Série 2 : Exercices résolus sur les inéquations

1. Inéquation produit

Énoncé

Résoudre l'inéquation (2x-1)(5x+3) < 0

Solution

2x-1 = 0 si et seulement si $x=\frac{1}{2}$

5x+3 = 0 si et seulement si $x=-\frac{3}{5}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
2x-1		-	|	+	0	+	
5x+3		-	0	-	|	+	
(2x-1)(5x+3)		+	0	-	0	+	

Signe de 2x-1

Signe de 5x+3

Signe de (2x-2)(5x+3)

(2x-1)(5x+3) est strictement négatif lorsque $-\frac{3}{5}<x<\frac{1}{2}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S=]-\frac{3}{5};\frac{1}{2}[$.

2. Inéquation quotient

Énoncé

Résoudre l'inéquation $\frac{4x+3}{2x-5}\geqslant 0$.

Solution

4x+3=0 équivaut à $x=-\frac{4}{3}$

2x-5 = 0 équivaut à $x=\frac{5}{2}$

Pour $x=\frac{5}{2}$, le dénominateur s'annule donc c'est une valeur interdite. Cela se traduit par une double-barre dans le tableau de signe.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
4x+3		-	0	+		+	
2x-5		-		-	0	+	
$\frac{4x+3}{2x-5}$		+	0	-	$\Vert$	+	

Signe de 4x+3

Signe de 2x-5

Le dénominateur s'annule

$\frac{4x+3}{2x-5} \geqslant 0$ lorsque $x \leq -\frac{4}{3}$ ou $x > \frac{5}{2}$ donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =]-\infty ; -\frac{4}{3}] \cup]\frac{5}{2} ; +\infty[$$

3. Système d'inéquations à une inconnue

Énoncé

Résoudre le système d'inéquations suivant $\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$.

Solution

Les solutions du système sont les réels x vérifiant simultanément les deux inégalités.

Résolvons d'abord la première inéquation.

$x^2-4 \geq 0$ équivaut à $(x-2)(x+2) \geq 0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x+2		-	0	+		+	
x-2		-		-	0	+	
(x-2)(x+2)		+	0	-	0	+	

$x^2-4 \geq 0$ si x appartient à l'intervalle] - ∞ , - 2] ou à l'intervalle [2 ; + ∞ [.

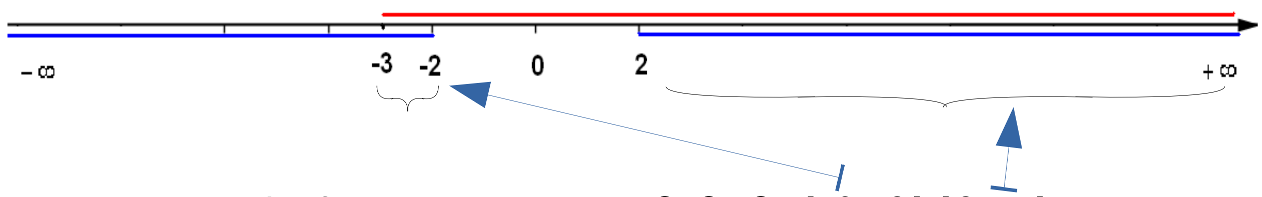
Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $S_1 =]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$.

La deuxième inéquation donne : $x > -3$.

L'ensemble des solutions de la deuxième inéquation est $S_2 =]-3 ; +\infty[$.

L'ensemble des solution du système est l'intersection de S_1 et de S_2.

Sur la figure suivante, S_1 est représentée par les demi-droites bleues et S_2 par la demi-droite rouge.



S est donc ce qui est à la fois en bleu et en rouge : $S=S_1 \cup S_2=]-3\,;-2\,] \cup [\,2;\,+\infty\,[$.

Remarque :

-3 n'est pas solution puisque l'inégalité est stricte, donc on a un crochet ouvert en -3. Par contre, -2 et 2 sont solutions puisque l'inégalité de la première inéquation est large, d'où les crochets en -2 et en 2 sont fermés.