

Séquence 1 : Équations du second degré dans IR

1. Forme canonique d'un trinôme du second degré

1.1 Recherche de la forme canonique

Soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

En mettant a en facteur, on obtient : $f(x) = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]$.

D'autre part, on sait que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ donc : $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$.

D'où $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$

En mettant au même dénominateur, $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$.

En posant $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$, on a $f(x) = a[(x + \alpha)^2 + \beta]$.

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation.

L'écriture $f(x) = a[(x + \alpha)^2 + \beta]$ est appelée **forme canonique** de $f(x)$. La forme canonique permet de savoir si on peut factoriser ou non le trinôme.

1.2 Factorisation à partir de la forme canonique

- Si $\beta > 0$, on ne peut pas factoriser $f(x)$;
- Si $\beta = 0$, $f(x) = a(x + \alpha)^2 = a(x + \alpha)(x + \alpha)$;
- Si $\beta < 0$, $f(x) = a[(x + \alpha)^2 - k^2] = a(x + \alpha - k)(x + \alpha + k)$ avec $k^2 = -\beta$.

2. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$:

- 1) Repérer les coefficients de x^2 (c'est a), de x (c'est b) et le coefficient constant (c'est c).
- 2) Regarder si on peut factoriser facilement le premier membre. Dans ce cas, mettre a en facteur et regarder l'autre facteur :

- $a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] = 0$: il n'y a pas de terme constant et $a x\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0$.

Les solutions sont : 0 et $-\frac{b}{a}$.

- $a(x^2 - h^2) = 0$. On a une différence de deux carrés. $a(x+h)(x-h) = 0$. Ainsi, $x+h = 0$ ou $x-h = 0$.

Les solutions sont : $-h$ et h .

- $a(x^2 + 2kx + k^2) = 0$. C'est le développement d'un carré, l'équation s'écrit : $a(x+k)^2 = 0$.

On a une racine double : $-k$.

3) Si on ne peut rien faire, calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Il y a trois cas à envisager :

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
L'équation est impossible. On écrit :	Il y a une racine double :	Il y a deux racines distinctes :
	$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$	$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$S = \emptyset$	$S = \{x'\}$	$S = \{x' ; x''\}$

Exemples :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

- $2x^2 - 8 = 0$

En factorisant, on a : $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4)$

$$= 2(x-2)(x+2)$$

Donc $2x^2 - 8 = 0$ si et seulement si $2(x-2)(x+2) = 0$.

Finalement, $2x^2 - 8 = 0$ si et seulement si $x+2 = 0$ ou $x-2 = 0$.

$$S = \{-2 ; 2\}.$$

- $3x^2 + 6x = 0$

En factorisant, on a : $3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

Donc $3x^2 + 6x = 0$ si et seulement si $3x = 0$ ou $x+2 = 0$.

On a alors $x = 0$ ou $x = -2$.

$$S = \{-2 ; 0\}.$$

- $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ici, $a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1$.

$\Delta > 0$, on a deux solutions distinctes :

$$\sqrt{\Delta} = 1, \quad x' = \frac{-(-5) - 1}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-(-5) + 1}{2 \times 1} = 3.$$

$$S = \{2 ; 3\}.$$