Séquence 1: Équations et inéquations du second degré

1. Équation du second degré dans IR

1.1 Trinôme du second degré

Un trinôme du second degré est une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a,b et c sont des réels et $a \neq 0$

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On dit que α est une racine de f(x) si $f(\alpha) = 0$.

Factoriser f(x) c'est l'écrire, lorsque cela est possible, sous forme de produit de facteur du premier degré, c'est à dire sous la forme

$f(x) = a(x - x')(x - x'')$.

On a alors $f(x) = 0$ si $a(x - x')(x - x'') = 0$.

Factoriser un trinôme revient donc à chercher les racines de ce trinôme, c'est à dire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

1.2 Équation du second degré dans IR

Une équation de degré 2, d'inconnue *x*, sous forme développée,

s'écrit $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des nombres connus avec $a \neq 0$

Résoudre dans IR une équation d'inconnue x, c'est trouver les solutions réelles, c'est-à-dire les valeurs des réels x qui rendent l'égalité correcte.

Exemple: $3x^2 - 2x - 5 = 0$ est une équation de degré 2.

- En remplaçant x par 1 dans $3x^2 - 2x - 5$, on obtient - 4.Le nombre 1 ne rend pas l'égalité correcte. Donc 1 n'est pas une solution de l'équation $3x^2 - 2x - 5 = 0$
- **T**andis que, en remplaçant *x* par - 1 dans $3x^2 - 2x - 5$, on obtient 0.

Le nombre - 1 vérifie l'égalité.
Donc - 1 est une solution de l'équation $3x^2 - 2x - 5 = 0$

1.3 Résolution

Pour résoudre dans IR $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

On calcule le discriminant $b^2 - 4ac$, noté Δ, puis il suffit de regarder le signe de Δ pour pouvoir conclure, en utilisant le tableau suivant :

$\Delta = b^2-4ac$		
si $\Delta < 0$ (son signe est -)	si $\Delta = 0$	si $\Delta > 0$ (son signe est +)
on peut conclure :	on peut conclure :	on peut conclure :
l'équation n'a aucune solution réelle.	l'équation a une solution unique réelle	l'équation a deux solutions réelles.
S = $\emptyset$	calcul de cette solution :	calcul de ces solutions:
	$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$	$\Delta = (\sqrt{(\Delta)})^2$
	$S = \{ \frac{-b}{2a} \}$	$x' = \frac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a}$
		$x'' = \frac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a}$

Exemples

Résoudre dans IR les équations suivantes:

a) $2x^2 -3x + 5 = 0$; b) $4x^2 +4x +1 = 0$; c) $4x^2 - 3x - 10 = 0$.

Réponses:

a) $2x^2 -3x +5 = 0$.

On a a = 2 , b = - 3, c = 5

$\Delta = b^2-4\,ac$

$= 9 - 40$

$= -31$

Comme le discriminant est strictement négatif , l'équation est impossible.

L'ensemble de solutions est : S = $\emptyset$

b) $4x^2 + 4x +1 = 0$

Ici, a = 4, b = 4, c = 1

$\Delta = b^2-4\,ac$

$= 4^2 - 4(4)(1)$

$= 0$

Le discriminant est nul , on a une racine double $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$. On trouve $x' = x'' = \frac{-1}{2}$

L'ensemble des solutions est : $S = \{ \frac{-1}{2} \}$

c) $4x^2 - 3x - 10 = 0$.

Ici a = 4, b = - 3, c= - 10

On a : $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-3)^2 - 4(4)(-10)$
$= 169$

Le discriminant est strictement positif, nous avons deux solutions distinctes x' et x''

x' = $\frac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a}$ et x'' = $\frac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a}$; on trouve x' = $\frac{5}{4}$ et x'' = 2.

L'ensemble des solutions est : S = { $\frac{5}{4}$, 2 }

2. Inéquation du second degré dans IR

2.1 Transformation d'écriture de ax² + bx + c

Soit à factoriser f(x) = ax² + bx + c où $a \neq 0$.
On a

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}x\right) + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Posons Δ = b²-4ac, On a

$$f(x) = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Δ est appelé discriminant du trinôme.

2.2 Factorisation

Il y a trois cas à distinguer :

Si Δ < 0 (son signe est -),	Si Δ = 0	Si Δ >0
on ne peut pas factoriser f(x)	f(x) = a(x+ $\frac{b}{2a}$)²	f(x) = a(x – x')(x – x'') avec x' = $\frac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a}$ et x'' = $\frac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a}$

2.3 Signe de ax² + bx +c

D'après la factorisation de $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a le résultat suivant :

Si $\Delta < 0$ (son signe est -)	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta > 0$
f(x) a même signe que a	$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ f(x) a même signe que a et s'annule pour $x = \frac{-b}{2a}$	$f(x) = a(x - x')(x - x'')$ f(x) a même signe que a à l'extérieur des racines et du signe de (-a) à entre les racines.

Parfois on regroupe le signe de f(x) dans un tableau appelé tableau de signe ,donc :

- Si $\Delta < 0$, le tableau de signe de f(x) a la forme suivante.

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a

- Si $\Delta = 0$, le tableau de signe de f(x) a la forme suivante.

x	$-\infty$	x'	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta = 0$, le tableau de signe de f(x) a la forme suivante.

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
x-x'		-	0	+		+	
x-x''		-		-	0	+	
(x-x')(x-x'')		+	0	-	0	+	
a(x-x')(x-x'')		signe de a	0	signe de (-a)	0	signe de a	

Parfois on regroupe le signe de f(x) dans un tableau appelé tableau de signe ,donc :

- Si Δ < 0, le tableau de signe de f(x) a la forme suivante.

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a

- Si Δ =0, le tableau de signe de f(x) a la forme suivante.

x	$-\infty$		x'		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

- Si Δ =0, le tableau de signe de f(x) a la forme suivante.

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
x-x'		-	0	+		+	
x-x''		-		-	0	+	
(x-x')(x-x'')		+	0	-	0	+	
a(x-x')(x-x'')		signe de a	0	signe de (-a)	0	signe de a	

2.4 Inéquations du second degré dans IR

Une inéquation du second degré à une inconnue dans IR est une inéquation de l'une des formes

$ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$

où a, b, c sont des réels donnés, avec $a \neq 0$.

Pour résoudre une telle inéquation :

➔ on dresse le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$.

➔ on hachure les colonnes avec les signes inutiles.

➔ on écrit la solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles

Exemples

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $x^2 + x + 1 < 0$ b) $-3x^2 + x + 2 \geq 0$;

Réponse

Étape 1 : Calcul du discriminant

Étape 2: Dresser le tableau de signe

Étape 3: Hachurer les colonnes avec les signes inutiles

Étape 4 : Écrire les solutions

a) $\mathbf{x^2 + x + 1 < 0}$. On a a =1, b = 1 et c = 1

Le discriminant Δ est $\Delta = 1^2 - 4.1.1 = -3$

Δ <0, donc on n'a aucune racine.

Le signe de ce trinôme est du signe de a, qui est positif.

Ainsi

x	$-\infty$ $+\infty$
$x^2 + x + 1$	+

Alors $S = \emptyset$

b) $-3x^2 + x + 2 \geq 0$, a = -3, b =1 et c = 2

$\Delta = 1^2 - 4.(-3).2 = 25$

On a deux racines distinctes $x' = \dfrac{-1-5}{2(-3)} = 1$ $x'' = \dfrac{-1+5}{2(-3)} = -\dfrac{2}{3}$

$$-3x^2 + x + 2 = -3(x-1)(x+\frac{2}{3})$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$x+\frac{2}{3}$		-	0	+		+	
x-1		-		-	0	+	
$(x-1)(x+\frac{2}{3})$		+	0	-	0	+	
$-3(x-1)(x+\frac{2}{3})$		-	0	+	0	-	

Ainsi $S=]-\infty;-\frac{2}{3}]\cup[1;+\infty[$