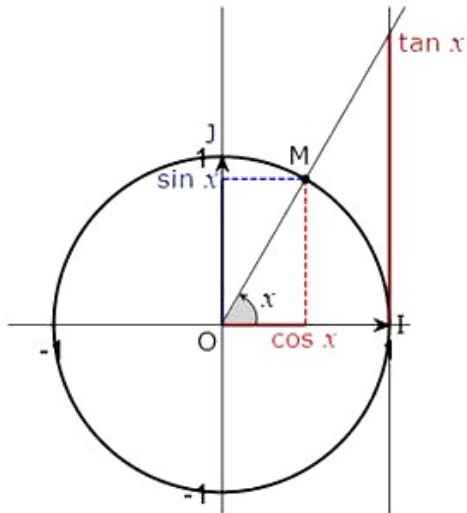


Séquence 2 : Lignes trigonométriques

1. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit C le cercle trigonométrique de centre O. On pose $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.

Soit x un réel et M le point de C tel que x soit la mesure en radian de l'angle (\vec{OA}, \vec{OM}) .



On appelle **cosinus de x** et **sinus de x** et on note $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les coordonnées de M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$M(\cos x, \sin x) \text{ et } \vec{OM} = (\cos x)\vec{i} + (\sin x)\vec{j}$$

On appelle **tangente de x** le nombre :

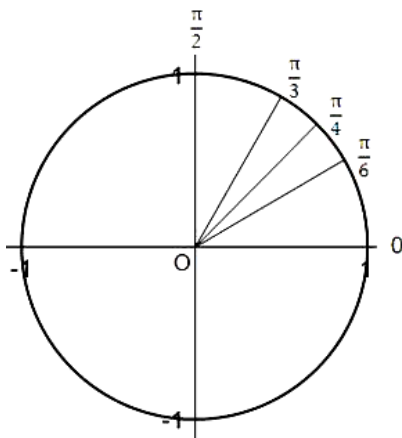
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ lorsque } x \neq \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

2. Propriétés

Pour tout réel x,

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- $\sin(x + 2.k.\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2.k.\pi) = \cos x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$;
- $\tan(x + k.\pi) = \tan x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

3. Valeurs remarquables

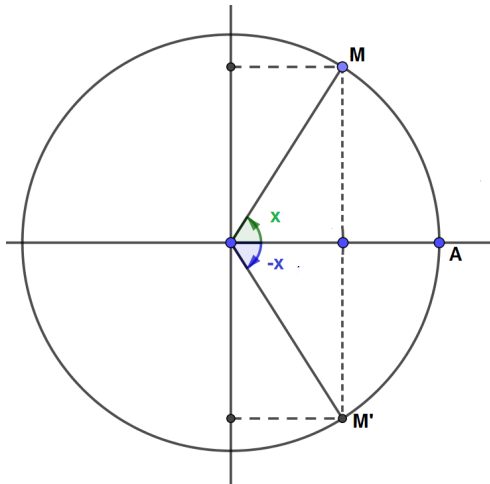


x (en rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

4. Angles associés

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

4.1 Lignes trigonométriques de x et de $-x$



Considérons les points M et M' du cercle trigonométrique tels que :
 $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = -x$ (en rad).

Ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc ils ont même abscisse mais d'ordonnées opposées.

D'où les relations :

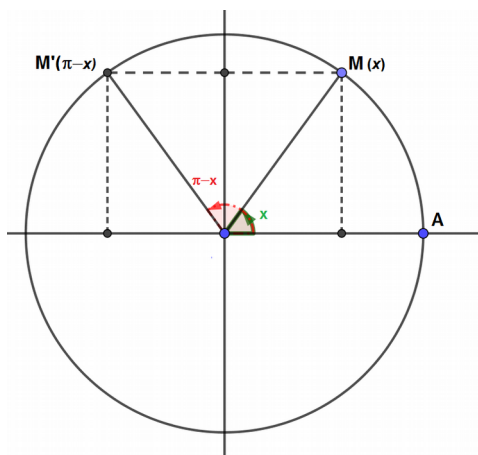
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$

Exemple :

Calculer le cosinus et le sinus de $-\frac{\pi}{4}$.

On a : $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ mais $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.2 Lignes trigonométriques en x et $\pi - x$



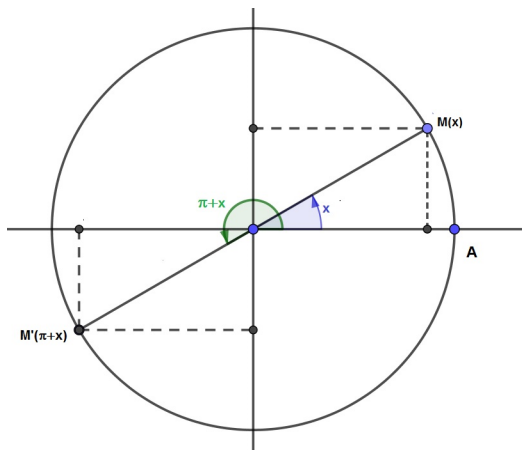
Les points M(x) et M'(π-x) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc ils ont la même ordonnée mais des abscisses opposées.

D'où les relations :

- $\cos(\pi-x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi-x) = \sin(x)$
- $\tan(\pi-x) = -\tan(x)$

Remarquons que x et $\pi-x$ sont deux angles supplémentaires.

4.3 Lignes trigonométriques de x et $\pi + x$

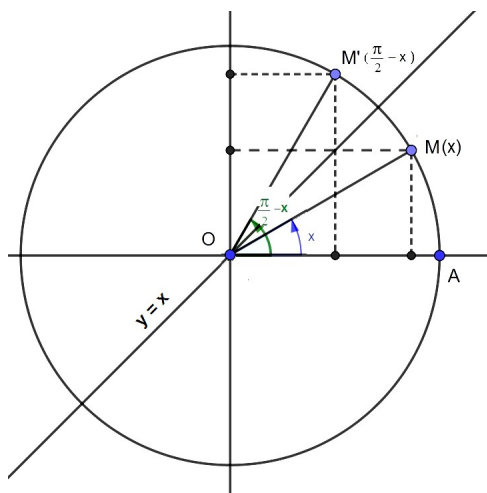


Les points $M(x)$ et $M'(\pi+x)$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. Donc leurs coordonnées sont opposées.

D'où les relations :

- $\cos(\pi+x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi+x) = -\sin(x)$
- $\tan(\pi+x) = \tan(x)$

4.4 Lignes trigonométriques de x et de $\frac{\pi}{2} - x$



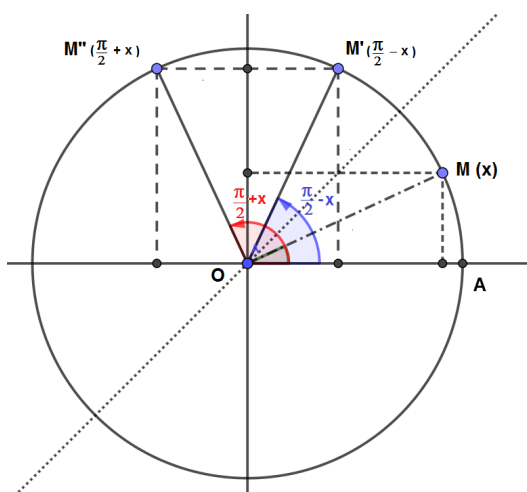
Les points $M(x)$ et $M'(\frac{\pi}{2} - x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Donc leurs coordonnées sont opposées.

D'où les relations :

- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$

Remarquons que x et $\frac{\pi}{2} - x$ sont complémentaires.

4.5 Lignes trigonométriques de x et de $\frac{\pi}{2} + x$



Les points $M'(\frac{\pi}{2} + x)$ et $M''(\frac{\pi}{2} - x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc leurs coordonnées sont opposées.

D'où les relations :

- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan(x)}$

Exemple :

Calculer le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{7\pi}{6}$.

On a $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$.

Donc :

- $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
- $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$