Séquence 1 : Généralités sur les suites numériques

1. Définition et vocabulaire

Situation 1 :

Chaque mois, Bema et Soa peuvent économiser 5000Ar de leur goûter. Bema a acheté un tirelire pour placer ses économies. Soa, aidée par sa mère, a ouvert un compte épargne à 4,5% d'intérêts par an. Dans deux ans, qui aura fait le plus d'économie ?

Il est évident que c'est Soa.

Situation 2 :

Un biologiste souhaite étudier l'évolution d'une population de bactéries. Il a effectué les relevés suivants :

heure	10h	10h20	10h40	11h	11h20
nombre	1000	2100	4000	7900	16000

1. Ce tableau fait apparaître une évolution assez régulière. Pour pratiquer des prévisions, le biologiste modélise l'évolution en affirmant que la population double toutes les 20 minutes. Pour vérifier la validité de son hypothèse, il fait un nouveau relevé à midi. Il constate que la population est alors environ 65000. Doit-il revoir sa modélisation ?

2. On admet maintenant que la population double toutes les 20 minutes. Par quel nombre est-elle multipliée au bout d'une heure ? Au bout de deux heures ?

3. a) On note p_0 la population initiale, p_1 la population à 10h20, et ainsi de suite. Comment note-on la population à 12 h ? à 14 h ?
b) Exprimer p_n en fonction de n.

4) Il revient le lendemain à 10h. Estimer alors la population relevée.

1.1 Définir une suite

Une **suite numérique** est une fonction dont la variable prend des valeurs entières positives.

La suite u sera notée (u_n). u_n est le **terme général** de la suite. n est **l'indice** de la suite.

1.2 Vocabulaire

Si l'indice n...	commence par 0 :	est défini sur IN* :
Le 1er terme est	u_0	u_1
Le 2e terme est	u_1	u_2
Le ne terme est	u_{n-1}	u_n

1.3 Expression d'une suite

Il y a deux façons d'exprimer une suite :

- Par une définition explicite du terme général u_n.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$. On a $u_0 = 1$, $u_{10} = 2x10+1 = 21$,...

- Par la donnée d'un terme particulier (en général le premier terme) et une relation entre u_n et u_{n+1}.

Exemple : la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n-2$.

2. Variations d'une suite

2.1 Suites croissantes, suites décroissantes

Dire que la suite (u_n) est **strictement croissante** signifie que pour tout entier naturel n :

$$u_n < u_{n+1}.$$

Dire que la suite (u_n) est **strictement croissante** signifie que pour tout entier naturel n :

$$u_n > u_{n+1}.$$

On définit de même une suite **croissante** ou **décroissante** en utilisant des inégalités au sens large.

Dire que la suite (u_n) est **constante** (ou **stationnaire**) signifie que pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_{n+1}.$$

Exemples :

- On considère (U_n) définie par le poids d'un enfant.

U_0 est son poids à la naissance, U_1 son poids à un an ; il est évident que cette suite est croissante.

- (U_n) est définie par : $U_n = 3n + 1$.

Pour étudier les variations de cette suite, calculons $U_{n+1} - U_n$ pour n quelconque :

$U_{n+1} - U_n = 3(n+1)+1 - (3n +1) = 3$. Comme $U_{n+1} - U_n > 0$, cette suite est croissante.

- La suite (U_n) définie par $U_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

2.2 Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite (U_n), on peut :

(1) Étudier le signe de la différence U_{n+1} - U_n :

U_{n+1} - U_n < 0 , suite décroissante ; U_{n+1} - U_n > 0, suite croissante.

(2) Comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1 dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs.

(3) Étudier les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$ s'il existe une fonction f telle que pour tout entier n, $U_n = f(n)$.

Exemples :

Étudions les variations des suites (U_n) et (V_n) définies par $U_n=\frac{n}{2^n}$ et $V_n=\frac{3n-1}{n+2}$.

- Pour (U_n), $U_{n+1}-U_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-n}{2n}$. Or, pour $n\geq 1$, $1-n\leq 0$ donc U_{n+1} - U_n < 0 .

  La suite (U_n) est décroissante.

- Pour (V_n), notons f la fonction définie par $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$. f est définie sur IR\{-2} donc en particulier sur $[0;+\infty[$. Elle est dérivable sur cet intervalle.

Pour tout $x\geq 0$, $f'(x)=\frac{7}{(x+2)^2}$ qui est strictement positif. Ainsi, f est strictement croissante sur cet intervalle. Comme $V_n = f(n)$, il en résulte que (V_n) est strictement croissante.

3. Représentation graphique d'une suite

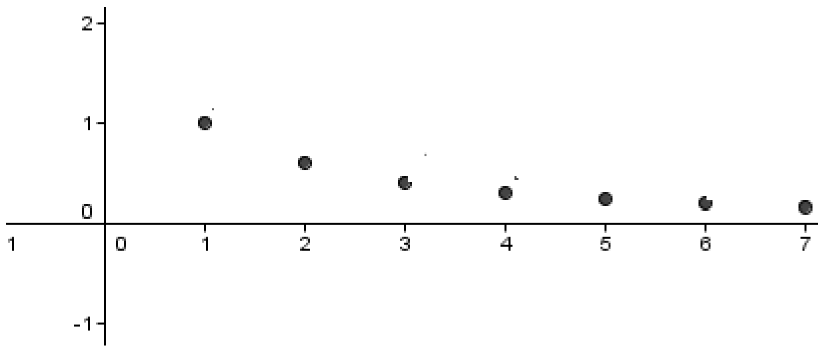
3.1 Suites définies de façon explicite

Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ et (U_n) la suite définie par $U_n = f(n)$.

Représenter graphiquement la suite (U_n), c'est tracer l'ensemble des points $M_n(n ; f(n))$.

Exemple :

$U_n=\frac{n+1}{n^2+1}$



3.2 Suites définies par récurrence

Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = g(U_n)$.
On place les points M_n $(U_n\ ;\ 0)$ en suivant les démarches suivantes :

Étape 1 : On trace la droite y = x et la courbe C_g de g.

Étape 2 : On place M_o $(U_0\ ;\ 0)$ puis on place le point A_0 de C_g, d'abscisse U_0. $A_0(U_0\ ;\ U_1)$ car $U_1 = g(U_0)$.

Étape 3 : On place le point B_0 sur la droite ayant la même ordonnée que A_0. $B_0(U_1\ ;\ U_1)$.

Étape 4 : On projette B_0 sur l'axe des abscisses. On obtient ainsi $M_1(U_1\ ;\ 0)$.

On réitère le procédé en partant de M_1 pour obtenir M_2 etc…

Exemple :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = \frac{3}{5}$ et $U_{n+1} = 3U_n - 1$. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les points M_1, M_2, M_3 et M_4 d'abscisses U_1, U_2, U_3 et U_4.

Solution : Ici, la fonction est g(x) = 3x - 1. En suivant la méthode, on obtient la figure suivante :