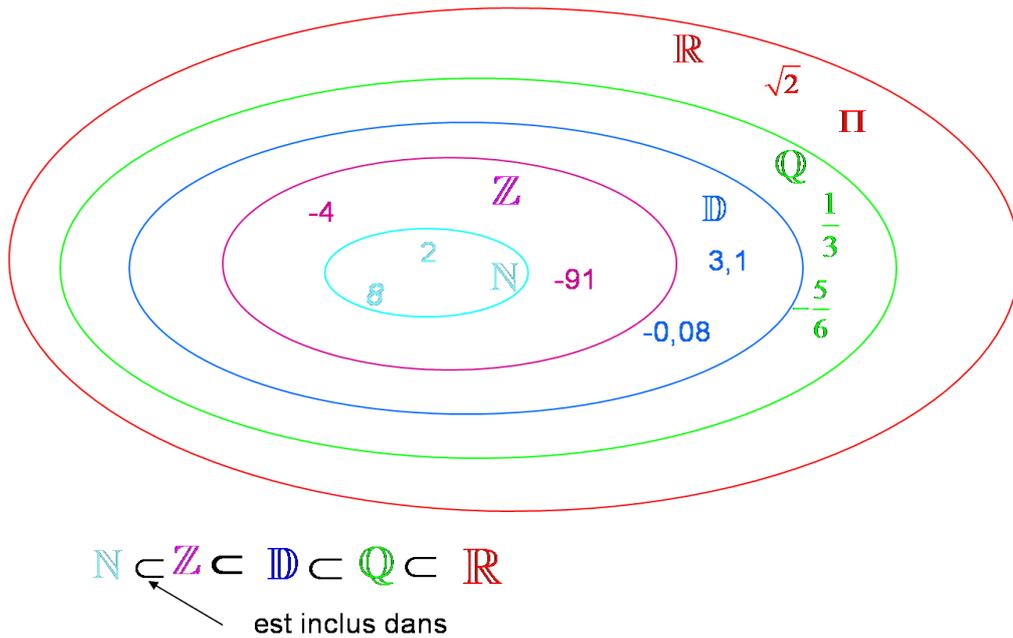
Pour signifier que l'écriture décimale est périodique, on notera la période avec une barre. Ainsi $3,505050\dots$ sera noté $3, \overline{50}$.

Mais l'équation $x^2 - 3 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{Q} , d'où la nécessité d'un autre ensemble plus vaste que \mathbb{Q} , d'où l'existence des nombres dits nombres irrationnels.

Ainsi, $\sqrt{3}$, π et e sont des nombres irrationnels.

1.5 L'ensemble des nombres réels

La réunion de l'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels constitue l'ensemble des nombres réels noté \mathbb{R} .



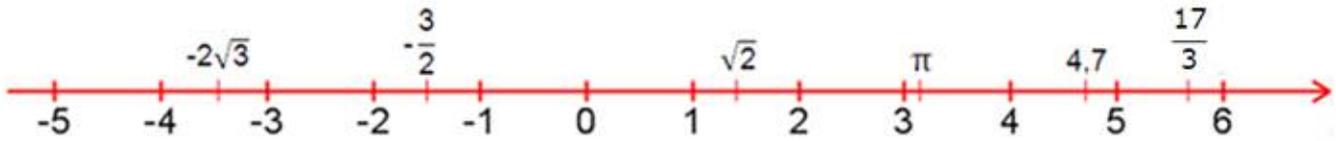
Donner la nature d'un nombre, c'est déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.

Exemple : 5 est un entier naturel ; - 5,2 est un nombre décimal.

2. Représentation graphique de IR

On représente IR par une droite graduée avec les conventions :

- Tout réel est représenté par un point de cette droite.
- Tout point de cette droite représente un réel.



3. Calculs numériques et algébriques

3.1 Calculs sur les fractions

Pour tous nombres réels a, b et c, on a :

- $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$ pour $b \neq 0$ et $c \neq 0$.
- $a \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b} = \frac{a}{b} \times c = a \times c \times \frac{1}{b}$.

Avant de simplifier une fraction, on écrit sous forme factorisée le numérateur et le dénominateur.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est : $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.

Exemples :

- L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$, l'inverse de $\frac{5}{3}$ est $\frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$.

3.2 Identités remarquables

3.2.1 Carré d'un nombre

Le carré du nombre a, noté a^2 , est le produit de a par a : $a^2 = a \times a$.

Ainsi : $3^2 = 3 \times 3 = 9$.

Les identités remarquables sont :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3.2.2 Racine carrée

La **racine carrée** d'un nombre réel positif a, notée \sqrt{a} , est le nombre dont le carré est égal à a.

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Propriétés : Soient a et b deux nombres réels positifs, alors :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (avec $b \neq 0$)
- **Attention :** $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Exemples

- $\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ mais $\sqrt{1} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$
- $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ mais $\sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$

3.2.3 Rendre rationnel le dénominateur

a) Méthode 1 : Le dénominateur est un produit ayant pour facteur \sqrt{a} (avec a positif) :

On multiplie le numérateur et le dénominateur par \sqrt{a} , et on utilise la règle $(\sqrt{a})^2 = a$.

b) Méthode 2 : Le dénominateur est une somme dont les termes contiennent une racine carrée :

1. Si le dénominateur s'écrit $a + \sqrt{b}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $a - \sqrt{b}$.
2. Si le dénominateur s'écrit $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Exemples : Écrire les nombres suivants sous forme de fractions sans radical au dénominateur.

$$a = \frac{2}{3\sqrt{5}} \qquad b = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$b = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{7-4\sqrt{3}}{4-3} = 7-4\sqrt{3}$$

$$c = \frac{1(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

3.3 Puissance de 10

Si n est un entier naturel :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ fois}} = \underbrace{1000\dots 0}_{n \text{ zéros}} \quad \text{et} \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00\dots 01}_{n \text{ zéros}}$$

Exemples :

Écrire en notation scientifique :

$$a = 2400000$$

$$b = 0,000034.$$

Réponse : $a = 2,4 \times 10^6$ et $b = 3,4 \times 10^{-5}$