Équations - inéquations irrationnelles

1. Équations irrationnelles

Une équation est dite irrationnelle si l'inconnue figure sous au moins un radical.

Exemples

$2\sqrt{x-1}+2=x$ est une équation irrationnelle. Mais $x-3\sqrt{2}=0$ ne l'est pas.

1.1 Équation du type $\sqrt{f(x)}=g(x)$

Nous avons : $\sqrt{f(x)}=g(x)$ si et seulement si $\begin{cases} f(x)=[g(x)]^2 \\ \text{et } g(x)\geqslant 0 \end{cases}$

Exemples

- Résoudre (E) $\sqrt{8-x}-x+2=0$

$$\begin{aligned}
\sqrt{8-x}-x+2=0 &\Leftrightarrow \sqrt{8-x}=x-2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=(x-2)^2 \\ x-2\geq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=x^2-x+4 \\ x\geq 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ x\geq 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-4)=0 \\ x\geq 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow S=\{4\} \text{ car } -1<2
\end{aligned}$$

- Résoudre dans IR : $\sqrt{4-x}=x-2$

On a

$$\sqrt{4-x}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=(x-2)^2 \\ 4-x\geq 0 \end{cases}$$

d'où $4-x=x^2-4x+4$ qui équivaut à $x(x-3)=0$.
Ce qui donne $x=0$ ou $x=3$. S $=\{3\}$ car $0<2$

1.2 Équations du type $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

L'équation a un sens si $f(x)\geqslant 0$ et $g(x)\geqslant 0$.
On a l'équivalence :

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Exemple

Résoudre dans IR

$$\sqrt{4x-1} = \sqrt{3-x}$$

On détermine l'ensemble de définition D_f

$$\begin{cases} 4x-1 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{4} \\ x \leqslant 3 \end{cases} \text{ d'où } D_f = \left[\frac{1}{4}\,;\,3\right]$$

On élève au carré : $x \in D_f$ et $4x-1 = 3-x \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$

$$\frac{4}{5} \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$$

2. Inéquations irrationnelles

2.1 Inéquations du type $\sqrt{f(x)} \leqslant \sqrt{g(x)}$

On a l'équivalence suivante :

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

Exemple

Résoudre dans IR l'inéquation : $\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{x+4}$

Réponse

$$\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ 2x-1 \leq x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq -4 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est : S = $[\frac{1}{2}\,;5]$

2.2 Inéquation du type $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)$

Rappelons que :

$$\sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a \geq 0 \\ a \leq b^2 \end{cases}$$

.

On va traiter un exemple. Résoudre dans IR l'inéquation $\sqrt{x^2+2x-3} < 2x+1$.

$$\sqrt{x^2+2x-3} \leq 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^2+2x-3 \geq 0 \\ x^2+2x-3 \leq (2x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq -3 \; ou \; x \geq 1 \\ 0 \leq 3x^2+2x+4 \end{cases}$$

La solution est S = [1 ; + ∞ [