Suites numériques réelles

1. Suites arithmétiques

1.1 Définitions

Un suite (u_n) est une suite arithmétique, si quel que soit n, $u_{n+1}-u_n$ est une constante r.

On a donc pour tout n, $u_{n+1}-u_n=r$ ou $u_{n+1}=u_n-r$

Le réel r est appelé raison de (u_n)

1.2 Expression de u_n en fonction de n

Si u_0 est le 1[er] terme de (u_n) et r la raison d'une suite arithmétique, alors :

$$
\begin{aligned}
u_1&=u_0+r\\
u_2&=u_1+r\\
u_3&=u_2+r\\
&\dots\\
u_n&=u_{n-1}+r\\
u_1+u_2+\dots+u_n&=u_0+u_1+\dots+u_{n-1}+nr
\end{aligned}
$$

Ce qui donne $u_n=u_0+nr$ **(1)**

et si $p\in N$ $u_p=u_0+pr$ **(2)**

(1) - (2) donne $u_n-u_p=(n-p)r$

ou $u_n=u_p+(n-p)r$

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors

$$u_n=u_0+nr$$

et quel que soit p, $u_n=u_p+(n-p)r$

1.3 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1er terme u_0 e de raison r.

Posons $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

Considérons la somme $s_n=1+2+\dots+n$

$$
\begin{aligned}
s_n&=1+2+\dots+(n-1)+n\\
s_n&=n+(n-1)+\dots+2+1
\end{aligned}
$$

Par addition membre à membre ,

$$2s_n=(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)+(n+1)=n(n+1)$$
$$s_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$
$$= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + nr$$
$$= (n+1)u_0 + r(1+2+\ldots+n)$$

$$S_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2u_0+nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0+u_0+nr)(n+1)}{2}$$

On a donc $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

où u_0 : le 1[er] terme de la somme, u_n : le dernier terme de la somme et (n+1) : le nombre de termes..

Plus généralement, $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$

On a, par exemple, $u_3 + u_4 + \ldots\ldots u_{25} = 23\frac{u_3+u_{25}}{2}$

1.4 Limite d'une suite arithmétique

Soit $u_n = u_0 + nr$

- Si r < 0 $\lim(u_n) = -\infty$
- Si r > 0 $\lim(u_n) = +\infty$
- Si r = 0, lim (u_n) = u_0

2. Suites géométriques :

2.1 Définitions

(u_n) est une suite géométrique s'il existe $q \in R$ tel que, quel que soit n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Le réel q est appelé raison de la suite géométrique (u_n) et on a $u_{n+1} = q \cdot u_n$

2.1.1 Expression de un en fonction de n

Si (u_n) est une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q, on a :

$$u_1 = qu_0,\ u_2 = qu_1,\ u_3 = qu_2,\ \ldots\ldots\ldots, \text{ et } u_n = qu_{n-1}$$

On a alors $u_1 . u_2 . u_3 \ldots u_n = q^n . u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n-1}$

Et après simplification : $u_n = q^n u_0$ (1)

Et si $k \in N$, $u_k = q^k u_0$ (2)

$\frac{(1)}{(2)}$ donne $\frac{u_n}{u_k} = \frac{q^n}{q^k} = q^{n-k}$

d'où, quels que soient n et k $u_n = q^{n-k} u_k$

Donc, si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors

$u_n = q^n u_0$ et pour tout entier k, $u_n = q^{n-k} u_k$

2.2 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0

Soit $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ **(1)**

En multipliant les deux membres de l'égalité par q, on a :

$qS_n = qu_0 + qu_1 + \ldots + qu_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}$ **(2)**

Par soustraction membre à membre de (1) et (2), $S_n - qS_n = u_0 - u_{n+1} = u_0 - q^{n+1} u_0$

Ce qui donne,

Pour $q \neq 1$, $\boxed{S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ où u_0 : 1er terme de la somme et n+1 : nombre de termes de la somme.

Et plus généralement $\boxed{u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$

2.3 Limite d'une suite géométrique

Théorème :

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = q^n$

- si $q > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$
- si $q = 1$, (u_n) est stationnaire et converge vers 1
- si $0 < |q| < 1$, $\lim(u_n) = 0$
- si $q \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite

Remarque :

Considérons la suite (S_n) définie par $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0.

On sait que si $q \neq 1$, $S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On a : si $|q| < 1$, $\lim q^{n+1} = 0$ donc, (S_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty}(S_n) = \frac{u_0}{1-q}$