Système linéaire de deux équations à deux inconnues

1. Rappels

1.1 Résolution d' un système de deux équations à deux inconnues

Pour résoudre dans IRxIR le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

On peut procéder par substitution, par combinaison, par la méthode du déterminant.

1.1.1 Exemple de résolution par substitution

0n tire x ou y dans l'une des équations, on porte cette valeur dans l'autre équation . 0n obtient une équation à une inconnue.

Exemple

Résoudre dans IR² le système $\begin{cases} x+y=2 (E_1) \\ x-y=2 (E_2) \end{cases}$

Réponse :

Dans (E_2), on obtient x = y + 2, en portant cette valeur dans (E_1),on obtient y + 2 + y = 2 .

Ce qui donne y = 0 . donc x= 2.

0n a alors : S ={(2 ; 0)}.

1.1.2 Exemple de résolution par combinaison

Soit à résoudre dans IRXIR le système : $\begin{cases} x-3y=0 \\ 2x+y=7 \end{cases}$

0n multiplie la première équation par -2 , on obtient le système $\begin{cases} -2x+6y=0 \\ 2x+y=7 \end{cases}$

Par additionne membre à membre, on a 7y = 7. Ce qui donne y =1.

De la même façon, on multiplie la deuxième équation par 3, et on obtient le système $\begin{cases} x-3y=0 \\ 6x+3y=21 \end{cases}$

Par addition membre à membre, on a = 7x = 21, ce qui donne x = 3

L'ensemble des solutions est donc S = {(1 ; 3)}.

1.1.3 Méthode du déterminant (méthode de Cramer)

Pour résoudre le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, on calcule les trois nombres

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$$

- Si $\Delta \neq 0$, alors l'ensemble des solutions est $S=\{(x;y)\}$ avec $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$
- Si $\Delta=0$, mais $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$, le système n'admet aucune solution. $S=\emptyset$
- Si $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ le système est équivalent à a x +b y = c.
  Le système se résout en prenant l'une des inconnues comme paramètre.
  Par exemple, si $b \neq 0$ on pose $x=\lambda$, on a $y=\frac{c-a\lambda}{b}$

  Alors l'ensemble des solutions est $S=\left\{\left(\lambda;\frac{c-a\lambda}{b}\right),\lambda\in\mathbb{R}\right\}$

1.3 Interprétation graphique

Les points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation ax +b y = x sont les point d »'une droite (D). On dit que c'est l'équation de la droite (D).

Les solutions du système sont don les coordonnées des points qui appartiennent à la fois aux droites (D) et (D') d'équations respectives ax +by = c et a'x +b'y=c'. Ce sont donc les coordonnées des points d'intersection de ces deux droites

- Si $\Delta \neq 0$, les deux droites ont un unique point d'intersection.

- Si $\Delta=0$ mais $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$, les deux droites n'ont aucun point d'intersection : (D) et (D') sont parallèles (non confondues).

- Si $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, on a une infinité de points d'intersection, les deux droites sont confondues.

1.2 Résolution d' un système d'inéquations à deux inconnues

La droite (D) d'équation ax +by =c partage le plan en deux demi-plan, dont l'un est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient ax +by > 0, et l'autre l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient

ax +by < 0.

Pour déterminer les solutions d'une inéquation linéaire à deux inconnues de la forme ax + by > 0 ou

ax + by < 0, il suffit de tracer la droite (D), de voir lequel des deux demi-plans correspond aux solutions, en prenant un point n'appartenant pas à la droite et voir si ses coordonnées vérifient ou non l'inégalité.

Exemple

Soit à résoudre graphiquement l'inéquation 2x – y > 1.

Notons (D) la droite d'équation 2x – y =1, et traçons-la dans le paln rapporté à un repère orthonormé.

L'origine O(0;0) n'appartient pas à la droite (D), donc on peut le choisir.

Si on remplace x et y par les coordonnées de O, on a 2.0 – 0 = 0 <1. Donc le couple (0;0) n'est pas solution de l'inéquation. Alors c'est le demi-plan qui ne contient pas O qui contient les points dont les coordonnées sont solutions de l'inéquation.