

Le Second degré

1. Équation du second degré dans IR

1.1 Trinôme du second degré

Un trinôme du second degré est une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On dit que α est une racine de $f(x)$ si $f(\alpha) = 0$.

Factoriser $f(x)$ c'est l'écrire, lorsque cela est possible, sous forme de produit de facteur du premier degré, c'est à dire sous la forme

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

On a alors $f(x) = 0$ si $a(x - x')(x - x'') = 0$.

Factoriser un trinôme revient donc à chercher les racines de ce trinôme, c'est à dire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

1.2 Équation du second degré dans IR

Une équation de degré 2, d'inconnue x , sous forme développée, s'écrit $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des nombres connus avec $a \neq 0$

Résoudre dans IR une équation d'inconnue x , c'est trouver les solutions réelles, c'est-à-dire les valeurs des réels x qui rendent l'égalité correcte.

Exemple: $3x^2 - 2x - 5 = 0$ est une équation de degré 2.

- En remplaçant x par 1 dans $3x^2 - 2x - 5$, on obtient -4. Le nombre 1 ne rend pas l'égalité correcte. Donc 1 n'est pas une solution de l'équation $3x^2 - 2x - 5 = 0$
- Tandis que, en remplaçant x par -1 dans $3x^2 - 2x - 5$, on obtient 0.

Le nombre -1 vérifie l'égalité.

Donc -1 est une solution de l'équation $3x^2 - 2x - 5 = 0$

1.3 Résolution

Pour résoudre dans IR $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

On calcule le discriminant $b^2 - 4ac$, noté Δ , puis il suffit de regarder le signe de Δ pour pouvoir conclure, en utilisant le tableau suivant :

$\Delta = b^2 - 4ac$		
si $\Delta < 0$ (son signe est -) on peut conclure : l'équation n'a aucune solution réelle. $S = \emptyset$	si $\Delta = 0$ on peut conclure : l'équation a une solution unique réelle calcul de cette solution : $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$ $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$	si $\Delta > 0$ (son signe est +) on peut conclure : l'équation a deux solutions réelles. calcul de ces solutions: $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples

Résoudre dans IR les équations suivantes:

a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$;

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;

c) $4x^2 - 3x - 10 = 0$.

Réponses:

a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

On a $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 9 - 40 \\ &= -31 \end{aligned}$$

Comme le discriminant est strictement négatif, l'équation est impossible.

L'ensemble de solutions est : $S = \emptyset$

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Ici, $a = 4$, $b = 4$, $c = 1$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4(4)(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant est nul, on a une racine double $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$. On trouve $x' = x'' = \frac{-1}{2}$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$

c) $4x^2 - 3x - 10 = 0$.

Ici $a = 4$, $b = -3$, $c = -10$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-3)^2 - 4(4)(-10)$$

$$= 169$$

Le discriminant est strictement positif, nous avons deux solutions distinctes x' et x''

$$x' = \frac{-b - \sqrt{(\Delta)}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{(\Delta)}}{2a} \quad ; \quad \text{on trouve } x' = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad x'' = 2.$$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \frac{5}{4}, 2 \right\}$

2. Inéquation du second degré dans IR

2.1 Transformation d'écriture de $ax^2 + bx + c$

Soit à factoriser $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

On a

$$f(x) = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + 2 \left(\frac{b}{2a}x \right) + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, On a

$$f(x) = a \left[\left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Δ est appelé discriminant du trinôme.

2.2 Factorisation

Il y a trois cas à distinguer :

Si $\Delta < 0$ (son signe est -), on ne peut pas factoriser $f(x)$	Si $\Delta = 0$ $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$	Si $\Delta > 0$ $f(x) = a(x - x')(x - x'')$ avec $x' = \frac{-b - \sqrt{(\Delta)}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{(\Delta)}}{2a}$

2.3 Signe de $ax^2 + bx + c$

D'après la factorisation de $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a le résultat suivant :

<p>Si $\Delta < 0$ (son signe est -) $f(x)$ a même signe que a</p>	<p>Si $\Delta = 0$ $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ $f(x)$ a même signe que a et s'annule pour $x = \frac{-b}{2a}$</p>	<p>Si $\Delta > 0$ $f(x) = a(x - x')(x - x'')$ $f(x)$ a même signe que a à l'extérieur des racines et du signe de $(-a)$ à entre les racines.</p>
---	---	---

Parfois on regroupe le signe de $f(x)$ dans un tableau appelé tableau de signe ,donc :

- Si $\Delta < 0$, le tableau de signe de $f(x)$ a la forme suivante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, le tableau de signe de $f(x)$ a la forme suivante.

x	$-\infty$	x'	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta > 0$, le tableau de signe de $f(x)$ a la forme suivante.

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$	
$x - x'$	-	0	+	+	
$x - x''$	-	-	0	+	
$(x - x')(x - x'')$	+	0	-	+	
$a(x - x')(x - x'')$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

Parfois on regroupe le signe de $f(x)$ dans un tableau appelé tableau de signe ,donc :

- Si $\Delta < 0$, le tableau de signe de $f(x)$ a la forme suivante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, le tableau de signe de $f(x)$ a la forme suivante.

x	$-\infty$	x'	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta > 0$, le tableau de signe de $f(x)$ a la forme suivante.

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$
$x-x'$	-	0	+	+
$x-x''$	-	-	0	+
$(x-x')(x-x'')$	+	0	-	0
$a(x-x')(x-x'')$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0
			0	signe de a

2.4 Inéquations du second degré dans IR

Une inéquation du second degré à une inconnue dans IR est une inéquation de l'une des formes

$ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$

où a, b, c sont des réels donnés, avec $a \neq 0$.

Pour résoudre une telle inéquation :

- on dresse le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$.
- on hachure les colonnes avec les signes inutiles.
- on écrit la solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles

Exemples

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $x^2 + x + 1 < 0$

b) $-3x^2 + x + 2 \geq 0$;

Réponse

Étape 1 : Calcul du discriminant

Étape 2: Dresser le tableau de signe

Étape 3: Hachurer les colonnes avec les signes inutiles

Étape 4 : Écrire les solutions

a) $x^2 + x + 1 < 0$. On a $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$

Le discriminant Δ est $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

$\Delta < 0$, donc on n'a aucune racine.

Le signe de ce trinôme est du signe de a , qui est positif.

Ainsi

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + x + 1$	+	

Alors $S = \emptyset$

b) $-3x^2 + x + 2 \geq 0$, $a = -3$, $b = 1$ et $c = 2$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25$

On a deux racines distinctes $x' = \frac{-1-5}{2(-3)} = 1$ $x'' = \frac{-1+5}{2(-3)} = -\frac{2}{3}$

$$-3x^2 + x + 2 = -3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$	
$x + \frac{2}{3}$	-	0	+	+	
x-1	-		-	0	+
$(x-1)(x + \frac{2}{3})$	+	0	-	0	+
$-3(x-1)(x + \frac{2}{3})$	-	0	+	0	-

Ainsi $S =]-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [1; +\infty[$