MANUEL COLLABORATIF

MATHS 2de

STATISTIQUES PROBABILITÉS • FONCTIONS • GÉOMÉTRIE

Sésamath

MAGNARD

SOMMAIRE

Logos et indications

19	Exercice corrigés en fin de manuel
INFO	Exercice avec l'ordinateur
ALGO	Exercice d'algorithmique

TRAVAILLER UN CHAPITRE

Manuel et **manuel numérique**, deux outils complémentaires

1 VÉRIFIER SES PRÉREQUIS

1. Réalisez le **test de début** de chapitre.

Auto-évaluation

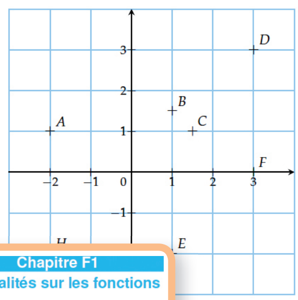
Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Soit l'expression $2x^2 + 5x - 1$.
Quelle est sa valeur si :
1) $x = 2$?
2) $x = -1$?

2 Résoudre les équations suivantes.
1) $2x - 4 = 7$.
2) $5x + 8 = 9x - 15$.

3 Quelle est la valeur de $\dfrac{2x-5}{x-3}$ si $x = 0$?

4 Sur le graphique ci-contre :
1) Quel est le point de coordonnées $(-2;1)$?
2) Quelles sont les coordonnées du point F ?
3) Quel(s) est(sont) le(s) point(s) d'abscisse 1 ?
4) Quel(s) est(sont) le(s) point(s) d'ordonnée -2 ?



Voir solutions p. 259

2. Vérifiez vos **réponses** en fin de manuel.

Chapitre F1
Généralités sur les fonctions

Auto-évaluation

1 1) 17 — 2) -4

2 1) 5,5 — 2) $\dfrac{23}{4}$

3 $\dfrac{5}{3}$

4 1) A — 2) $(3;0)$ — 3) B et E — 4) E et H

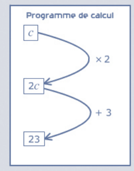
3. Remédiez à vos difficultés grâce aux **exercices et aides** du manuel numérique.

Forme ax+b=c

OK

Question n°1 :
On considère le programme de calcul suivant :
"Calculer le double d'un nombre augmenté de 3."
On cherche le nombre c qui donne comme résultat 23 avec ce programme.
Trouver ce nombre c revient à résoudre l'équation $2c + 3 = 23$.

En utilisant le schéma ci-contre, complète :
On a $2c =$ ☐
donc $c =$ ☐



2 APPRENDRE UNE LEÇON

1. Apprenez les **définitions** et les **propriétés**.

2. Refaites les exercices corrigés des **méthodes** du cours.

Renvoi

MÉTHODE 3 Calculer des images à partir d'une expression littérale ► Ex. 37 p. 84

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^5 + 6x^2 - 9$.
Calculer les images de 0 et de -1 par la fonction f.

Correction

0 et -1 appartiennent à $\mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f.
$f(0) = 4 \times 0^5 + 6 \times 0^2 - 9 = -9$
$f(-1) = 4 \times (-1)^5 + 6 \times (-1)^2 - 9 = -4 + 6 - 9 = -7$
Les images de 0 et -1 par f sont respectivement -9 et -7.

3. Faites l'**exercice d'entraînement** lié à la méthode.

37 ► MÉTHODE 3 p. 84
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$.
Calculer les images de :
1) 2 ; 2) -3 ; 3) 0 ; 4) $\sqrt{5}$.

4. Vérifiez vos **réponses** en fin de manuel ou suivez le raisonnement à l'aide du **corrigé pas à pas** du manuel numérique.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$.
1) $f(2) = 3 \times 2^2 + 7 \times 2$
$f(2) = 3 \times 4 + 14$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$.
1) $f(2) = 3 \times 2^2 + 7 \times 2$
$f(2) = 3 \times 4 + 14$
$f(2) = 12 + 14$

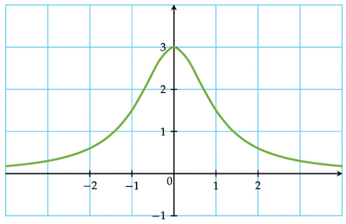
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$.
1) $f(2) = 3 \times 2^2 + 7 \times 2$
$f(2) = 3 \times 4 + 14$
$f(2) = 12 + 14$
$f(2) = 26$

3 S'ENTRAÎNER AVEC DES EXERCICES

1. Repérez les éléments importants de la consigne, comme les verbes d'action à l'infinitif.

46 ► MÉTHODE 5 p. 70

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



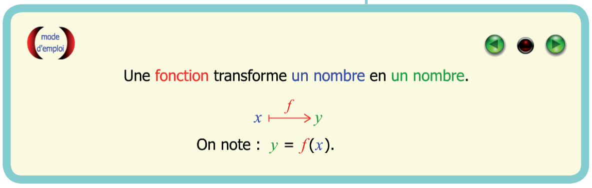
Par lecture graphique, déterminer :

1) l'image de -1 par f ;
2) l'image de 0 par f ;
3) le (ou les) antécédent(s) de 1 par f ;
4) le (ou les) antécédent(s) de 3 par f.

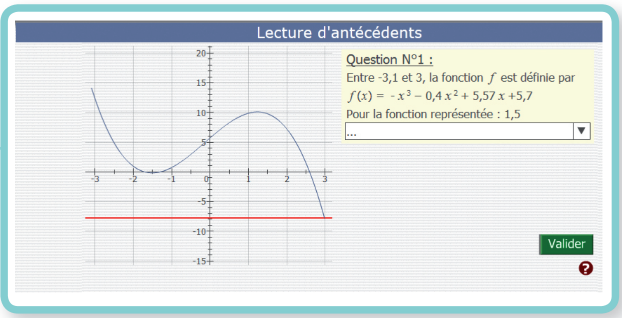
2. Vérifiez votre compréhension du vocabulaire.
   → utilisez le lexique à la fin du manuel ou sur le manuel numérique.

3. Réalisez un schéma si nécessaire.

4. Consultez en cas de besoin :
   ► les « Propriétés pour démontrer en géométrie » du manuel ;
   ► le formulaire et les aides animées du manuel numérique.



5. Réalisez les exercices numériques pour approfondir les notions étudiées.



4 PRÉPARER UN CONTRÔLE

1. Faites les exercices d'Activités mentales.
   Sans difficultés calculatoires, ils permettent de vérifier que les raisonnements sont compris.

2. Réalisez le QCM de fin de chapitre
   ► vérifiez vos réponses en fin de manuel ;
   ► refaites les compléments proposés dans le manuel numérique.

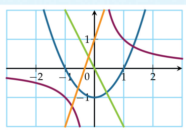
3. Réalisez le devoir surveillé disponible sur le manuel numérique.

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les questions 58 à 61, on utilise les courbes représentatives de fonctions ci-contre :



58 La courbe verte représente une fonction :
(a) linéaire (b) carrée (c) autre

59 La courbe rouge représente une fonction :
(a) linéaire (b) carrée (c) inverse

60 La courbe bleue représente une fonction :
(a) carrée (b) affine et non linéaire (c) autre

61 La courbe orange représente une fonction :
(a) linéaire (b) affine (c) inverse

Pour les questions 62 et 63, la fonction f est connue par le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	-8	$-6,5$	-5	$-3,5$	-2	$-0,5$	1	2,5	4	5,5	7	8,5	10

62 L'image de 2,5 par la fonction f est :
(a) $-6,5$ (b) 0,5 (c) 8,5

63 Un antécédent de 1 par la fonction f est :
(a) 4 (b) 0 (c) aucune des réponses

MÉTHODES DE L'ANNÉE

Stat. et probabilités

Fonctions

Géométrie

Statistiques descriptives

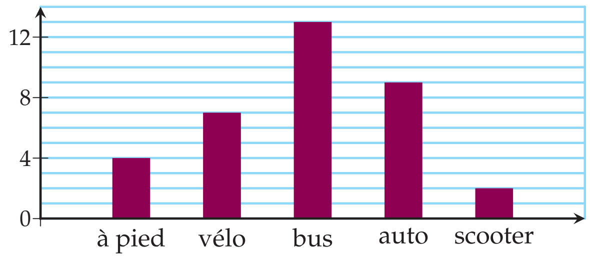
Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Lire un diagramme en barres
- Lire un tableau à double entrée
- Calculer des fréquences
- Calculer des effectifs ou des fréquences cumulés

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Voici les résultats d'un sondage effectué par des élèves de la 2de Z sur le moyen de transport utilisé pour venir au lycée. Dresser un tableau d'effectifs.



2 Voici les résultats d'un sondage des élèves de 2de Y sur la partie du cours de maths qu'ils préfèrent.

	Algèbre	Géométrie	Stats
Filles	23	18	15
Garçons	17	12	13

1) Combien de garçons préfèrent la géométrie ?
2) Combien d'élèves préfèrent l'algèbre ?
3) Combien de filles ne préfèrent pas les stats ?

3 Dans une entreprise, on a :

	Ouvriers	Secrétaires	Cadres
Hommes	39	0	7
Femmes	13	4	3

1) Calculer la proportion d'ouvriers.
2) Quelle est la fréquence en pourcentage
   a) de femmes dans l'entreprise ?
   b) de cadres hommes dans l'entreprise ?
3) Comparer le pourcentage de cadres parmi les hommes et parmi les femmes.

4 Voici les notes de la 2de X à un DM noté sur 5.

Note	0	1	2	3	4	5
Eff.	1	3	13	7	4	2

1) Calculer les effectifs cumulés croissants.
2) Combien y a-t-il d'élèves en 2^{e}X ?
3) Combien d'élèves n'ont pas la moyenne ?

Voir solutions p. 259

Activités d'approche

DÉBAT 1 Dans les coulisses d'un parc d'attractions

M. Duparc, gérant d'un parc d'attractions, souhaite ajouter une attraction à son parc.
Il a le choix entre trois attractions :

- la petite chenille ;
- les elfes magiques ;
- l'immense grand huit (interdit aux moins de 15 ans).

Il confie à une société spécialisée le soin de faire une étude afin de décider laquelle des trois attractions serait le meilleur investissement. Votre mission, si vous l'acceptez, consiste à aider cette société à organiser cette étude de marché.

DÉBAT 2 Budget familial

Voici la répartition des dépenses du budget annuel familial en 2006 exprimées en pourcentage selon l'âge de la personne de référence en France métropolitaine.

	Moins de 25 ans	De 25 à 44 ans	De 45 à 64 ans	65 ans et plus	Ensemble
Produits alimentaires et boissons non alcoolisées	9,8	13,7	15,6	19,6	**15,5**
Boissons alcoolisées, tabac	3,30	2,50	2,70	2,30	2,6
Articles d'habillement et chaussures	7,50	**9,20**	7,90	5,00	7,8
Logement, eau, gaz, électricité et autres combustibles	27,00	16,50	14,00	18,60	16,2

Source : d'après des données de l'Insee

La donnée **9,2** de la 3e colonne se lit : dans une famille où la personne de référence (chef de famille) a un âge compris entre 25 et 44 ans, 9,2 % du budget familial est consacré aux articles d'habillements et aux chaussures.

La donnée **15,5** de la dernière colonne se lit : en 2006, en France métropolitaine, les ménages ont dépensé 15,5 % du budget annuel familial pour acheter des produits alimentaires et boissons non alcoolisées.

Comment retrouver les données de la dernière colonne ?

ACTIVITÉ 3 Éducation en Europe

Le tableau ci-après donne les dépenses pour l'éducation dans les pays de l'Union Européenne exprimées en pourcentage du PIB.

Partie 1 : dépense moyenne

1) Calculer la dépense moyenne consacrée à l'éducation dans chaque secteur (public et privé).
2) Que remarquez-vous ? Comment expliquer ce phénomène ?

Partie 2 : le cas de la France

1) Pour ce qui est des dépenses publiques d'éducation, dans quelle catégorie classer la France ?
- Dans le quart supérieur ? Inférieur ?
- Dans la moitié supérieure ? Inférieure ?

2) Citer un pays comptant parmi les 25 % des pays de l'Union Européenne qui dépensent le moins dans la catégorie « dépenses publiques ».

3) Citer un pays comptant parmi les 50 % des pays de l'Union Européenne qui dépensent le plus dans la catégorie « dépenses privées ».

	Dépenses publiques	Dépenses privées
Allemagne	4	0,69
Autriche	4,88	0,48
Belgique	5,73	0,34
Bulgarie	3,53	0,62
Chypre	5,97	1,27
Danemark	6,56	0,53
Espagne	4,21	0,61
Estonie	4,61	0,32
Finlande	5,5	0,14
France	5,39	0,53
Grèce	nd	nd
Hongrie	4,93	nd
Irlande	4,39	0,24
Italie	4,05	0,4
Lettonie	4,79	0,56
Lituanie	4,45	0,45
Luxembourg	3,08	nd
Malte	6,31	0,38
Pays-Bas	4,64	0,9
Pologne	4,79	0,5
Portugal	5,1	0,46
République tchèque	4,04	0,51
Roumanie	4,17	0,5
Royaume-Uni	3,97	1,75
Slovaquie	3,33	0,53
Slovénie	4,77	0,73
Suède	6,03	0,16
Union Européenne à 27 (données estimées)	4,48	0,72

Source : http ://www.data-publica.com/ d'après Eurostat. Dans ce tableau, « nd » signifie : donnée non disponible.

Cours - Méthodes

1. Série statistique. Tableau d'effectifs. Fréquences d'apparition.

Lorsqu'on étudie un certain **caractère** sur une population donnée, on relève une valeur du caractère par individu.
L'ensemble des données obtenues (ou toutes les valeurs prises par le caractère) constitue les **données brutes**.
Le caractère peut être **qualitatif** (couleur d'une voiture) ou **quantitatif** (taille d'un individu).
Les données brutes comportent souvent des valeurs qui se répètent.

DÉFINITION : Série statistique

Lors d'un relevé de mesures effectué sur les individus d'une population, l'ensemble des données collectées constitue une **série statistique**.

- Une série statistique à caractère quantitatif est dite **ordonnée** après que les valeurs collectées ont été rangées dans l'ordre croissant (ou décroissant).
- L'**étendue** désigne l'écart entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par le caractère.

DÉFINITION : Modalités

Les différentes valeurs possibles pour un caractère s'appellent les **modalités** du caractère.

REMARQUE : Dans ce qui suit, l'entier p désigne le nombre de modalités.

- Si p est petit, les modalités, désignées par x_1, x_2, ..., x_p, sont rangées dans l'ordre croissant dans la première ligne du tableau. Les effectifs correspondants, désignés par n_1, n_2, ..., n_p, sont placés sur la deuxième ligne du tableau.

Caractère	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

- Si p est grand, le recensement de toutes les modalités du caractère rendrait le tableau trop grand et par conséquent illisible. Dans ce cas, la première ligne du tableau présente des intervalles contigus appelés **classes** et les effectifs sur la deuxième ligne comptent le nombre de fois où le caractère a pris une valeur dans la classe correspondante.

Caractère	$[a_1;a_2[$	$[a_2;a_3[$	...	$[a_p;a_{p+1}]$
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

Exemple On a demandé aux 35 élèves de la 2ᵉZ du Lycée Évariste Galois la durée de leur trajet pour se rendre au lycée le matin et voici le résultat du sondage :
10 min ; 6 min 17 s ; 21 min ; 44 min ; $\frac{3}{10}$h ; 9 min ; 28 min ; 40 min ; $\frac{1}{4}$h ; environ 40 min ; presque 30 min ; 7 min ; $\frac{1}{5}$h ; 23 min ; 4 min ; 21 min ; 39 min ; 28 min ; 11 min ; 35 min ; 22 min ; 19 min ; 35 min ; 26 min ; 10 s (j'habite au lycée, ma mère est l'adjointe du proviseur) ; 19 min ; trop longtemps ; 21 min ; 11 min ; 6 min ; 32 min ; 18 min ; ça dépend du vent ; 27 min ; une demi-heure.
Dresser un tableau d'effectifs de cette série statistique et calculer l'étendue.

Correction Voici une répartition de la durée des trajets maison-lycée des élèves de la 2ᵉZ du Lycée Évariste Galois :

Durée du trajet	$[0;15[$	$[15;30[$	$[30;45]$
Effectifs	10	15	8

Par lecture du tableau : $45-0=45$.
L'étendue est de 45 min.

NOTATION :

- La notation $[a;b[$ indique l'ensemble des nombres compris entre a et b, a inclus et b exclu.
- Les données brutes égales à $a_2; a_3; \ldots; a_p$ ne doivent pas être comptabilisées deux fois. Ici, les données égales à a_2 sont comptabilisées dans la classe $[a_2;a_3[$ et non pas dans la classe $[a_1;a_2[$.

DÉFINITION : Fréquence d'apparition

On considère une série statistique comportant p modalités (ou p classes) d'effectifs n_1,..., n_p et d'effectif total N. La **fréquence d'apparition** de la modalité (ou de la classe) correspond à la proportion d'individus dont le caractère est égal à cette modalité (ou appartenant à cette classe). Ainsi, pour tout entier i compris entre 1 et p :

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad \text{et} \quad f_1 + f_2 + \ldots + f_p = 1$$

PREUVE $f_1 + f_2 + \ldots + f_p = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \ldots + \frac{n_p}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}{N} = \frac{N}{N} = 1.$

Exemple

Le tableau ci-contre indique la répartition du nombre d'enfants de moins de 25 ans dans les familles des Bouches-du-Rhône en 1999 et 2009.
Construire un diagramme en barres comparatif de 1999 et 2009.

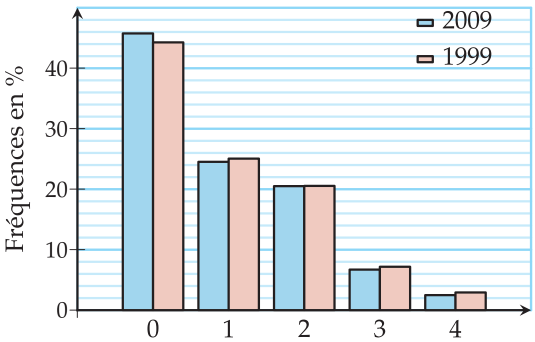
Nombre de familles avec	en 2009	en 1999
Aucun enfant	244 918	220 109
1 enfant	131 271	124 597
2 enfants	109 776	102 135
3 enfants	35 907	35 708
4 enfants ou plus	13 311	14 564
Ensemble	535 183	497 113

Source : Insee, RP1999 et RP2009 exploitations complémentaires.

Correction

Fréquences en % des familles avec	en 2009	en 1999
Aucun enfant	45,76	44,28
1 enfant	24,53	25,06
2 enfants	20,51	20,55
3 enfants	6,71	7,18
4 enfants ou plus	2,49	2,93
Ensemble	100	100

Ce tableau peut se remplir avec un tableur.



Répartition des enfants dans les familles des Bouches-du-Rhône en 1999 et 2009

2. Médiane et quartiles

Dans cette partie et la suivante, on considère uniquement des séries statistiques à caractère quantitatif.

DÉFINITION : Médiane

Dans une série statistique **ordonnée** :
une **médiane** partage les valeurs prises par le caractère en deux groupes de même effectif.

Cours - Méthodes

MÉTHODE 1 Déterminer une médiane

► Ex. 16 p. 17

Si les valeurs sont peu nombreuses, il est plus simple d'ordonner la série et de *séparer les valeurs prises par le caractère en deux groupes* de même effectif.
Si l'effectif total est impair, une valeur restera entre les deux demi-groupes. Cette valeur sera la médiane.
Si l'effectif total est pair, n'importe quelle valeur comprise entre la dernière valeur du premier groupe et la première valeur du second groupe peut être considérée comme une médiane. Le plus souvent, la moyenne de ces deux valeurs est choisie comme médiane.

Exercice d'application

Les élèves de 2^{e} Z du Lycée E. Galois participent à une chorale. Le chef de chœur souhaite partager les élèves en deux lignes suivant leur taille. Aider le chef de chœur en déterminant leur taille médiane.
172 ; 162 ; 190 ; 190 ; 169 ; 164 ; 177 ; 181 ; 189 ; 161 ; 164 ; 182 ; 185 ; 188 ; 169 ; 190 ; 193 ; 189 ; 179 ; 180 ; 173 ; 193 ; 166 ; 164 ; 163 ; 164 ; 190 ; 176 ; 176 ; 192 ; 173 ; 194.

Correction

Voici la liste ordonnée des tailles des élèves de 2^{e}Z.
161 ; 162 ; 163 ; 164 ; 164 ; 164 ; 164 ; 166 ; 169 ; 169 ; 172 ; 173 ; 173 ; 176 ; 176 ; **177** ; **179** ; 180 ; 181 ; 192 ; 185 ; 188 ; 189 ; 189 ; 190 ; 190 ; 190 ; 190 ; 192 ; 193 ; 193 ; 194.
L'effectif total de cette série est 32. Une fois la série ordonnée, les 16^{e} et 17^{e} valeurs partagent cette série en deux groupes de 16 élèves. Leur moyenne est $\dfrac{177 + 179}{2}$ donc une valeur possible de la médiane est 178 cm.
Le chef de chœur peut partager la classe en deux lignes : ceux mesurant moins de 178 cm et ceux mesurant plus de 178 cm.

DÉFINITION : Quartiles

Le **premier quartile** d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 25 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.
Le **troisième quartile** d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 75 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.

MÉTHODE 2 Déterminer les quartiles à partir des fréquences

► Ex. 19 p. 17

Exercice d'application Reprendre la répartition du nombre d'enfants de moins de 25 ans dans les familles des Bouches-du-Rhône en 2009 et calculer une médiane puis les quartiles de la série.

Correction On utilise la colonne des cumuls.

- Les 25 % de la population sont atteints pour les familles sans enfant. Donc le 1er quartile est 0 enfant.
- Les 50 % de la population sont atteints pour les familles avec un enfant ou moins. Donc la médiane est 1 enfant.
- Les 75 % de la population sont atteints pour les familles avec deux enfants. Donc le 3^{e} quartile est 2 enfants.

Fréquences en % des familles avec	en 2009	cumuls
Aucun enfant	45,76	45,76
1 enfant	24,53	70,29
2 enfants	20,51	90,80
3 enfants	6,71	97,51
4 enfants ou plus	2,49	100
Ensemble	100	

REMARQUE : Pour une série regroupée par classes, les valeurs brutes prises par le caractère ne sont pas accessibles. Il est possible d'obtenir une approximation d'une médiane et des quartiles par lecture graphique sur le polygone des fréquences cumulées croissantes.

Exemple

Déterminer graphiquement une médiane et les quartiles de la série constituée par les tailles des exploitations agricoles professionnelles en 2005 en Franche-Comté.

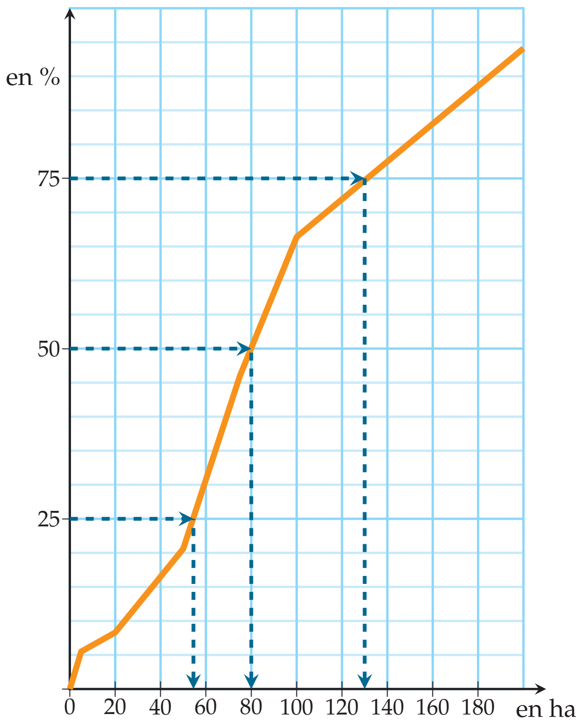
	Effectifs
Moins de 5 ha	370
De 5 à moins de 20 ha	190
De 20 à moins de 50 ha	840
De 50 à moins de 75 ha	1720
De 75 à moins de 100 ha	1380
De 100 à moins de 200 ha	1880
200 ha et plus	400
Ensemble	**6780**

Source Insee : Enquête structure des exploitations 2005

	F.C.C. en %
Moins de 5 ha	5,5
De 5 à moins de 20 ha	8,3
De 20 à moins de 50 ha	20,6
De 50 à moins de 75 ha	46
De 75 à moins de 100 ha	66,4
De 100 à moins de 200 ha	94,1
200 ha et plus	100

Correction

Polygone des fréquences cumulées croissantes des tailles des exploitations agricoles de la région Franche-Comté en 2006.



Par lecture graphique, on lit que :

- le 1$^{\text{er}}$ quartile est 55 ha ;
- une médiane est 80 ha ;
- le 3$^{\text{e}}$ quartile est 130 ha.

3. Moyenne

DÉFINITION : Moyenne

La **moyenne** d'une série statistique se note $\overline{x}$.

$$\overline{x} = \frac{\text{somme totale des valeurs prises par le caractère}}{\text{nombre de valeurs}}$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_p$ désignent les p modalités du caractère d'une série statistique et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ désignent les effectifs correspondants, alors

$$\overline{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + n_3 \times x_3 + \cdots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_p}$$

Cours - Méthodes

PROPRIÉTÉ

Si $x_1, x_2, \dots, x_p$ désignent les p modalités du caractère d'une série statistique, et $f_1, f_2, \dots, f_p$ désignent les fréquences correspondantes alors,

$$\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + \cdots + f_p \times x_p$$

PREUVE Posons $N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p$

$$\overline{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + n_3 \times x_3 + \cdots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p}$$

$$\overline{x} = \frac{n_1 \times x_1}{N} + \frac{n_2 \times x_2}{N} + \frac{n_3 \times x_3}{N} + \cdots + \frac{n_p \times x_p}{N}$$

$$\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + \cdots + f_p \times x_p$$

MÉTHODE 3 Calculer une moyenne à partir des fréquences

► Ex. 24 p. 18

Exercice d'application Calculer le salaire net annuel moyen en France en 2005.

Régions	Fréquences (en %)	Salaires (en euros)
Région Parisienne	25,3	29 237
Bassin Parisien	15,7	20 318
Nord	5,8	20 501
Est	8	20 946
Ouest	12,1	19 891
Sud-Ouest	9,3	20 542
Centre-Est	11,9	25 811
Méditerranée	10	20 993
DOM	1,8	20 495

Source : DADS (exploitation au 1/12 en 2005), Insee

Correction $\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + \cdots + f_p \times x_p$

Ici, après avoir exprimé les fréquences sous forme décimale :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= 0,253 \times 29\,237 + 0,157 \times 20\,318 + 0,058 \times 20\,501 + 0,08 \times 20\,946 + 0,121 \times 19\,891 \\ &\quad +0,093 \times 20\,542 + 0,119 \times 25\,811 + 0,1 \times 20\,993 + 0,018 \times 20\,495 = 23\,308,6\end{aligned}$$

Le salaire annuel net moyen en France en 2005 était d'environ 23 308 €.

REMARQUE : Pour une **série triée en classes**, la répartition à l'intérieur d'une classe est souvent considérée comme **homogène.** La valeur prise par le caractère est supposée unique et égale au **centre de la classe**. Le centre c de la classe $[a; b[$ vaut : $c = (a + b) \div 2$.

Exemple

Déterminer l'âge moyen d'un demandeur d'emploi dans les Bouches-du-Rhône en 2009.

Tranche d'âge	Nombre de demandeurs
$[15; 25[$	24 146
$[25; 55[$	107 761
$[55; 65]$	29 441

Source : INSEE, RP2009 exploitations principales

Correction

- Le centre de la classe $[15; 25[$ est 20 ;
- celui de la classe $[25; 55[$ est 40 ;
- celui de la classe $[55; 65[$ est 60.

$$\overline{x} = \frac{24146 \times 20 + 107761 \times 40 + 29441 \times 60}{24146 + 107761 + 29441}$$

soit $\overline{x} \approx 40,66$

L'âge moyen d'un demandeur d'emploi dans les Bouches-du-Rhône en 2009 était d'environ 41 ans.

S'entraîner

Activités mentales

1 Calculer la moyenne de la série ci-dessous :

8 ; 14 ; 10 ; 12 ; 11.

2 Déterminer une médiane de la série ci-dessous :

0 ; 2 ; 5 ; 8 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 20.

3 Déterminer le 1er quartile de la série ci-dessous :

2 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15 ; 17 ; 20.

4 Marc a obtenu 12 et 7 aux deux premiers devoirs d'Anglais.

Quelle note doit-il avoir au prochain devoir pour avoir une moyenne trimestrielle de 11 (sans pondération) ?

5 Donner une série statistique d'effectif total 3 dont :

- une médiane est 8 ;
- la moyenne est 7 ;
- l'une des valeurs est 4.

6 La moyenne de Jean en physique est 8 sur 20.

Son professeur lui rend une dernière interrogation où il a obtenu la note de 11 sur 20.

La moyenne de Jean a-t-elle augmenté ou diminué ?

7 Donner une médiane (m), le premier (Q_1) et le troisième (Q_3) quartile de chacune des séries suivantes représentées sous forme de tableau.

1)

Valeur	5	7	8	9	10	12	14
FCC en %	7	23	32	48	63	82	100

2)

Valeur	5	7	8	9	10	12	14
ECC	7	12	16	23	26	29	32

8 L'étude d'un caractère quantitatif donne les résultats regroupés dans le tableau suivant. Indiquer :

1) l'effectif total N ;
2) la position du premier quartile ;
3) l'étendue.

Valeur	2	4	5	8	9	10	13
Effectif	2	2	6	15	7	5	2

Effectifs, fréquences

9 Voici un tableau présentant les effectifs des élèves scolarisés en classe de troisième à Mathland suivant leur avance ou leur retard de scolarité.

	Filles	Garçons	Total
En avance	12 780	13 434	26 214
Âge normal	275 260	254 831	530 091
1 an de retard	92 471	119 785	212 256
2 ans ou plus de retard	10 677	13 197	23 874
Ensemble	391 188	401 247	792 435

1) Combien de filles ont moins d'un an de retard ?
2) Combien de garçons sont au plus à l'âge normal ?
3) Quelle est la proportion d'élèves :
   a) en avance ? b) en retard ?
4) Pour comparer les catégories entre elles, on se propose de construire un diagramme en barres triple des fréquences.
   a) Calculer les fréquences de trois séries.
   b) Construire le diagramme à barres comparatif des trois séries.

10 **Répartition par série**

Le tableau suivant donne les effectifs des classes de Premières au lycée Tartaglia de Sesaville pour l'année scolaire 2014-2015.

Filière	Filles	Garçons
ES	67	35
L	36	
S	51	74
ST2S	64	6
STMG		41
Total	249	168

1) Retrouver les deux données manquantes du tableau.
2) Déterminer la proportion de filles :
   a) dans l'ensemble des élèves de Première ;
   b) parmi les élèves de premières ES ;
   c) parmi les élèves de chacune des autres filières.
3) Dans quelles séries les filles sont-elles :
   a) sous-représentées ? b) sur-représentées ?

11 Radar (d'après Bac L, juin 2011)

En ville, la vitesse est limitée à $50\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Le tableau ci-dessous indique les vitesses dépassant la limite autorisée lors d'un contrôle avec un radar.

Vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$	51	52	53	54	55
Nombre de voitures	5	6	5	5	12
Vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$	56	57	58	59	60
Nombre de voitures	7	6	7	6	4
Vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$	61	62	63	64	65
Nombre de voitures	5	6	5	5	11
Vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$	66	67	68	69	70
Nombre de voitures	8	6	7	6	3

Dans un compte-rendu de ce contrôle, on peut lire : « *Un quart des automobilistes en infraction le sont pour une vitesse n'excédant pas de* $5\,km\cdot h^{-1}$ *la limite autorisée , la moitié des automobilistes en infraction n'excèdent pas la vitesse autorisée de plus de* $10\,km\cdot h^{-1}$*, et 75 % des automobilistes en infraction n'excèdent pas la vitesse autorisée de plus de* $15\,km\cdot h^{-1}$ ».

Que penser de ces affirmations ?

12 Prévention routière (d'après Bac L, juin 2011)

Suite à l'étude de l'exercice 11, des aménagements urbains sont mis en place afin de réduire la vitesse des automobilistes.

Un sondage est alors réalisé auprès de 250 d'entre eux.

Il leur est demandé si les mesures mises en place ont modifié leur comportement à cet endroit.

Voici les résultats :

	Homme	Femme
A modifié ses habitudes	51	38
N'a pas modifié ses habitudes	84	30
Sans opinion	15	32

1) Quel est le pourcentage de conducteurs qui ont déclaré avoir modifié leurs habitudes ?

2) Parmi les femmes interrogées, quel est le pourcentage de celles qui déclarent avoir modifié leurs habitudes ? Même question pour les hommes.
Commenter ces résultats.

3) Parmi les personnes ayant modifié leur comportement, quel est le pourcentage de femmes ? D'hommes ? Cela confirme-t-il l'analyse précédente ?

13 Dans la peau d'un proviseur INFO

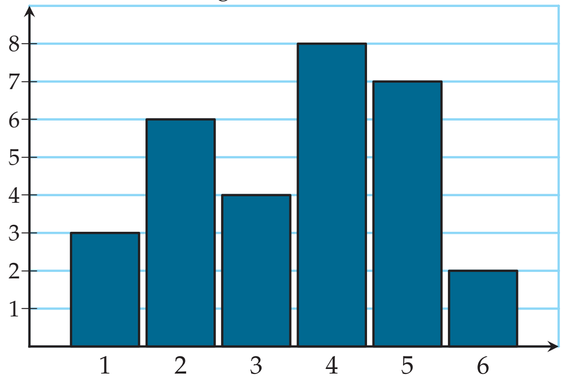
Le proviseur du lycée Tartaglia de Sesaville (voir exercice 10) souhaite présenter les résultats de son enquête lors de la réunion de rentrée aux parents d'élèves. Il a besoin d'un graphique qui soit le plus explicite possible pour son diaporama. Proposer plusieurs types de graphiques et conseiller le proviseur dans son choix.

14 Nombre d'enfants

Une enquête réalisée auprès d'un groupe d'élèves pour connaître le nombre d'enfants présents dans leur foyer est représentée par le graphique ci-dessous.

1) Déterminer les fréquences des différentes modalités de ce caractère.

2) Construire le diagramme circulaire de cette série.



15 Les 7 nains

Le minerai de fer de la mine des sept nains contient 40 % de fer pur.

1) Les sept nains ont extrait 75 kg de minerai de fer pour fabriquer l'armure du cheval du prince charmant qui est en fer pur (l'armure, pas le cheval !). Combien pèsera cette armure ?

2) Ils ont par ailleurs besoin de 150 kg de fer pur. Quelle masse de minerai leur faut-il encore extraire pour l'obtenir ?

3) Sur les 150 kg de fer pur, 18 kg vont être transformés en épée pour le prince charmant. Quel pourcentage du fer pur va devenir épée ?

Médiane et quartiles

16 ► MÉTHODE 1 p. 12

Monsieur Chasles, professeur de Mathématiques, s'est rendu compte qu'une grande majorité de ses élèves de 2e ne connait pas les identités remarquables. Il a décidé de leur faire une petite interrogation de 5 min tous les jours pour les encourager à les apprendre. Il arrêtera quand la médiane des notes, sur 5, sera strictement supérieure à 4. Voici les notes d'aujourd'hui :

2 ; 2 ; 2 ; 5 ; 1 ; 4 ; 4 ; 0 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 4 ; 2 ; 1 ; 2 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 3 ; 0 ; 4 ; 2 ; 1 ; 5 ; 5 ; 5 ; 3 ; 4 ; 2 ; 5 ; 5.

1) Y aura-t-il une interrogation demain ? Justifier.

2) Reformuler plus simplement la condition de M. Chasles pour qu'il arrête ses interrogations.

17 Il y a 36 élèves dans la classe de Ludwig. Leur professeur d'histoire leur a communiqué les notes sur 20 obtenues au dernier devoir surveillé : 8 ; 7 ; 12 ; 18 ; 6 ; 11 ; 10 ; 9 ; 13 ; 6 ; 17 ; 5 ; 8 ; 13 ; 11 ; 12 ; 10 ; 9 ; 7 ; 15 ; 12 ; 12 ; 12 ; 14 ; 8 ; 10 ; 8 ; 9 ; 15 ; 16 ; 14 ; 12 ; 6 ; 2 ; 14 ; 5.

Ludwig et ses amis Wolfgang et Hector ont eu respectivement 9, 10 et 11. Ils voudraient savoir dans quelle moitié de classe ils se situent.

Quelle caractéristique de cette série statistique peuvent-ils calculer pour avoir la réponse ?
Justifier et faire le calcul.

18 Lors d'un concours par équipe de sept, chaque membre de l'équipe subit une épreuve et se voit attribuer un score sur 100. Les deux équipes dont le score médian est le plus élevé sont qualifiées pour la finale.

	Équipe 1	Équipe 2	Équipe 3
Joueur 1	73	22	86
Joueur 2	54	36	81
Joueur 3	25	78	57
Joueur 4	48	67	21
Joueur 5	35	59	27
Joueur 6	62	41	92
Joueur 7	59	72	13

1) Quelles seront les deux équipes qualifiées ? Justifier.

2) Cette manière de sélectionner les équipes parait-elle pertinente ? Commenter.

19 ► MÉTHODE 2 p. 12

De 1985 à 2010, les températures moyennes relevées au mois de janvier dans la ville de Luxembourg sont les suivantes.

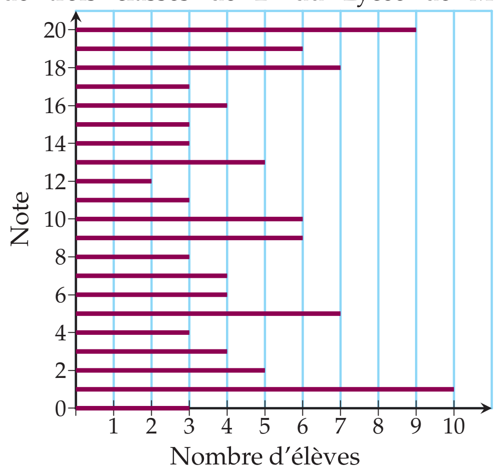
-4,4 ; 1,1 ; -4,3 ; 4,3 ; 2,1 ; 2,4 ; 0,8 ; 0,6 ; 2,7 ; 2,4 ; 1,0 ; -1,2 ; -2,4 ; 2,1 ; 2,9 ; 1,7 ; 1,8 ; 1,6 ; 0,3 ; 1,5 ; 3,2 ; 0,9 ; 6,1 ; 5,1 ; -0,7 ; -0,9. *(source : http ://www.statistiques.public.lu)*

1) Déterminer les quartiles et la médiane de cette série.

2) Interpréter les valeurs trouvées en écrivant deux phrases sans utiliser les mots :

a) quartile ; **b)** médiane.

20 Voici les notes au dernier contrôle commun de trois classes de 2e du Lycée de Mathyville .



Déterminer les premier et troisième quartiles ainsi qu'une médiane afin de partager les trois classes en quatre groupes d'aide personnalisée.

21 Voici les tailles des joueurs de quatre équipes du groupe B de l'Euroleague de basket 2008-2009.

SLUC - NANCY 1,94 – 1,93 – 1,86 – 1,96 – 1,95 – 1,96 – 1,87 – 2,14 – 2,08 – 2,06 – 2,03 – 2,04

Barcelone (Esp) 1,92 – 1,86 – 1,92 – 2,00 – 1,92 – 2,07 – 1,92 – 1,96 – 2,06 – 2,12 – 2,09 – 2,16

Panathinaikos (Gr) 1,96 – 1,93 – 1,97 – 1,93 – 2,02 – 1,95 – 1,93 – 2,06 – 2,04 – 2,08 – 2,09 – 2,10

Kaunas (Lit) 1,95 – 1,98 – 1,85 – 1,97 – 2,04 – 2,03 – 2,16 – 2,16 – 2,13

(source : revue « Couguars' News n°185 »)

1) Calculer la médiane et les quartiles des tailles des joueurs de basket pour chacune des équipes.

2) Comparer ces marqueurs aux résultats des équipes. Y a-t-il une corrélation ?

22 Voici la durée moyenne du jour dans différentes villes de notre planète obtenue par un calcul à partir de leur position.

	Oslo	Madrid	Mexico
Janvier	06 : 54	09 : 40	11 : 06
Février	09 : 13	10 : 41	11 : 31
Mars	11 : 52	11 : 58	12 : 03
Avril	14 : 38	13 : 19	12 : 36
Mai	17 : 11	15 : 00	13 : 03
Juin	18 : 41	15 : 20	13 : 16
Juillet	17 : 53	14 : 43	13 : 09
Août	15 : 31	13 : 43	12 : 46
Septembre	12 : 49	12 : 26	12 : 14
Octobre	10 : 05	11 : 06	11 : 41
Novembre	07 : 32	09 : 56	11 : 12
Décembre	06 : 02	09 : 19	10 : 58

1) Déterminer l'étendue, la médiane et les quartiles de chacune des séries.
2) Représenter graphiquement les trois séries sur un même graphique. Commenter.
3) Pour chaque série, rechercher la latitude. Calculer la différence $Q3 - Q1$. Que remarque-t-on ?

23 Voici la distribution des salaires nets annuels moyens en euros, en France métropolitaine, en 2008, dans le B.T.P.

	Cadres	Employés	Ouvriers
1^er^décile	26 421	13 602	13 866
1^er^quartile	32 204	15 375	**15 790**
Médiane	40 903	**18 158**	18 403
3^e^quartile	55 064	21 787	21 456
9^e^décile	**78 257**	25 984	24 986

Source : http ://www.data-publica.com/. D'après Insee,DADS 2008

1) Faire une phrase pour donner un sens au nombre mis en gras dans la colonne Employés.
2) Faire une phrase pour donner un sens au nombre mis en gras dans la colonne Ouvriers.
3) Rechercher le sens de « premier décile » et « neuvième décile ». Faire une phrase pour donner un sens au nombre mis en gras dans la colonne Cadres.
4) Est-ce qu'au moins 10 % des cadres ont un salaire inférieur à celui d'au moins 90 % des employés ? Justifier.

Moyenne

24 ► MÉTHODE 3 p. 14
Calculer la moyenne de cette série statistique.

Valeur	2	3	4	5	6	7	8
Effectif	5	6	0	12	10	4	3

25 Voici les résultats du sondage « Combien de fois par semaine consultez-vous le cahier de texte en ligne ? » réalisé auprès des élèves de 2^e^Z.
Quel est le nombre moyen de connexions ?

Nombre de connexions	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'élèves	2	4	3	4	8	9	4	1

26 Voici les résultats d'un sondage sur la pointure de chaussure des clients du magasin TOPCHAUSS.
Quelle est la pointure moyenne de ses clients ?

Pointure	35	36	37	38	39	40
Fréquences en %	2,3	4,3	7,6	10,8	11,4	13,6
Pointure	41	42	43	44	45	46
Fréquences en %	12,7	10,3	8,4	8,1	5,3	5,2

27 Nathalina lance un dé à 6 faces 200 fois.
À partir des résultats présentés dans le tableau, calculer la moyenne des nombres indiqués par le dé.

Face	1	2	3	4	5	6
Fréquences en %	15	16,5	16	14	18,5	20

28 Voici les effectifs d'élèves par âge dans le pré-élémentaire pour l'année 2010-2011 fournis par le site du Ministère de l'Éducation Nationale.

Âge en année	Public	Privé	Total
2	84 852	26 806	111 658
3	704 133	93 134	797 267
4	725 795	96 027	821 822
5	702 469	95 480	798 949
6	8 906	1 532	10 438
Total	2 226 155	312 979	2 539 134

1) Calculer les proportions d'élèves de chaque catégorie d'établissement pour chaque âge.
2) Calculer l'âge moyen des élèves dans le public puis dans le privé puis pour l'ensemble des élèves.

29 Afin de renouveler le mobilier d'un lycée, le proviseur demande d'effectuer une enquête sur la taille de 100 élèves. Voici le tableau obtenu, où les tailles sont exprimées en cm.

165	159	158	185	168	170	154	166	159	156
164	163	185	169	157	189	164	185	178	168
160	163	164	165	158	185	184	177	186	156
170	155	190	187	157	173	158	155	156	150
178	183	157	179	178	190	150	182	177	153
182	159	150	160	178	176	167	164	189	188
157	161	170	169	179	171	173	169	166	164
187	187	165	154	189	159	156	158	171	189
159	159	166	169	187	190	188	168	158	161
153	170	155	165	182	156	179	169	176	168

1) Regrouper ces données en classes de même amplitude en reproduisant et complétant le tableau suivant. Calculer la moyenne de cette série.

Classe	$[150;160[$	...
Effectifs		

2) Le résultat du calcul de la moyenne à l'aide des données brutes a donné 169,3 cm. Comparer cette valeur avec celle trouvée à partir des données triées.
3) Le proviseur souhaite inclure ces données dans un rapport. Proposer plusieurs types de représentations de cette série. Quelle représentation est la plus pertinente ? Justifier.

30 Une grande enseigne de magasin de meubles a fait tester la solidité des tiroirs de meubles de cuisine avant commercialisation. Un robot a ouvert et fermé inlassablement des tiroirs jusqu'à ce qu'ils cassent. Le tableau suivant indique le pourcentage de tiroirs cassés lors des tests en fonction du nombre d'ouvertures/fermetures au moment de la rupture du tiroir.

Point de rupture	Fréquence en %
$[0;5\,000[$	8
$[5\,000;25\,000[$	17
$[25\,000;50\,000[$	45
$[50\,000;150\,000[$	18
$[150\,000;200\,000]$	12

Quel est le nombre d'ouvertures/fermetures moyen avant qu'un tiroir ne casse ?

31 Dans un lycée, le devoir commun de mathématiques organisé en seconde a donné les résultats suivants.

Classe	Effectif	Moyenne
Seconde 1	35	9,8
Seconde 2	31	10,2
Seconde 3	34	8,7
Seconde 4	32	11,4
Seconde 5	35	10,6
Seconde 6	16	12,6

Le professeur de mathématiques de la seconde 1 demande à ses élèves de calculer la moyenne de tous les élèves de seconde.
Un élève donne alors très rapidement comme réponse 10,55. A-t-il raison ? Justifier.

32 Le directeur commercial d'une entreprise a fixé comme objectif à ses vendeurs de réaliser sur l'année un chiffre d'affaires mensuel moyen de 28 500 €.
Un vendeur a obtenu les résultats suivants sur les onze premiers mois.

Janvier	Février	Mars	Avril
32 000	27 200	26 400	28 500
Mai	Juin	Juillet	Août
29 300	32 100	31 000	24 700
Septembre	Octobre	Novembre	
26 100	28 600	22 100	

Quel chiffre d'affaires doit-il réaliser en décembre pour atteindre l'objectif fixé ?

33 L'équipe de baseball de Sesamaville a participé au championnat de France avec 19 autres équipes. Pour le classement, un match gagné rapporte 3 points, un match nul rapporte 1 point et un match perdu ne rapporte pas de point. À la fin des 19 matchs, l'équipe est très fière d'avoir gagné 8 matchs.

Mais combien en a-t-elle perdu, sachant que l'équipe a une moyenne d'environ 1,58 points par match ?

S'entraîner

Problèmes

34 **Grand Prix** ALGO

Voici les résultats (en min:s pour un tour) des qualifications du grand prix de formule 1 de Hongrie 2012.

1 : 20.953	1 : 21.366	1 : 21.416	1 : 26.178
1 : 22.343	1 : 22.847	1 : 21.715	1 : 22.380
1 : 22.723	1 : 23.250	1 : 23.576	1 : 21.939
1 : 21.730	1 : 21.844	1 : 21.900	1 : 24.167
1 : 21.895	1 : 21.895	1 : 22.300	1 : 21.813
1 : 25.244	1 : 25.476	1 : 25.916	1 : 21.483

1) Calculer le temps moyen au tour.

2) Un tour de circuit mesure 4,381 km.
Calculer la vitesse moyenne sur un tour.

3) Un journaliste a écrit : « *un quart des pilotes s'est qualifié en moins d'une minute et 22 secondes !* ».
Commenter.

4) Écrire un algorithme permettant au journaliste de calculer la moyenne au tour sur les 20 grands prix de la saison en rentrant les 20 temps moyens de chaque grand prix.

35 **Dépense durant les soldes**

Le montant des dépenses (en euros) de chaque client lors d'une journée de soldes a été relevé et trié dans le tableau ci-dessous où les fréquences sont exprimées en pourcentage.

Classe	[10 ;30[	[30 ;50[	[50 ;70[	[70 ;90[	[90 ;110[	[110 ;130]
Fréquences	15	25	10	20	10	20

1) Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.

2) Déterminer par lecture graphique, une approximation
- de la médiane ;
- du premier quartile ;
- du troisième quartile.

3) Interpréter ces résultats.

4) Déterminer une approximation de la moyenne.
La lecture graphique est-elle possible ?
Interpréter ce résultat.

36 **Les cigognes sont passées (d'après Bac L, juin 2003)**

Les tailles sont exprimées en centimètre.

Partie A : à la maternité « Beaux jours »

Sur la totalité du mois de janvier 2012, il y a eu 57 nouveau-nés à la maternité « Beaux jours ».
Leur taille est donnée dans le tableau ci-dessous.

Taille	46	47,5	48	48,5	49	49,5	50	50,5	51	51,5	52	52,5	53
Effectifs	1	2	3	5	5	7	9	8	7	5	2	2	1

1) Calculer la moyenne puis la médiane des tailles de ces 57 nouveau-nés en précisant la démarche.

2) Calculer le pourcentage de nouveau-nés ayant une taille inférieure ou égale à 49 cm.
Donner la réponse arrondie à 0,1 %.

3) Parmi toutes ces tailles, déterminer la plus petite taille t telle qu'au moins les trois quarts des nouveau-nés aient une taille inférieure ou égale à t cm.
Quel paramètre de la série des tailles a été ainsi trouvé ?

Partie B : à la maternité « Bon accueil »

L'étude statistique de la taille des 64 nouveau-nés durant le même mois de janvier 2012 à la maternité « Bon accueil » a donné les résultats suivants :

- Minimum : 46
- Maximum : 53
- Moyenne : 49,3
- Médiane : 49
- 1^er^ quartile : 48
- 3^e^ quartile : 50,5

1) Des deux maternités, une seule possède un service pour les naissances prématurées.
Les résultats précédents permettent-ils de trouver laquelle ? Justifier votre réponse.

2) Les deux maternités sont les seules de la ville.

a) Calculer la moyenne des tailles des nouveau-nés, en janvier 2012, dans les maternités de cette ville.

b) Les données de l'énoncé permettent-elles de déterminer la médiane des tailles des nouveau-nés des deux maternités réunies ?
Si oui, la déterminer ; sinon expliquer pourquoi.

37 Engrainons... ALGO

L'entreprise Pouss'Bio teste un engrais non chimique. Ses chercheurs souhaitent planter plusieurs lots de 500 graines pour essayer plusieurs dosages de leur produit. Afin de mesurer son efficacité, ils vont chaque jour compter le nombre de graines ayant germé. Ils souhaitent reporter leur décompte dans un logiciel qui déterminera pour chaque lot si les trois quarts des graines ont germé.

1) Le nombre de graines germées au fil des jours constitue une série statistique. De quelle caractéristique les chercheurs ont-ils besoin pour leur étude ?
2) Préparer un algorithme qui, après l'entrée de la date, du numéro du lot et du nombre de graines ayant germé ce jour, indiquera si les trois quarts des graines ont germé.

38 Précipitons-nous ALGO INFO

Les précipitations mensuelles (en mm) de trois villes, Wellington, Sydney et Cork, ont été relevées pendant une année dans le tableau ci-dessous.

Mois	Wellington	Sydney	Cork
J	72	103,3	138,3
F	62	117,4	115,6
M	90	131,2	98,7
A	100	127,2	67,7
M	117	123,3	83,4
J	147	128,1	68,8
J	136	98,1	66,4
A	123	81,5	88,7
S	100	68,7	96,4
O	115	76,9	125,4
N	99	83,1	111,1
D	86	78,1	133,8

1) Établir, à l'aide d'un tableur, un diagramme à barres représentant les données de ce tableau.
2) Étudier, commenter et interpréter les différences de précipitations entre ces trois lieux.
3) Comment expliquer qu'il ne pleuve qu'un nombre entier de mm à Wellington ?
4) Écrire un algorithme qui trie par ordre croissant les précipitations mensuelles d'une ville.

39 Le cœur a ses raisons... ALGO

Sébastien, étudiant de 19 ans, veut s'inscrire dans une station balnéaire pour un séjour d'été où il aurait des chances de rencontrer des jeunes femmes de son âge.

Prenant quelques références, les stations lui fournissent la moyenne d'âge des inscrites.

Station A : 19 ans. Station B : 31 ans.

Sans hésiter, il s'inscrit dans la station A !

1) Le choix de Sébastien est-il judicieux ?

Les tableaux ci-dessous indiquent les âges des inscrites dans les deux stations.

Station A	
Âge	Effectif
2	3
4	1
5	1
7	1
10	1
11	2
34	1
35	2
50	1
58	1

Station B	
Âge	Effectif
18	1
19	5
20	2
45	2
46	1
47	1
48	1
50	1

2) Pour les deux stations :
   a) donner la fréquence de la valeur 19 ;
   b) calculer la médiane et les quartiles ;
   c) calculer l'étendue ;
   d) déterminer la modalité de la plus grande fréquence.
3) Finalement, le choix de Sébastien est-il judicieux ? Argumenter.
4) Écrire l'algorithme que Sébastien a utilisé pour calculer la fréquence de la valeur 19.

40 Astuce ALGO

Stéphane a eu 5 notes en devoir de mathématiques, toutes de même coefficient : 11, 14, 10, 12 et 8. Sans réfléchir il affirme que sa moyenne est 11.

1) A-t-il raison ?
2) Expliquer et justifier son raisonnement.
3) Écrire un algorithme permettant de répondre à la question avec la méthode de Stéphane.

Approfondir

41 Poisson d'avril ALGO

Une entreprise vend des boîtes de 100 g de maquereaux et effectue des relevés de masse (donnés en grammes) sur un échantillon de 200 boîtes et obtient les résultats ci-dessus.

Poids	Boîtes	Poids	Boîtes
95	1	101	27
96	1	102	68
97	1	103	48
98	3	104	21
99	4	106	3
100	22	107	1

1) Selon vous, quel est le réglage de la machine qui pèse la masse de maquereaux contenus dans chaque boîte ? Argumenter en calculant certains résumés statistiques de la série.
2) Le réglage semble-t-il correct ? Commenter.
3) Écrire un algorithme calculant le pourcentage de boîtes dont la masse est strictement inférieure à 100 g.

42 Who run the world ? ALGO

Voici des extraits du bilan d'un devoir commun dans un lycée comptant douze secondes.

- Dans les secondes 1 à 6, les 43 filles ont eu 8 de moyenne tandis que les 167 garçons ont eu 9,5.
- Dans les secondes 7 à 12, les 56 garçons ont eu 14,3 de moyenne tandis que les 134 filles ont eu 11,8.

1) Est-ce les filles qui ont eu les meilleurs résultats ?
2) Écrire un algorithme permettant de répondre à la question.

43 Made in... ALGO

La société Plastik possède 5 filiales dont voici les chiffres d'affaires de l'année écoulée.

Filiales	Budgets
Kanarabin	97 412 000
Bidond8le	97 420 000
Peau2iahourte	97 429 000
Gobe-lait	97 431 000
Pouce7	97 413 000

1) Déterminer, sans l'aide de la calculatrice, la moyenne des budgets des cinq sociétés de l'entreprise mère Plastik.
2) Écrire un algorithme qui permette de déterminer quelle entreprise a le plus gros chiffre d'affaires.
3) Écrire un algorithme qui permette de déterminer quelle entreprise a le chiffre d'affaire le plus faible.

44 Arpagon ALGO

PRENDSOU et SNIPSOU, deux PDG de deux entreprises du COINC 40, se prennent le bec.

- PDG de SNIPSOU : « *Je paye mieux mes salariés que vous ! Mes 128 employés ont un salaire moyen de* 1 850 € *et mes 32 cadres ont un salaire moyen de* 3 150 €, *contre* 1 600 € *pour vos employés et* 2 500 € *pour vos cadres.* »
- PDG de PRENDSOU : « *Détrompez-vous ! Le salaire moyen dans mon entreprise est plus important que dans la vôtre pour mes 90 employés et 70 cadres.* »

1) Expliquer en quoi le PDG de PRENDSOU pense « détromper » celui de SNIPSOU.
2) Écrire un algorithme permettant de calculer la moyenne des salaires sur une entreprise.
3) Connaissant les salaires moyens de deux entreprises, écrire un algorithme permettant de savoir quelle entreprise paye le mieux ses salariés.

45 Souriez, vous êtes flashés ALGO

Les résultats d'un contrôle de vitesse dans une agglomération (vitesse limitée à $50\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) sont consignés dans le tableau ci-contre.

Vitesse en km/h	Effectif
[20 ;50[	104
[50 ;70[	54
[70 ;80[	13
[80 ;90[	7
[90 ;100[	5
[100 ;130]	2

1) Expliquer pourquoi les gendarmes ont choisi de regrouper les données avec les classes indiquées dans le tableau.
2) On suppose que, dans chaque classe, les éléments sont répartis de manière uniforme.
   a) Estimer la vitesse moyenne enregistrée.
   b) Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants.
   c) Déterminer graphiquement la vitesse médiane ainsi que les vitesses quartiles.
3) Écrire un algorithme qui programme le radar pédagogique situé en amont du radar ($\leqslant 50\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$: merci ; $> 50\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$: ralentir).
4) Après avoir recherché les amendes qu'encourent ceux qui roulent à trop grande vitesse, écrire un algorithme qui affiche les conséquences d'une vitesse excessive en fonction de la vitesse mesurée.

46 Aidons Élodie

ALGO INFO

Après avoir postulé et été acceptée sur un poste de secrétaire de direction dans deux entreprises différentes, Élodie cherche maintenant à comparer les salaires proposés avant de faire son choix.

Partie A : dans l'entreprise A

Elle ne trouve que le tableau suivant.

Salaires	Nombres d'employés
850	1
950	1
1000	5
1100	10
1250	12
1350	15
1450	12
3000	10
5000	4
10000	2

1) Calculer la moyenne des salaires.

2) Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile. Justifier.

3) Écrire un algorithme pour calculer une médiane de l'entreprise A.

Partie B : dans l'entreprise B

Elle obtient les indications suivantes.

- Le salaire moyen est 3 970 €.
- Le salaire médian est de 1 000 €.
- 25 % des employés ont un salaire inférieur à 950 € et 25 % ont un salaire supérieur à 1 100 €.
- Le salaire minimum est de 850 €.

1) Établir, à l'aide d'un tableur, un diagramme à barres représentant les données de ce tableau.

2) Comment expliquer une telle différence de salaire moyen ?

3) Quelle entreprise conseiller à Élodie ?

47 Schling

ALGO

Une agence bancaire a réalisé une enquête de marché sur la possibilité de faire payer les chèques bancaires aux clients émetteurs. 1500 chèques ont été étudiés.
Ils sont classés suivant leur montant, exprimé en euros, et les résultats de cette enquête figurent dans le tableau suivant.

Classe	Effectif n_i
$[0;20[$	16
$[20;40[$	41
$[40;60[$	94
$[60;80[$	165
$[80;100[$	220
$[100;120[$	300
$[120;140[$	253
$[140;160[$	237
$[160;180[$	95
$[180;200[$	54
$[200;220]$	25

1) Déterminer le pourcentage de chèques dont le montant est :

a) supérieur ou égal à 160 € ;

b) strictement supérieur à 100 € ;

c) supérieur ou égal à 100 € et strictement inférieur à 160 €.

2) Représenter l'histogramme des fréquences cumulées croissantes. On donnera chaque valeur approchée à 10^{-2} près.

3) On suppose que, dans chaque classe, les éléments sont répartis de manière uniforme.

a) Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.

b) Déterminer de manière graphique, la médiane de cette série statistique.

c) Dans le but de faire payer 20 % des clients, quel montant faut-il choisir comme seuil au-dessous duquel les chèques seront payants ?

d) Lorsque le montant d'un chèque est supérieur à 200 €, la banque décide de taxer à 0,5 % l'encaissement de ce chèque. Écrire un algorithme que doit mettre en place l'informaticien qui programme le logiciel de la banque pour lui permettre d'afficher la taxe en fonction de la valeur du chèque rentré.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Analyser les données brutes d'une série
- caractère
- type
- modalité

Déterminer et interpréter
- une médiane
- des quartiles
- des fréquences

Trier les données brutes d'une série
- en dressant un tableau d'effectifs
- en déterminant des classes

Construire et lire un graphique
- diagramme à barres
- histogramme
- polygone des fréquences cumulées croissantes

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Dans un groupe d'une classe de seconde, on demande l'âge de tous les élèves.
On obtient les résultats suivants : 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 16 et 16 ans.

48 Le caractère étudié est :

(a) l'élève
(b) l'âge de l'élève
(c) le groupe de cette classe de seconde
(d) l'ensemble des différents âges

49 Le caractère étudié est :

(a) quantitatif et la série est ordonnée
(b) qualitatif et la série est ordonnée
(c) quantitatif et la série est désordonnée
(d) qualitatif et la série est désordonnée

50 Il y a :

(a) plus de 10 modalités
(b) moins de 9 modalités

51 Le tableau d'effectifs de cette série est :

(a)

Âge	14	15	16
Effectifs	2	9	1

(b)

Âge	14	15	16
Effectifs	2	9	2

(c)

Âge	14	15	16
Effectifs	a	b	c

avec $a + b + c = 13$

(d) Les trois tableaux précédents sont faux

52 L'âge moyen et l'âge médian sont différents

(a) vrai
(b) faux

On étudie, dans un immeuble, le nombre d'enfants par logement. Voici le tableau d'effectifs obtenu.

Nombre d'enfants par logement	0	1	2	3	4
Effectifs	15	18	11	4	2

53 L'effectif total de cette série est égal à :

(a) 44 (b) 5 (c) 50 (d) 4

54 La moyenne est égale à :

(a) 1,5 (b) 3 (c) 2 (d) 1,2

55 La fréquence des logements sans enfant est :

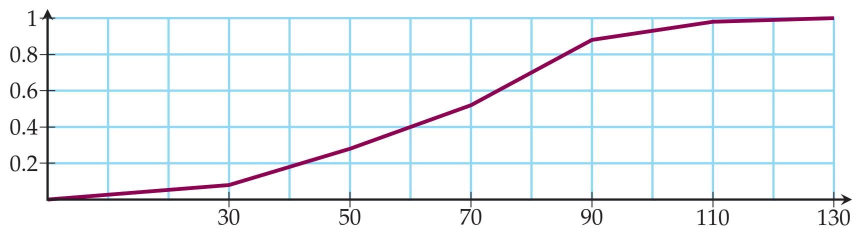
(a) 0,3 (b) 15 % (c) 0,5 (d) 40 %

56 La médiane de la série est égale à :

(a) 1 (b) 1,2 (c) 2 (d) 11

On étudie dans un immeuble la superficie (en m²) des logements.
Voici le tableau d'effectifs obtenu et le diagramme des fréquences cumulées croissantes de cette série.

Surface	[0 ;30[	[30 ;50[	[50 ;70[	[70 ;90[	[90 ;110[	[110 ;130]
Effectif	4	10	12	18	5	1



57 La formule donnant la moyenne est :

(a) $\dfrac{4 \times 15 + 10 \times 40 + 12 \times 60 + \ldots + 1 \times 120}{4 + 10 + 12 + 18 + 5 + 1}$

(b) $\dfrac{4 \times 15 + 10 \times 40 + 12 \times 60 + \ldots + 1 \times 120}{5}$

58 Le tableau des fréquences cumulées croissantes est :

(a)

Surface	[0 ;30[	[30 ;50[	[50 ;70[	[70 ;90[	[90 ;110[	[110 ;130]
FCC	0,08	0,2	0,24	0,36	0,1	0,02

(b)

Surface	[0 ;30[	[30 ;50[	[50 ;70[	[70 ;90[	[90 ;110[	[110 ;130]
FCC	0,08	0,28	0,52	0,88	0,98	1

59 La moyenne de la série est égale à :

(a) 65 (b) 59,4 (c) 80 (d) 64,8

60 Par lecture graphique, on peut en déduire que la superficie :

(a) est inférieure à 70 m² pour 70 % des logements
(b) est inférieure à 80 m² pour 70 % des logements
(c) est supérieure à 70 m² pour 30 % des logements
(d) est inférieure à 70 m² pour 27 logements

61

(a) Le premier quartile est compris entre 40 et 50
(b) Le premier quartile est compris entre 30 et 20
(c) La médiane vaut un peu moins que 70 m²
(d) Le troisième quartile vaut un peu moins que 80 m²

Travaux pratiques

TP 1 État marital des français au 1er janvier 2007

INFO

L'objet de ce T.P. est l'étude de la population totale de la France métropolitaine en fonction du sexe, de l'âge et de l'état matrimonial au 1er janvier 2007.

Un fichier de travail est disponible sur le manuel numérique en ligne.

Faire valider les résultats entre chaque question.

1) Comment interpréter le nombre 219 606 se trouvant dans la cellule E43 ?

2) Représenter la pyramide des âges pour la population française, au 1er janvier 2007.
Analyser le graphique obtenu. Compléter votre analyse à l'aide d'indicateurs pertinents.

3) Compléter les tableaux 2 et 3 donnant les fréquences de l'état matrimonial pour les hommes (majeurs) puis pour les femmes (majeures) et représenter la situation à l'aide de deux diagrammes circulaires. Commenter.

4) Comparer la situation matrimoniale des hommes et des femmes. Pour cela, réaliser un diagramme en barres comparatif des données des hommes et des femmes.

TP 2 Population légales 2009 pour deux départements

INFO

L'INSEE met régulièrement à disposition des statistiques sur les populations des communes de France. On s'intéresse ici au recensement de 2009. Les données sont disponibles *www.insee.fr*.

1 Le Gard

Ouvrir le fichier de travail du manuel numérique en ligne.

1) Trier les données par ordre croissant.
Dans combien de communes la population dépasse-t-elle 10 000 habitants ?

2) Les communes de plus de 10 000 habitants représentent-elles plus de 25 % des communes ?

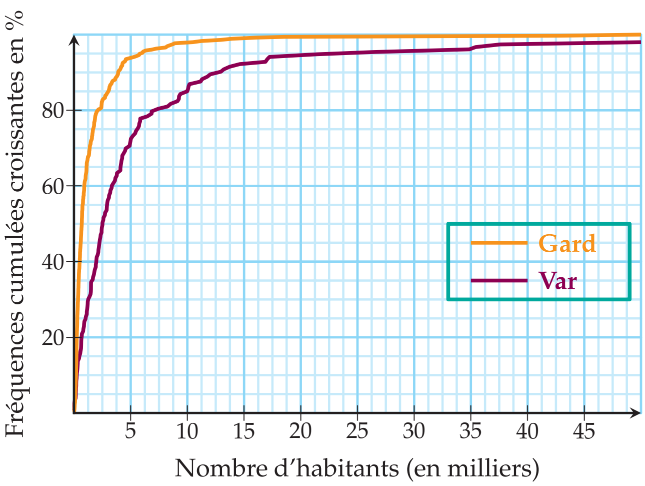
3) Calculer le nombre moyen d'habitants par commune dans le département du Gard.

a) Donner la médiane de cette série.

b) Quel est, selon vous, l'indicateur le mieux adapté pour analyser la structure de la population de ce département ?

2 Comparaison entre les départements du Var et du Gard

On considère ci-contre une portion des polygones des fréquences cumulées croissantes du nombre de communes en fonction de leur population, pour les départements du Var et du Gard.



1) Pour chacun des départements, donner la population présente dans 90 % des communes.

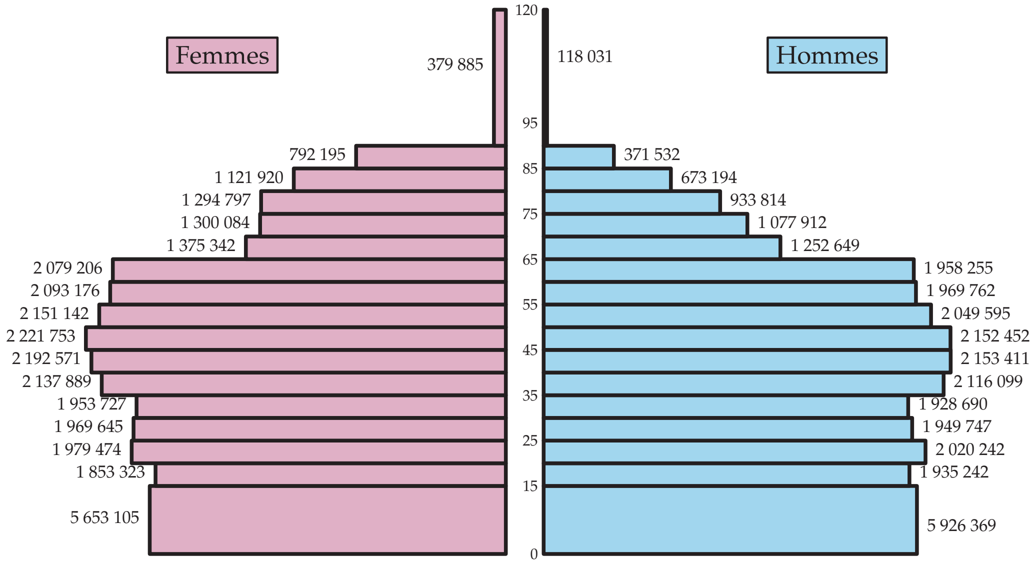
2) Comment interpréter que l'une de ces courbes est en- dessous de l'autre ?

TP 3 Étude comparative de la population française en 2011 et en 1946

INFO

Toutes les données ont été extraites du site de l'INSEE, dans le thème « Évolution de la population ».

1 Pyramide des âges en 2011



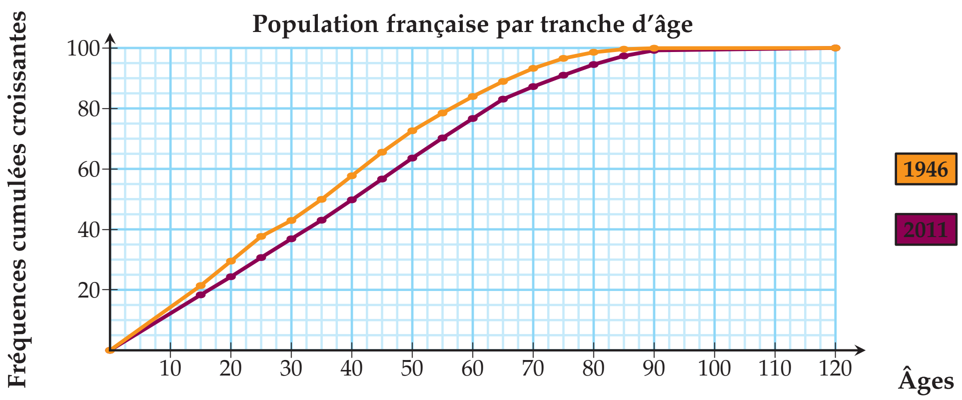
1) Calculer la moyenne d'âge des hommes et celle des femmes.

2) Calculer la médiane ainsi que les quartiles pour les deux séries.

3) À l'aide des indicateurs qui vous semblent pertinents, commenter la pyramide des âges.

2 Évolution de la population

Le graphique ci-dessous donne les courbes des fréquences cumulées croissantes de la population française par tranche d'âge en 1946 et en 2011.



1) Quelle est la signification du point de la courbe de 1946 de coordonnées (20 ; 30) ?

2) À partir du graphique ci-dessus, donner la médiane et les quartiles pour chacune des séries.

3) Comparer l'évolution de la répartition des âges en France entre 1946 et 2011.

Travaux pratiques

TP 4 Développement durable en Europe

INFO

Eurostat a fourni pour les 27 pays de l'Union Européenne des données sur le développement durable disponibles en téléchargeant les fichiers sur leur site.
On en a extrait trois séries statistiques concernant :

- la part des énergies renouvelables dans la consommation finale d'énergie (en %) ;
- le volume d'émission de gaz à effet de serre (en milliers de tonnes) ;
- le nombre d'habitants par pays de l'Union Européenne.

1 Traitement informatisé

Après avoir téléchargé le fichier de travail sur le manuel en ligne,

1) calculer la moyenne $\overline{x}$, la médiane m_e et les quartiles Q_1 et Q_3 pour chacune des séries.

2) Représenter chaque série statistique par un diagramme à barres.

2 Analyse des données

On va maintenant utiliser ces calculs.

1) L'émission de gaz à effet de serre de la France est-elle supérieure à la moyenne européenne ? Combien de pays émettent plus de gaz à effet de serre que la moyenne européenne ? Comparer la moyenne et la médiane. Comment expliquer une telle différence ?

2) Calculer la part d'émission de gaz à effet de serre de la France dans l'Union Européenne.

3) Comment expliquer la différence entre la moyenne des parts des énergies renouvelables dans la consommation finale des 27 pays de l'Union Européenne et pourcentage de l'U.E. qui apparaît sur le graphique ?

4) Pour chacun des pays de l'Union Européenne, calculer la quantité de gaz à effet de serre émise par habitant. Est-ce qu'un pays ayant une grosse part de consommation en énergie a une faible émission de gaz à effet de serre par habitant ?

Récréation, énigmes

Éducation aux médias *(source : www.statistix.fr)*

- Neuf Français sur dix appartiennent à l'écrasante majorité de la population, et pourtant, il est difficile d'en conclure quoi que ce soit. *Hervé Le Tellier, le Monde électronique 01/07/06.*
- Dans le journal Libération du 17-18 juin 2006, on pouvait lire le titre suivant page 14 :

  « Pour manger, un salarié sur dix a recours aux associations. »

  Combien de salariés en France auraient recours aux associations ?
  Plus loin dans l'article, on lit que, parmi les personnes faisant appel aux associations (de type banques alimentaires),

  « une sur dix est salariée »

  Quel est le pourcentage de lecteurs de Libération qui ont lu un titre erroné ?

STATISTIQUES PROBABILITÉS

2

Échantillonnage

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- ▶ Calculer une fréquence
- ▶ Interpréter une fréquence
- ▶ Calculer une probabilité
- ▶ Interpréter une probabilité

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net @

1 Aux congrès des héros, on trouve des Jedis (J), des chevaliers de la Table Ronde (T) et des elfes des Terres du milieu (E).

Héros	J	T	E
Effectifs à Londres	37	77	23
Effectifs à Baltimore	53	48	40

1) Dans quelle ville de congrès, les Jedis sont-ils les plus présents ?
2) Même question pour les chevaliers.
3) Pour ces deux relevés, calculer les fréquences de présence de chaque type de héros à $0,01$ près.

2 Un jeu consiste à miser sur le doigt des deux mains que va faire apparaître un animateur (qui ne connaît pas les paris).

1) Quelle est la probabilité de gagner ?
Répondre sans justifier.
2) Si je joue 10 fois, suis-je sûr de gagner ?
3) Si je joue 100 fois, suis-je sûr de gagner 10 fois ?
4) 10 personnes jouent. Elles ne connaissent pas le vote des autres. Est-on sûr qu'au moins l'une d'entre elles va gagner ?
5) 10 personnes jouent. Chacune a un vote différent des autres. Est-on sûr qu'au moins l'une d'entre elles va gagner ?

➤➤➤ Voir solutions p. 259

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Lancer de dé cubique

INFO

On utilise un dé bien équilibré. On le lance pour noter le numéro de la face supérieure.

1) a) On effectue 20 lancers. Proposer une répartition possible de ces lancers.

Faces	1	2	3	4	5	6
Effectifs						

b) Plusieurs solutions sont-elles possibles ?

c) Celle que vous avez choisie vous paraît-elle :

- probable ?
- improbable ?
- difficile à dire ?

2) Pour reproduire cette expérience, on utilise la feuille de calcul d'un tableur.
La fonction `ALEA` donne un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0;1[$.
La fonction `ENT` nous donne la partie entière d'un nombre.

a) Expliquer pourquoi `ENT(1+6*ALEA())` simule le lancer d'un dé équilibré.

b) Entrer cette fonction dans la case `A1`. La copier (`Ctrl C`)
Sélectionner la plage `A2:A100` (en écrivant `A2:A100` dans le sélectionneur de plage en haut à gauche) puis coller la formule (`Ctrl V`).

c) La formule `NB.SI(A1:A100;1)` permet de savoir combien il y a de 1 sur la plage `A1:A100`.
Donner l'effectif de chaque face.

d) Construire le diagramme en barres.

e) Appuyer sur `F9`. Qu'observe-t-on ?

> Expliquer le terme de fluctuation d'échantillonnage.

ACTIVITÉ 2 Lancé de dé décagonal

INFO

On lance un dé équilibré à 10 faces et on note le numéro de la face supérieure.

1) a) En utilisant un tableur, faire une colonne de 100 lancers d'un dé à 10 faces.

b) Afficher en cellule `A102` la fréquence des lancers supérieurs ou égaux à 4.
On utilisera la fonction `NB.SI(A1:A100;">=4")`.

c) Recalculer plusieurs fois et noter les résultats.

d) Quelle semble être la probabilité d'obtenir une face supérieure ou égale à 4 ?

2) On va maintenant faire 1 000 simulations de 100 lancers.

a) Sélectionner la plage `A1:A102`, puis la copier et la coller dans la plage `B1:ALL102`.

b) Sélectionner la plage des fréquences et faire un graphique de type ligne (points seuls).

c) Dans quel intervalle se situe la plupart des fréquences ?

3) a) Déterminer la proportion des fréquences comprises entre les 2 valeurs trouvées en **2c**.
On utilisera deux fois la formule `NB.SI` pour l'encadrement.

b) « Au moins 95 % des fréquences de nos 1 000 simulations sont dans cet intervalle ».
Est-ce plausible ?

> Expliquer le terme de fiabilité des simulations.

1. Échantillon, simulation et fluctuation

DÉFINITION : Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

REMARQUE : exemples d'expériences aléatoires :

- le lancer de dé ;
- un sondage d'opinion avant une élection ;
- le tirage de jetons dans une urne ou de cartes dans un jeu.

DÉFINITION : Échantillon

Un **échantillon** de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience.

REMARQUE : exemples d'échantillons.

- on lance une pièce 50 fois et on regarde si on obtient pile ;
- on tire 20 fois une carte d'un jeu de 32 cartes en la remettant et on regarde si c'est un cœur ;
- on interroge 1 000 personnes et on leur demande si elles voteront.

DÉFINITION : Fluctuation d'échantillonnage

Deux échantillons de même taille issus de la même expérience aléatoire ne sont généralement pas identiques.
On appelle **fluctuation d'échantillonnage** les variations des fréquences des valeurs relevées.

NOTATION :

- n est le nombre d'éléments de l'échantillon. C'est l'**effectif** ou la **taille de l'échantillon**.
  On dit que l'échantillon est de taille n.
- f_o est la **fréquence** du caractère observé dans l'échantillon.
- p est la **proportion effective** du caractère observé dans la population.

REMARQUE :
Plus la taille de l'échantillon augmente, plus les fréquences observées se rapprochent de p.

2. Prise de décision : intervalle de fluctuation (p est connu)

Protocole Soit une population pour laquelle on étudie la proportion d'un caractère.
On émet une hypothèse sur la proportion p du caractère étudié dans la population. On considère donc p comme connu car il a une valeur conjecturée.

Un échantillon de taille n de cette population est prélevé et on observe une fréquence f_o du caractère étudié.

La question Peut-on, à partir de l'observation de f_o, valider la conjecture faite sur p ?

La fréquence observée, f_o, est-elle proche ou éloignée de la probabilité ou proportion théorique, p ?

Cours - Méthodes

DÉFINITION : Intervalle de fluctuation

L'**intervalle de fluctuation au seuil de** 95 %, relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p qui contient la fréquence observée f_o dans un échantillon de taille n avec une probabilité égale à 0,95.

Remarques :

- Il n'existe pas d'intervalle dans lequel on trouverait f_o avec certitude (à moins de prendre l'intervalle $[0;1]$...) à cause de la fluctuation d'échantillonnage.
- Cet intervalle peut être obtenu de façon approchée à l'aide de simulations.

PROPRIÉTÉ

Soit p la proportion effective d'un caractère d'une population comprise entre 0,2 et 0,8 et f_o la fréquence du caractère dans un échantillon de taille n supérieure ou égale à 25.
f_o appartient à l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'environ 0,95.

Remarque : La taille de l'intervalle de fluctuation $\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$ diminue si n augmente.

MÉTHODE 1 Prendre une décision

► Ex. 18 p. 35

Dans les conditions de la définition et de la propriété :

- On émet une hypothèse sur la proportion du caractère de la population p.
- On détermine l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion p dans des échantillons de taille n.
  - Si f_o n'appartient pas à cet intervalle,
    on rejette l'hypothèse faite sur p **avec un risque d'erreur de 5%**.
  - Si f_o appartient à cet intervalle, on ne rejette pas l'hypothèse faites sur p.

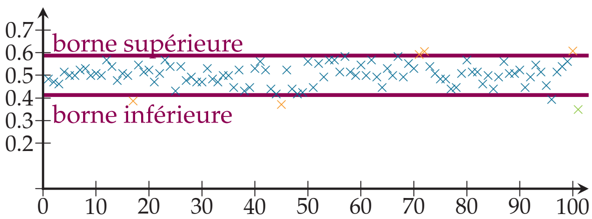
Exercice d'application

Dans la réserve indienne d'Aamjiwnaag, située au canada, à proximité d'industries chimiques, il est né entre 1999 et 2003, 132 enfants dont 46 garçons. Est ce normal ?

Correction On fait ici l'hypothèse P suivante : « le sexe d'un enfant qui nait dans cette réserve est un garçon avec une probabilité de 0,5 ».

La taille de l'échantillon est $n = 132$ ($n \geqslant 25$) et la fréquence observée est $f_o = \dfrac{46}{132} \approx 0,34$ avec $0,2 \leqslant f_o \leqslant 0,8$.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :
$$IF = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{132}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{132}}\right] \approx [0,41; 0,58].$$
$f_o \notin IF$ et on rejette l'hypothèse P.
La probabilité qu'un garçon naisse dans cette réserve n'est pas de 0,5.

Les 95% sont illustrés avec le graphique qui suit :
On simule 100 fois le comptage de garçons sur 132 naissances. Dans 94 simulations, la proportion des garçons nés se trouve dans l'intervalle de fluctuation.



3. Estimation : Intervalle de confiance (p est inconnu)

L'intervalle de fluctuation permet d'avoir un intervalle où se situe la proportion inconnue p avec une probabilité de 0,95 %.

PROPRIÉTÉ

On considère un échantillon de taille $n(n \geqslant 25)$ tel que $f_o \in [0,2;0,8]$.

Alors p appartient à l'intervalle $\left[f_o - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_o + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité de 0,95.

DÉFINITION : Intervalle de confiance

Un **intervalle de confiance au seuil de 95%**, relatif aux échantillons de taille n, est un intervalle centré autour de f_0 où se situe la proportion p du caractère dans la population avec une probabilité égale à 0,95.

L'intervalle $\left[f_o - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_o + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est donc appelé intervalle de confiance au seuil de 95 %.

PREUVE Cette symétrie dans les définitions d'intervalles de confiance et de fluctuation provient des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} f_o \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f_o \text{ et } f_o \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p \leqslant f_o + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } f_o - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \\ &\Leftrightarrow p \in \left[f_o - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_o + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \end{aligned}$$

MÉTHODE 2 Estimer la proportion d'un caractère

► Ex. 40 p. 38

- On réalise un échantillon de taille n et on y obtient une fréquence observée f_o.
- On construit l'intervalle de confiance à partir de n et f_o.

La proportion réelle dans la population se situe dans cet intervalle **avec une probabilité d'environ 0,95**.

Exercice d'application

Le 4 mai 2007 soit deux jours avant le second tour des élections présidentielles, on publie le sondage suivant réalisé auprès de 992 personnes :

S. Royal : 45%
N. Sarkozy : 55%

Interpréter ce sondage.

Correction On calcule l'intervalle de confiance pour N. Sarkozy.

$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

$I = \left[0,55 - \frac{1}{\sqrt{992}}; 0,55 + \frac{1}{\sqrt{992}}\right]$

soit $I \approx [0,518; 0,582]$.

La proportion des votants en faveur de N. Sarkozy se trouvant dans $[0,518; 0,582]$ avec 95% de chance, on peut en déduire qu'il avait de grandes chances d'être élu.

Remarque : Les sondages sont souvent réalisés auprès d'environ 1000 personnes car cela permet de connaître la proportion d'un candidat à 3% près.

S'entraîner

Activités mentales

On donnera les résultats sous forme fractionnaire.

1 Une entreprise pharmaceutique souhaite savoir si une de ses machines dose correctement des gélules de paracétamol de 1g.
Pour cela, le responsable qualité prélève un lot de 513 pastilles et constate que 437 sont conformes.
La machine est considérée comme fonctionnelle si, sur 100 gélules, au moins 97 sont conformes.
Dans cette étude, quelle est :

1) la taille n de l'échantillon ?
2) la proportion théorique p ?
3) la fréquence observée f_0 ?

2 On estime qu'il y a 119 garçons pour 100 filles nées en Chine. Une chinoise est enceinte. Quelle est la probabilité que son enfant soit un garçon ?

3 Dans une usine automobile, une machine fabrique 230 pommeaux de levier de vitesse par heure.
Pour tester si les dimensions du pommeau sont bonnes, on mesure durant 30 min les produits fabriqués et on constate que 73 pommeaux ont des dimensions conformes.

Donner la proportion des pommeaux conformes parmi les pommeaux prélevés.

4 Dans une classe de seconde, on constate qu'il y a 12 garçons pour 24 filles. La répartition garçon/fille de cette classe est-elle conforme à la population française ?

5 Lors d'un sondage auprès de 1 000 personnes aux États-Unis avant les élections de 2012, on a recueilli une intention de vote de 52,2 % pour M. Obama contre 47,8 % pour M. Romney.

L'équipe de campagne de M. Obama pouvait-elle être sereine ?

6 Pour l'élection des délégués, Hermione fait un sondage sur 100 élèves.

Quelle est la précision de ses résultats ?

7 H.Potier fait effectuer un sondage et obtient que f_0 est dans l'intervalle $[32,3; 32,5]$.

1) Quelle valeur de f_0 a-t-il trouvé ?
2) Quelle est la taille de l'échantillon ?

Échantillon, simulation, fluctuation

8 Dédé possède un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.
On s'intéresse à la sortie du nombre 4.

1) Imaginer un échantillon de taille 30 puis compléter le tableau suivant qui résume votre échantillon.

Issue				
Effectif				

2) Proposer un tableau qui pourrait résumer un échantillon de taille 237 de l'expérience du lancer de dé, qui selon vous, est raisonnable.
3) Proposer un autre tableau pour un autre échantillon de taille 237, qui selon vous, est très improbable.
Expliquer pourquoi.

9 Une urne contient 60 jetons, 20 blancs et 40 noirs.

1) On tire successivement, sans regarder et sans remise 6 jetons de cette urne.
On s'intéresse au nombre de jetons blancs.
A-t-on obtenu un échantillon ? Justifier.
2) On tire successivement sans regarder et avec remise 6 jetons de cette urne.
On s'intéresse au nombre de jetons blancs.
A-t-on obtenu un échantillon ? Justifier.

10 **Programmer l'aléatoire** ALGO

En informatique, tout langage a une commande qui simule un nombre aléatoire entre 0 et 1 exclu.
Par exemple :

- AlgoBox : random()
- Scilab : rand()
- Python : random()
- LibreOfficeCalc : alea()

En version papier, on utilisera la notation aleatoire().
Que fait l'algorithme suivant ?

```
Algorithme : algo_mystere
Liste des variables utilisées
   alea : nombre
   resultat : nombre
Traitements
   Donner à alea la valeur de aleatoire()
   Donner à resultat la valeur de 10*alea
   Afficher la valeur resultat
Fin de l'algorithme
```

11 Pile ou face

ALGO

Écrire un algorithme qui simule le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée.

On pourra utiliser la commande « aleatoire() » qui renvoie un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0;1[$.

12 Piocher une carte

ALGO

Écrire un algorithme qui simule la pioche d'une carte dans un paquet de 32 cartes et renvoie la valeur de la carte.

13 Pile ou face enchaîné

ALGO

En utilisant l'algorithme de l'exercice 11 :
écrire un algorithme qui simule 127 lancers d'une pièce de monnaie équilibrée.

14 Essaie encore

ALGO

En utilisant l'algorithme de l'exercice 12 :
écrire un algorithme papier qui simule des lancers de dé à quatre faces tant que l'utilisateur répond « oui » à la question « Voulez vous continuer ? ».

15 Simulation

ALGO INFO

Ouvrir le logiciel de votre choix.

1) Programmer la simulation de 100 lancers de dés et compter le nombre de 6 obtenus.
2) Effectuer 10 fois cette simulation et noter les résultats obtenus.

16 Simulation jusqu'à plus soif

ALGO INFO

Reprendre l'exercice 15 avec 1 000 lancers et en comptant le nombre de 2 obtenus.

17 On a lancé plusieurs simulations d'un lancer de dé et on a obtenu les résultats suivants.

Nombre de lancers	1 000	2 000	5 000	10 000
Nombre de 1	194	371	839	1 663

1) Calculer les fréquences d'apparition du 1 pour chaque échantillon.
2) Quelle est la proportion théorique du résultat ?
3) Calculer l'écart de la fréquence obtenue et la fréquence théorique dans chaque cas.
4) Quel phénomène a-t-on mis en évidence ?

Intervalle de fluctuation

18 ► MÉTHODE 1 p. 32

La répartition des groupes sanguins dans le monde est donnée dans le tableau ci-dessous.

Groupes	O	A	B	AB
Fréquences en %	45	40	11	4

Elle est cependant variable selon les ethnies.

1) On a testé le sang de 480 esquimaux et on a trouvé que 211 d'entre eux sont du groupe A.
   a) Déterminer n, p, f_o.
   b) Les conditions de calcul de l'intervalle de fluctuation sont-elles réunies ?
   c) Si oui, déterminer l'intervalle de fluctuation.
   d) La proportion du groupe A chez les esquimaux est-elle conforme à la population mondiale ?
2) On a trouvé 62 esquimaux du groupe B.
   Que peut-on dire ?

19 D'après l'INSEE (*www.insee.fr*), la proportion de 0-17 ans en France est de 21,95 % en 2010.
La ville de Nice compte 64 242 jeunes âgé de 17 ans ou moins parmi 343 304 habitants.

1) Calculer la fréquence f_o des 0-17 ans à Nice.
2) Les conditions de détermination de l'intervalle de fluctuation sont-elles réunies ?
3) Que peut-on en conclure ?

20 Au 20 h d'une grande chaîne de télévision française publique, la journaliste conclut un reportage sur le divorce par cette phrase :
« En 2012, le divorce des femmes a augmenté de 20 % ».
Commenter cette conclusion.

21 Un article de « PC impact » de janvier 2013 est intitulé « Une sociologue pointe l'inefficacité des avertissements de la Hadopi » .
Il se base sur le travail d'une sociologue utilisant « une enquête qualitative menée entre mars et octobre 2012 auprès de 8 individus (5 hommes et 3 femmes, âgés de 27 à 55 ans, de catégories socioprofessionnelles et de formations variées) ».
3 des 8 personnes ont reçu un avertissement de la part d'Hadopi.
Que peut-on dire de cet article ?

22 Fonctions ?

1) Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des deux fonctions sur l'intervalle $]0; 10\,000]$:

a) $f(x) = 0,4 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $g(x) = 0,4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2) Quel phénomène ce graphique illustre-t-il ?

23

Le maire d'une ville vient d'installer un feu rouge sur l'artère principale et demande que le feu soit réglé de la manière suivante :

Couleur	Rouge	Orange	Vert
Durée	20 s	5 s	35 s

Il observe ensuite pendant une journée la couleur du feu lorsqu'une voiture arrive.
Le tableau répertorie ses résultats :

Couleur	Rouge	Orange	Vert
Nombres	263	64	429

1) Calculer la proportion de temps p de la couleur verte sur un cycle.
2) Calculer la fréquence f des voitures passées au vert.
3) On s'intéresse ici au réglage du feu vert et à l'hypothèse « le feu est bien réglé ».
a) Déterminer les bornes de l'intervalle de fluctuation au seuil d'environ 95 %.
b) Commenter le réglage du feu.

24

On lance 35 fois une pièce de monnaie et on obtient 12 fois face.

1) Après avoir énoncé l'hypothèse faite sur la pièce, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
2) La pièce de monnaie est-elle équilibrée ?

25 Truquée ?

On lance 3 500 fois une pièce de monnaie et on obtient 1 810 fois pile. La pièce de monnaie est-elle équilibrée ?

26 Poids

Le poids médian d'un homme en France est 77,3 kg.

1) Un institut de sondage interroge 649 agriculteurs. 357 répondent qu'ils pèsent moins de 77,3 kg.
Que peut-on conclure d'un tel sondage ?
2) L'institut interroge, ensuite, 526 cadres. 235 répondent de même. Conclure.
3) Comment expliquer ces différences ?

27 Au Casino

Au « Lion Vert », le jeu de la roulette française consiste à lancer une bille dans un récipient circulaire tournant et muni d'encoches numérotées et colorées sur la périphérie. Les cases, numérotées de 0 à 36 sont alternativement rouge et noire (sauf le 0 qui est vert).

Le croupier souhaite vérifier si sa roulette est équilibrée pour la mise sur chance simple Pair-Impair (Le joueur mise Pair ou Impair et gagne une fois sa mise si le numéro qui sort correspond à son choix. 0 est considéré comme ni pair, ni impair.)

Pendant une soirée, le croupier consigne les lancers :

Sortie	Pair	Impair ou 0
Nombre	242	295

Que peut-on conclure ?

28 Naissance dans le monde

Un village chinois comptabilise dans un tableau le nombre de naissances par sexe en 2012 :

Sexe	Garçon	Fille
Nombre	75	49

1) Calculer la fréquence de garçons nés en 2012.
2) La situation dans le village vous paraît-elle raisonnable ? Justifier.
3) Sachant que le rapport de masculinité en Chine est de 112/100 (il naît 112 garçons pour 100 filles), la situation vous paraît-elle raisonnable (Justifier) ?
4) Le rapport de masculinité de la France est de 105/100.
Comment peut-on expliquer la différence par rapport à la chine ?

29

Un fabricant de dés à 4 faces a lancé le même dé un grand nombre de fois.

Il a regardé si la face numéroté 3 était équilibrée.

Sa fréquence d'apparition a été de 0,267.

Le fabricant a conclu (à 95 %) que son dé n'était pas équilibré car la fréquence du nombre 3 n'était pas compatible avec son intervalle de fluctuation.

Quelle est la taille minimale de l'échantillon utilisé ?

30 Répression des fraudes

La répression des fraudes a enquêté au casino « Le Lion Vert »(voir exercice 27).

Elle a estimé que la roulette française n'était pas équilibrée et que le casino avait fraudé avec une probabilité d'environ 95 %.

Ils ont, pour cela, effectué une analyse informatique des tirages de l'année précédente et remarqué que la couleur rouge était sortie avec une fréquence de 49 % sur un certain nombre de lancers au jeu de la mise sur chance simple Noir-Rouge.

1) Quelle est la taille minimale de l'échantillon pour que la répression des fraudes puisse arriver à cet conclusion ?
2) La veille, un client notant le déséquilibre en a profité pour l'utiliser.
   Quelle stratégie le client a-t-il pu mettre en place ?

31 Taille de l'intervalle de fluctuation

On lance 50 fois une pièce de monnaie équilibrée.

1) Déterminer la taille de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de « pile ».
2) Comment diviser par 2 la taille de l'intervalle de fluctuation.

32 Algorithme intervalle fluctuation — ALGO

Écrire un algorithme qui, à partir de la taille de l'échantillon et la proportion théorique, donne l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

33 Pratique — ALGO

Programmer l'algorithme de l'exercice 32

- sur la calculatrice ;
- sur un ordinateur.

34 Perfectionnement — ALGO

Modifier l'algorithme de l'exercice 32 pour qu'il vérifie si les conditions sur n et p sont respectées avant de faire les calculs et qu'il affiche si besoin un message d'erreur à l'utilisateur.

35 In or out ? — ALGO

Écrire un algorithme qui connaissant la taille de l'échantillon, la proportion supposée et la fréquence observée, indique si le test se révèle concluant ou non.

36 Inspiré par les comics Marvel

Double Face, célèbre ennemi de Batman, utilise une pièce fétiche pour choisir s'il doit gracier ou tuer ses ennemis. Spiderman, fan de Batman, a regardé tous les comics et a constaté que la pièce était tombée 117 fois sur la face vie pour 256 lancers.

Clark Kent pense qu'il y a autant de chances à ce tirage de tomber sur la face mort que sur la face vie.

Catwoman et son esprit vif comme un félin, pense, elle, que Double Face a truqué la pièce pour laisser seulement à ses proies une chance de survie de 40 %.

Qui de Clark ou de Catwoman peut avoir raison ?

37 On a lancé 1 000 fois un dé électronique à trois faces et on a obtenu les résultats suivants :

	1	2	3
Nombres	359	342	299

1) La face 1 est-elle équilibrée ?
   La face 2 est-elle équilibré ? Et la face 3 ?
2) En quoi les résultats sont-ils surprenants ?
3) Que peut-on donc conclure ?

38 Réussite

Dans le lycée Sophie Germain, les élèves viennent de passer le bac.

1) 64 % des 34 élèves de la TL1 ont eu leur bac alors que la moyenne nationale est de 78 %.
   a) Peut-on déterminer l'intervalle de fluctuation ?
   b) Ces résultats sont-ils anormalement bas ?
2) Une autre classe, les TL2, de 28 élèves a obtenu 98 % de réussite cette même année.
   a) Peut-on calculer l'intervalle de fluctuation ?
   b) Ces résultats sont-ils anormalement élevés ?

39 Loterie

Lors d'une kermesse d'école, des billets de loterie sont vendus avec l'annonce : « 1 billet sur 4 est gagnant ». Le papa de Cunégonde est très joueur et en achète 28.

1) Va-t-il gagner 7 lots ?
2) En fait, il en a obtenu 4. Déterminer l'intervalle de fluctuation associé à cet échantillon.
3) Ce papa peut-il crier au scandale ?
4) Pour quels résultats pourrait-il crier au scandale ?

S'entraîner

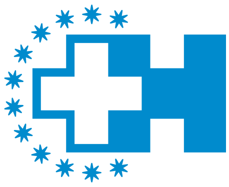
Estimation : intervalle de confiance

40 ► MÉTHODE 2 p. 33

En septembre 2013, un sondage réalisé auprès de 1 297 joueurs américains, révèle que 26 % des sondés achèteront la console SP2 à sa sortie.

1) Les conditions de validité de l'intervalle de confiance sont-elles réunies ?
2) Si oui, dans quelle fourchette peut-on estimer, avec une probabilité de 95 %, le pourcentage de joueurs américains qui feront l'acquisition d'une SP2 ?

41 En février 2013, un sondage a été réalisé par téléphone sur un échantillon national représentatif de 1 000 personnes résidant en France âgées de 18 ans et plus. Cet échantillon a été constitué d'après la méthode des quotas (sexe, âge, catégorie socioprofessionnelle du chef de ménage), par région et taille d'agglomération. Le sondeur donne 257 personnes n'ayant pas ou peu confiance dans les hôpitaux publics.



1) Les conditions de validité de l'intervalle de confiance sont-elles réunies ?
2) Si oui, dans quelle fourchette peut-on estimer le pourcentage de Français qui n'ont pas ou peu confiance dans les hôpitaux publics avec une probabilité de 95 % ?

42 En décembre 2012, un sondage a été réalisé auprès de 1 003 personnes résidant en France, âgées de 18 ans et plus. L'échantillon a été constitué d'après la méthode des quotas (sexe, âge, catégorie socioprofessionnelle du répondant) par région et taille d'agglomération.
772 personnes interrogées ont déclaré avoir déjà été confrontées à une arnaque ou une tentative d'arnaque sur Internet.
Dans le même temps, 211 personnes interrogées déclarent avoir déjà été piégées sur Internet par un mail ou un site Internet leur demandant leurs coordonnées personnelles.

1) Estimer le pourcentage de personnes en France confrontées à une arnaque sur Internet.
2) Estimer le pourcentage de personnes en France ayant déjà été piégées sur internet.

43 **Algorithme, intervalle confiance** ALGO

Écrire un algorithme qui, connaissant la taille de l'échantillon et la fréquence observée, donne l'intervalle de confiance au seuil 0,95.

44 **Pratique** ALGO

Programmer l'algorithme de l'exercice **43**, selon votre choix, soit sur la calculatrice, soit sur un ordinateur.

45 **Perfectionnement** ALGO

Modifier l'algorithme de l'exercice **43** pour qu'il vérifie avant les calculs si les conditions sur n et f_0 sont respectées et qu'il affiche un message d'erreur si besoin.

46 Avant les municipales de Sésalandes, le maire sortant, M. Aissekro, commande un sondage auprès de 500 personnes. D'après ce sondage, son adversaire obtiendrait un score de 48 %.

1) Déterminer l'intervalle de confiance de cet échantillon.
2) M. Aissekro peut-il fêter prématurément sa victoire ?
3) Si non, quelle taille d'échantillon minimale aurait-il dû prendre pour être rassuré ?

47 On demande aux 230 spectateurs de la rétrospective en 3D de *Blanche-Neige et les 7 nains* le nom du nain le plus amusant. 34 % des spectateurs votent pour Simplet et 28 % pour Grognon.

1) Peut-on déterminer des intervalles de confiance ?
2) Si oui, déterminer les deux intervalles de confiance.
3) Peut-on affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 0,05 que Simplet est plus drôle que Grognon ?

48 Un institut de sondage interroge un groupe de filles sur leur acteur préféré.

1) Sur un premier échantillon de 800 filles, 38 % ont répondu : Léonard Ducapre.
   Détermine l'intervalle de confiance de ce premier échantillon.
2) Sur un deuxième échantillon de 650 filles, 42 % ont, elles, répondu Brad Flip.
   Déterminer l'intervalle de confiance de ce deuxième échantillon.
3) Ces deux intervalles sont-ils disjoints ?
4) Peut-on en déduire que chez les filles Brad Flip a plus de succès que Léonard Ducapre ?

49 Le pari du Chevalier de Méré — INFO

Le problème dit du « pari du chevalier de Méré » opposa ce dernier à Fermat et à Pascal :

- *Pari 1 :* si l'on jette 4 fois un dé à 6 faces, il y a plus de chances qu'on obtienne un six plutôt qu'on n'en obtienne pas.
- *Pari 2 :* si l'on jette 24 fois deux dés à 6 faces, il y a aussi plus de chances qu'on obtienne un double six qu'on n'en obtienne pas.

Que penser de ces deux paris ?

1) À l'aide d'un tableur, on simule 500 lancers de 4 dés à 6 faces. Voici une capture d'écran.

	A	B	C	D	E	F
1	dé 1	dé 2	dé 3	dé 4		
2	3	5	6	3		0,498
3	5	1	1	4	0	

a) Proposer une formule pour simuler le lancer d'un dé, à saisir en `A2`, `B2`, `C2` et `D2`.

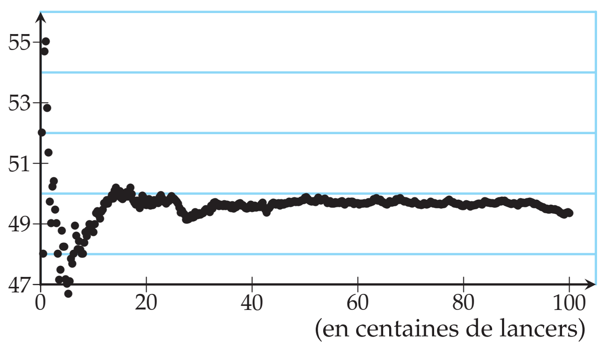
b) Que calcule l'instruction `NB.SI(A2:D2;6)` ?
Qu'affiche la cellule `E2` si on entre
`=SI(NB.SI(A2:D2;6) >1;1;0)` ?

c) Que calcule la formule `=NB.SI(E2:E501;1)/500`, à saisir en cellule `F2` ?

d) Compléter la feuille de calcul.
Donner la fréquence d'apparition d'un six et l'intervalle de confiance associé.
Que pouvez-vous conclure du *Pari 1* ?

2) Simuler 1 000 puis 10 000 expériences.
Que peut-on conclure du *Pari 1* ?

3) On simule 1 000 lancers de 24 fois deux dés à 6 faces.
Le graphique ci-dessous donne l'évolution des fréquences d'apparition en % d'un double six.
Que penser du *Pari 2* ?



50 Intervalle de fluctuation — ALGO

On considère une urne contenant :

- 3 boules blanches ;
- 5 boules noires.

On tire au hasard une boule de l'urne.
On note sa couleur avant de la remettre dans l'urne .

1) Quelle est la probabilité p d'obtenir une boule blanche ?

On simule 1 000 expériences de 100 tirages.

2) Avec un risque de 5 %, dans quel intervalle vont se trouver les fréquences ainsi obtenues ?

On propose l'algorithme ci-dessous.

```
Liste des variables utilisées
   nb100, nb1000 : nombre
   p100, p1000 : nombre
Traitements
   Donner à nb1000 la valeur de 0
   Pour i variant de 1 à 1000 faire
      Donner à nb100 la valeur de 0
      Pour k variant de 1 à 100 faire
         Si Alea_entier(1;8)⩽ 3 Alors
            Donner à nb100 la valeur de nb100+1
         Fin Si
      Fin Pour
      Donner à p100 la valeur de nb100/100
      Si 0,275 ⩽ p100 ⩽ 0,475 Alors
         Donner à nb1000 la valeur de nb1000+1
      Fin Si
   Fin Pour
   Donner à p1000 la valeur de nb1000/1000
Affichage
   Afficher p1000
Fin de l'algorithme
```

3) À partir de l'algorithme ci-dessus :

a) Que représente la valeur de sortie ?

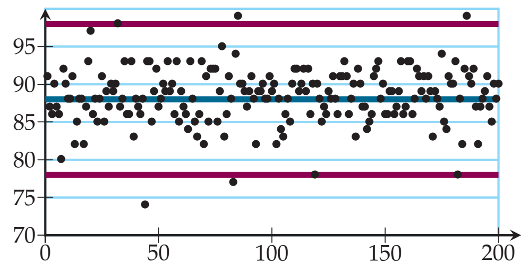
b) Programmer l'algorithme.
Le résultat affiché est-il conforme à la théorie ?

c) À partir de l'algorithme ci-dessus, en écrire un qui demande en entrée le nombre n de tirages successifs et qui affiche en sortie le pourcentage d'expériences donnant une fréquence située dans l'intervalle de fluctuation associé.

Approfondir

51 Campagne publicitaire ALGO

Un grossiste affiche sur ses plaquettes :
« 86 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».
L'inspectrice de la DGCCRF souhaite étudier la validité de l'affirmation. Elle prélève 100 boîtes au hasard du stock du grossiste et en trouve 26 avec des traces de pesticides. On suppose que la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,86 du stock du grossiste. À l'aide d'un logiciel, on simule 200 prélèvements de 100 boîtes. Le graphique ci-dessous présente la fréquence en % des boîtes de thé ne contenant pas de pesticides pour chaque échantillon .



1) Combien de fréquences n'appartiennent pas à l'intervalle $[0,76; 0,96]$? Interpréter.
2) L'inspectrice peut-elle décider, au seuil de 95%, que la publicité est mensongère ?
3) Proposer un algorithme simulant cette situation.

52 Grippe

En France, les consultations pour syndromes grippaux représentent 34 % des consultations chez les médecins généralistes.

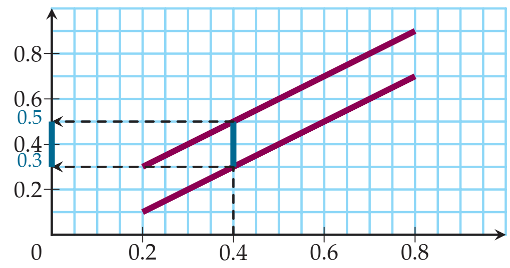
1) La première semaine d'octobre, un cabinet médical du réseau Sentinelles, reçoit 967 patients dont 368 présentent les symptômes de la grippe.
   a) Quelle part de ses consultations concerne des patients présentant des symptômes grippaux ?
   b) Quel est l'intervalle de fluctuation associé à cet échantillon ?
   c) Le médecin doit-il prévenir les autorités sanitaires d'un risque d'épidémie ? Argumenter.
2) La même semaine, dans une autre région, 36 % des consultations d'un « médecin Sentinelle » concerne des syndromes grippaux.
   Il n'alerte pas les autorités sanitaires.
   Quel est le nombre maximun de patients reçus par ce praticien cette semaine-là ?

53 Abaque

On considère une urne où la proportion de boules noires est p (inconnue) et on s'intéresse à des échantillons de taille 100.

1) Vérifier que l'intervalle de fluctuation est donné par $[p - 0,1; p + 0,1]$.

Sur le graphique sont tracées les droites d'équations $y = x - 0,1$ et $y = x + 0,1$. On utilise ce graphique pour lire l'intervalle de fluctuation pour une proportion p donnée. Exemple : pour $p = 0,4$, $IF = [0,3; 0,5]$.



2) On suppose que $p = 0,6$.
   Donner l'intervalle de fluctuation IF au seuil de 95%.
   Utiliser le graphique ci-dessus pour retrouver l'intervalle IF.
3) Dans cette question, on ne connaît pas p.
   La fréquence f_0 observée dans un échantillon de taille 100 est de $0,7$.
   Proposer une méthode graphique pour trouver l'intervalle de confiance et estimer une valeur de p.
   Retrouver ce résultat par le calcul.

54 Auto focus

Un photographe vend des appareils photographiques.
Il veut estimer par un intervalle de confiance le pourcentage p d'acheteurs d'appareils autofocus avec zoom dans sa clientèle

1) Dans un échantillon de 100 clients, 60 achètent un tel appareil. Donner une estimation de p par un intervalle de confiance avec un seuil de 95 %.
2) On considère l'affirmation suivante :
   « la fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente ».
   Est-elle vraie ?
3) Déterminer la taille n, n étant supérieur à 30, d'un échantillon de clients pour qu'un intervalle de confiance de p, au seuil de 95 % soit $[0,557; 0,643]$.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Connaître le sens de :
- population, caractère, proportion
- échantillon, taille d'un échantillon

Savoir la définition
- de fluctuation d'une proportion lors d'un échantillonnage
- d'un intervalle de confiance à 95 %
- d'un intervalle de fluctuation à 95 %

Savoir calculer et utiliser
- la proportion d'un caractère
- un intervalle de confiance à 95 %
- un intervalle de fluctuation à 95 %

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

55 La proportion de gauchers dans le monde est 12 %. Dans une classe de 25 élèves :

(a) on doit avoir 3 gauchers
(b) on peut avoir 10 gauchers
(c) il est probable que l'on ait 3 gauchers
(d) on ne peut pas avoir 10 gauchers

56 Lors du tirage d'un échantillon, on parle de fluctuation d'échantillonnage pour indiquer :

(a) qu'on choisit l'échantillon au hasard
(b) qu'une proportion dans un échantillon n'est pas forcément la même que dans la population totale
(c) que la proportion dans 2 échantillons de même taille peut être différente

57 Dans une école où un tiers des élèves croient encore au père Noël, on interroge 25 élèves au hasard (un élève pouvant être interrogé plusieurs fois). L'intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion d'élèves qui croient encore au père Noël, dans cet échantillon, est :

(a) $[0,133;0,533]$
(b) $\left[\frac{22}{75};\frac{28}{75}\right]$
(c) $[0,29;0,38]$
(d) $\left[\frac{2}{15};\frac{8}{15}\right]$

58 Dans une tombola, la proportion de billets gagnants (c'est à dire permettant de gagner un lot, petit ou gros) est de 20 %. Hervé achète 64 billets de cette tombola. Sachant qu'il y a un très grand nombre de billets mis en vente, la proportion de billets gagnants parmi ceux qu'a achetés Hervé se situera dans l'intervalle de fluctuation à 95 %

(a) $[0,075;0,325]$
(b) $[0,08;0,32]$
(c) $[0,08;0,32]$
(d) $[0,07;0,33]$.

59 Karim qui est philatéliste (collectionneur de timbres) commande une série de 49 timbres choisis dans un catalogue publicitaire qui annonce une proportion de 42 % de timbres sur le thème des célébrités dans ces séries. À la réception de sa commande, Karim compte 15 timbres montrant des célébrités dans la série qu'il a reçue. Peut-il affirmer que la publicité était mensongère ?

(a) Oui, car la proportion de timbres "célébrités" dans sa série n'est pas de 42 %
(b) Non, car le calcul de 42 % de 49 ne donne pas un entier
(c) Non, car on peut considérer qu'il y a fluctuation d'échantillonnage
(d) Oui, car la proportion de timbres "célébrités" dans sa série n'est pas dans l'intervalle de fluctuation

60 Dans un groupe de 15 élèves d'une classe de seconde, le professeur principal a demandé à chaque élève s'il avait accès à Internet sans restriction chez lui. Trois élèves ont répondu Non, les autres ont répondu Oui. Ce professeur peut-il estimer la proportion d'élèves ayant accès à Internet sans restriction chez eux ?

(a) Oui, en donnant un intervalle de confiance à 95 %
(b) Non, car il y a fluctuation
(c) Oui, c'est tout simplement $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, soit 80 %
(d) Non, car la proportion trouvée dans le groupe est trop forte
(e) Non, car la taille de l'échantillon est trop faible

61 Un maraîcher en gros vend de jeunes plants de poireaux à d'autres maraîchers. Le ramassage et le conditionnement des plants de poireaux est mécanisé. Il se doit d'indiquer à ses clients la proportion de plants de petite taille. Pour pouvoir donner cette indication, il procède au comptage des plants de petite taille dans un lot de 10 000 poireaux et en trouve 21 %. Á l'aide ce comptage, il peut ensuite :

(a) fournir un intervalle de confiance à 95 % pour la proportion de poireaux de petite taille
(b) fournir un intervalle de fluctuation à 95 % pour la proportion de poireaux de petite taille
(c) indiquer qu'il y a 21 % de poireaux de petite taille dans les plants qu'il vend.
(d) autre réponse

62 Un candidat à une élection pense qu'il bénéficie d'environ 52 % d'intentions de vote. Il commande un sondage. De quelle taille peut être l'échantillon pour qu'il puisse être rassuré ?

(a) 500 (b) 1 000 (c) 3 000 (d) 10 000

63 On a procédé à une enquête de satisfaction auprès de 200 élèves demi-pensionnaires. 72 % sont contents de la cantine. Le lycée compte 1 300 demi-pensionnaires.
Le nombre de demi-pensionnaires satisfaits se situe, avec une probabilité de 95 %, dans l'intervalle :

(a) $[900; 972]$ (b) $[1\,143; 1\,300]$ (c) $[1\,199; 1\,271]$ (d) $[844; 1\,028]$

64 54 % des français déclarent pratiquer un sport. À Sésaville, haut lieu de la Drôme, 2 324 habitants, ils sont 1 236 à pratiquer. L'intervalle de fluctuation à 95 % de cet échantillonnage, arrondi au millième, est :

(a) $[0,512; 0,568]$ (b) $[0,511; 0,553]$ (c) $[0,519; 0,561]$

65 Environ 78 % des français ont un ordinateur. À Bourg-de-Sésaville, plus bas dans la vallée, 1 286 habitants, ils sont 823 à en posséder un. L'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est environ :

(a) 0,17 (b) 0,07 (c) 0,056

TP 1 Affaire Partida

INFO

En Novembre 1976 dans le comté de Hidalgo, Rodrigo Partida était condamné à huit ans de prison pour cambriolage et tentative de viol.
Il attaqua ce jugement affirmant que la désignation des jurés de ce comté était discriminatoire pour les américains d'origine mexicaine : 79,1 % de la population du comté était d'origine mexicaine mais, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés les 11 années précédentes, seules 339 d'entre elles étaient d'origine mexicaine.

1 Simulation de la désignation d'un juré

On étudie une fonction du tableur qui choisit un juré en tenant compte de ses origines.

1) Quel nombre de jurés d'origine mexicaine peut-on espérer en choisissant au hasard 870 personnes dans la population de ce comté ?

2) Avec un tableur, la fonction `ALEA()` génère un nombre aléatoire dans $[0;1[$. Que renvoie `SI(Alea()<p; 1; 0)` ?

3) En prenant $p = 0,791$ expliquer comment cette formule permet de simuler la désignation d'un juré de ce comté en respectant les fréquences. *On pourra s'aider du schéma ci-dessous :*

2 Simulation

On procède à une simulation de 100 séries de désignation de jury.

1) Compléter la feuille de calcul à l'aide des instructions.

- Saisir en cellule `A1` la formule `SI(ALEA()<0,791; 1; 0)`
- Copier sur la plage `A2:A870`
- Saisir en `A871` la formule `SOMME(A1:A870)/870`
- Sélectionner la plage `A1:A871`
- Copier sur la plage `B1:CV871`

2) Que représentent les nombres de la plage de cellules `A1:A870` ?

3) Que représente le nombre affiché dans la cellule `A871` ?

4) Que représentent les valeurs extrêmes obtenues dans la plage de cellules `A871:CV871` ?

5) Représenter avec un nuage de points la série de données de la plage `A871:CV871`.

6) A-t-on obligatoirement 688 jurés d'origine mexicaine ?
Calculer le nombre maximal de jurés d'origine mexicaine dans un jury, obtenu lors de la simulation.

3 Intervalle de fluctuation

Il s'agit d'interpréter les résultats de cette simulation.

1) Donner l'intervalle de fluctuation correspondant à la simulation antérieure.
Celui-ci confirme-t-il les observations précédentes ?

2) Dans les simulations faites sur tableur, obtient-on un nombre de jurés mexicains égal à celui de l'affaire Partida ?

3) Comment expliquer cette situation ?

Travaux pratiques

TP 2 Élections présidentielles de 2012

INFO

Voici un récapitulatif des sondages parus en France peu de jours avant le second tour des élections présidentielles de 2012. (source : sondages-en-france.fr)

Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Date en mai	1	2	2	3	3	3	3	3	4
Hollande	53,5	53	52,5	53,5	52,5	53	53	52,5	52
Sarkozy	46,5	47	47,5	46,5	47,5	47	47	47,5	48
Nombre de personnes interrogées	1387	1077	2009	1000	1018	1072	1123	2161	1255

À l'issue du second tour des élections présidentielles 2 012, M. Hollande a été élu président de la République Française avec 51,64 % des voix contre 48,36 % pour M. Sarkozy.

1 Un modèle

On considère une urne contenant 10 000 boules, 5 164 roses et 4 836 bleues.

On effectue 1 000 tirages successifs et avec remise dans l'urne.

On note f_r la fréquence de boules roses obtenues.

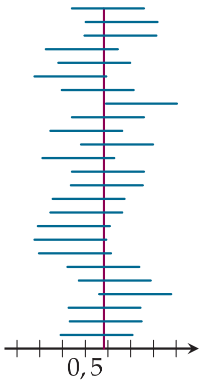
1) Que modélise cette expérience ? Quelle est la proportion p de boules roses dans l'urne ?

2) Quel est l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % ?

a) Démontrer que si $f_r \in \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{1000}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{1\,000}}\right]$ alors $p \in \left[f_r - \dfrac{1}{\sqrt{1\,000}} ; f_r + \dfrac{1}{\sqrt{1\,000}}\right]$.

b) Comment appelle-t-on l'intervalle $\left[f_r - \dfrac{1}{\sqrt{1000}} ; f_r + \dfrac{1}{\sqrt{1000}}\right]$?

3) On simule 25 échantillons de taille 1 000 à l'aide d'un logiciel de calcul numérique. Le graphique obtenu donne les 25 intervalles de confiance correspondants.



a) Quelle est la proportion d'intervalles de confiance ne contenant pas p ?

b) Modifier le programme disponible sur le site pour simuler 25 échantillons de taille n (nombre à saisir par l'utilisateur).

Exécuter votre programme avec $n = 2\,000$ et $n = 10\,000$.

Commenter.

2 Les sondages

On applique maintenant le modèle étudié à l'élection présidentielle de 2012.

1) Calculer, pour chaque sondage, les intervalles de confiance correspondant aux intentions de vote pour les deux candidats.

2) Tous ces sondages assuraient-ils une victoire de M. Hollande au second tour ? Argumenter votre réponse.

3) a) Comment sont constitués les échantillons utilisés dans ces sondages ? Faire une recherche documentaire.

b) Que dire alors de notre modèle ?

TP 3 Des listes pour le chocolat

ALGO

La marque de chocolat Nesrhonna, sponsor de l'équipe de France de Football, vend des tablettes contenant chacune une image d'un des onze principaux joueurs de l'équipe.
On suppose que les images sont réparties au hasard.
Thaïs, collectionneuse dans l'âme, se met en tête d'obtenir les onze images. Elle demande à sa grande sœur Mélia si elle sait combien de tablettes ses parents devront acheter pour avoir toute la collection.

1 Simulation à deux, avec une calculatrice

Mélia a trouvé comment générer un nombre entier aléatoire entre 1 et 11 à l'aide de sa calculatrice, elle demande à Thaïs de compléter un tableau d'effectifs et de lui dire à partir de quand chaque numéro est apparu au moins une fois.
À l'aide du tableau complété, comment peut-on répondre au problème posé ?
Tester cette solution. Quels sont les inconvénients de cette méthode ?

2 Simulation à l'aide d'un algorithme

Mélia, qui vient de terminer le chapitre sur les statistiques, a bien noté une remarque de son professeur : « *au lycée, on ne pourra pas exiger de vous l'utilisation de listes en algorithmique, c'est bien triste car c'est très pratique !* ».
Elle fait des recherches et s'aperçoit que ces listes lui permettent de stocker des résultats. Elle va pouvoir s'en servir pour simuler le problème. L'algorithme qu'elle a conçu est donné ci-contre.

```
Liste des variables utilisées
  T : liste
  test : nombre
Traitements
  Donner à test la valeur de 0
  Pour i variant de 1 à 11 faire
    Donner à T[i] la valeur de 0
  Fin Pour
  Tant que (test=0) faire
    Donner à j la valeur de Alea(1,11)
    Donner à T[j] la valeur de T[j]+1
    Donner à test la valeur de T[1] × T[2] × T[3] × T[4] × T[5] × T[6] × T[7] × T[8] × T[9] × T[10] × T[11]
  Fin Tant que
Affichage
  Afficher "Tu possèdes tous les joueurs"
Fin de l'algorithme
```

1) À quoi sert la première boucle pour ?
2) Expliquer l'utilité de la variable test.
3) Mélia programme son algorithme et le fait tourner. Celui-ci affiche en sortie « *Tu possèdes tous les joueurs* » et s'aperçoit qu'il ne répond pas au problème posé.
Le compléter en conséquence.
4) Compléter l'algorithme pour répéter 1 000 fois la simulation.
Calculer le nombre moyen de tablettes à acheter.

3 Concrètement...

Une coupe du monde de Football dure environ un mois, la société Nesrhonna propose son offre deux mois avant le début, jusque deux mois après la fin.
Sachant que Thaïs mange une tablette de chocolat par semaine, que penser de ses chances d'obtenir la collection complète ?

Travaux pratiques

TP 4 Surbooking : une réalité statistique

ALGO

Lors d'un vol Madrid-Barcelone pouvant accueillir 250 passagers, la compagnie aérienne s'aperçoit qu'environ 20 % des passagers ayant acheté leur billet ne se présentent pas à l'aéroport. Elle vend alors plus de billets que de places dans le vol.
L'objectif de ce TP est de mettre en évidence un critère statistique utilisé par la compagnie aérienne pour déterminer le nombre de billets supplémentaires qu'elle émettra.

1 Simulation du remplissage d'un avion

On étudie le remplissage de l'avion suivant le nombre de billets vendus.

1) Dans cette question, on suppose que la compagnie n'a pas eu recours à la sur-réservation et qu'elle a vendu exactement 250 billets.

a) Dans l'algorithme ci-contre qui simule le remplissage d'un vol, que désigne la variable P ?

b) Le programmer, l'exécuter 10 fois et noter à chaque fois les résultats. Commenter.

```
Liste des variables utilisées
   k,P : entiers
Traitements
   Donner à P la valeur de 0
   Pour k variant de 1 à 250 faire
      Donner à P la valeur de P+ent(alea()+0,8)
   Fin Pour
Affichage
   Afficher P
Fin de l'algorithme
```

2) Dans cette question, la compagnie aérienne vend un nombre de billets supérieur à 250.

a) Modifier l'algorithme pour simuler le remplissage de ce vol. (On prendra en entrée le nombre de billets vendus.) Le programmer et l'exécuter.

b) Quel nombre de billets supplémentaires la compagnie peut-elle vendre ? Justifier votre choix et détailler votre démarche.

2 Étude d'un critère pour décider du nombre de billet à vendre

La proportion de passagers se présentant à l'embarquement ayant acheté leur billet est de 80 %.

1) Dans cette question, on suppose que la compagnie émet 255 billets.

a) On s'intéresse à la fréquence du nombre de passagers se présentant au comptoir.
Au seuil de 95%, dans quel intervalle va-t-elle se trouver ?
Comment appelle-t-on cet intervalle ?

b) Quel pourcentage maximal de passagers se présentant au comptoir de la compagnie, au seuil de 95 %, peut-on prévoir ?

c) En déduire le nombre maximum, avec un risque de 5 %, de passagers se présentant à la porte de l'embarquement.

2) Dans cette question, on suppose que la compagnie émet N billets.

a) Donner l'intervalle de fluctuation associé à cet échantillon.

b) Vérifier que le nombre maximum de passagers, au seuil de 95 % est donné par :
$0,8N + \sqrt{N}$.

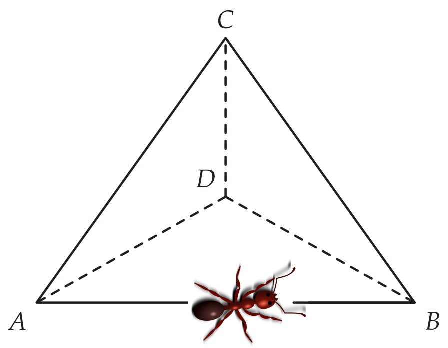
c) Le critère choisi par la compagnie aérienne pour émettre les billets sur ce vol est que le nombre maximum de passagers, au seuil de 95%, ne doit pas dépasser 250.
Combien de billets supplémentaires la compagnie proposera-t-elle alors à la vente ?

TP 5 Piège à fourmis *sur une idée de C. Schwartz et B. Cailhol, http ://www.statistix.fr*

INFO

1 Le principe

Un piège à fourmi se présente sous la forme d'un tétraèdre $ABCD$. L'entrée se fait en A.
À chaque étape, la fourmi se dirige vers un autre sommet. Si elle arrive en A elle sort. Si elle n'est pas sorti au bout de 4 déplacements, elle meurt.



1) Calculer le nombre de parcours possibles et le nombre de parcours où la fourmi meurt.
2) Conjecturer la proportion de fourmis qui meurent.

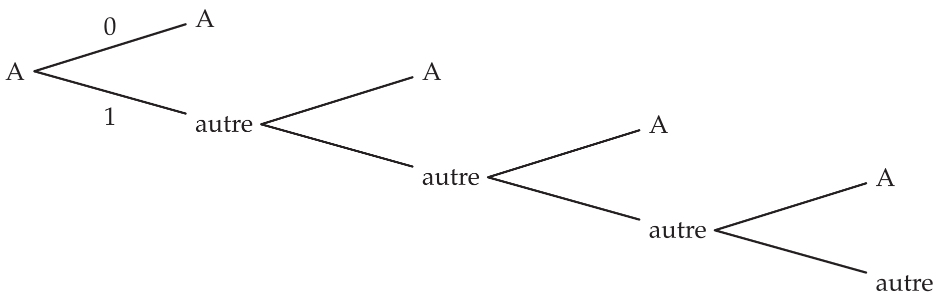
2 Simulation à l'aide d'un tableur

Ouvrir un tableur.

1) On pose A pour 0, B pour 1, C pour 2 et D pour 3.
Le premier sommet est A donc dans `A1`, on met 0.
Les autres sont choisis aléatoirement mais différent du précédent : `MOD(A1+ENT(ALEA()*3+1;4)`.
Compléter de `B1` à `E1`.
2) Dans `G1` : déterminer le minimum de `B1:E1`.
3) Recopier `A1:G1` jusqu'à `A1000:G1000`.
4) Calculer la proportion de 0 (sortie de la fourmi) sur `G1:G1000`.
5) Rafraîchir plusieurs fois. La conjecture du **2** de la partie 1 est-elle plausible ?

3 Analyse

Pour calculer la probabilité que la fourmi meure, on utilise un arbre pondéré.



1) Compléter les probabilités sur chaque branche.
2) En déduire la probabilité que la fourmi meure puis la probabilité pour qu'elle survive.
3) Votre résultat est-il cohérent avec la simulation : est-il dans l'intervalle de confiance ?

Récréation, énigmes

Paradoxe de Simpson

Dans la ville de Mathyville, il y a deux lycées, le lycée Sophia Kovaleski et le lycée Ada Byron (toutes deux mathématiciennes célèbres). On donne les résultats du baccalauréat dans ces deux lycées en fonction du sexe :

Lycée Sophia Kovaleski		
	Effectif	Bacheliers
Garçons	203	161
Filles	842	592

Lycée Ada Byron		
	Effectif	Bacheliers
Garçons	423	258
Filles	131	77

1) Calculer la proportion de bacheliers chez les garçons et les filles dans les deux lycées. Peut-on en déduire que les garçons sont meilleurs que les filles ?
2) Choquée par cette assertion, Mme Pita Gaure, maire de la ville, demande qu'on refasse les calculs sur l'ensemble de la population.
   Faire ces calculs.

Que peut-on en conclure ?

Le paradoxe de Condorcet

Les 30 membres du Comité de Vie Lycéenne doivent choisir une salle pour héberger le foyer : la salle F qu'ils occupent actuellement, ou la salle H ou la salle B. Chaque membre classe ces 3 salles par ordre de préférence. On obtient :

- 12 voix pour FHB ;
- 8 voix pour HBF ;
- 1 voix pour HFB ;
- 5 voix pour BFH ;
- 4 voix pour BHF.

Un élève demande le nombre de voix de ceux qui préfèrent B à F. Le CVL se déplace donc en B.
Un autre élève demande le nombre de voix de ceux qui préfèrent H à B. Le CVL se déplace donc en H.
un 3ème demande alors combien préfèrent F à H ...

Que se passe-t-il ?

Le sens critique

Le 1er mars 2013, le maire de Mathyville se félicitait devant la presse :« ce mois-ci, le nombre d'actes criminels a baissé de près de 10 pour cent par rapport au mois précédent. »

Y a-t-il vraiment de quoi pavoiser ?

Un échantillon biaisé

En 2012, l'indice de fécondité de la France, c'est-à-dire le nombre d'enfants par femme, était d'environ 2,01. Une enquête sur les mères de votre lycée donne un indice supérieur.

Comment expliquer cela ?

Surreprésentativité

En 2012, l'alcoolémie positive d'un conducteur est présente dans des accidents causant 30,9 pour cent des tués sur la route. Elle est donc absente dans 69,1 pour cent des cas.

Qu'est-ce qui est le plus dangereux ?

STATISTIQUES PROBABILITÉS

3

Probabilités

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Calculer et utiliser des fréquences
- Calculer et utiliser des pourcentages

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Le tableau ci-dessous présente le nombre de pots de peinture vendus en un mois selon la couleur.

Couleur	Jaune	Blanc	Rouge
Effectif	256	7489	458

Couleur	Bleu	Vert	Noir
Effectif	156	785	4123

1) Calculer les fréquences arrondies au centième.
2) Exprimer les fréquences en pourcentage arrondies à l'unité.

2 Dans une boulangerie, Mariette achète :

- 15 pains au chocolat ;
- 10 croissants ;
- 12 tartelettes ;
- 8 pains au raisin ;
- 22 éclairs ;
- 20 brioches.

1) Quelle est la proportion de :
   a) tartelettes ? b) viennoiseries ?
2) Parmi les desserts, quelle est la proportion d'éclairs ?

3 En 2013, 778 200 candidats se sont présentés à la série générale de l'examen du Diplôme National du Brevet, 84,5 % ont été reçu et neuf candidats sur 10 maîtrisaient le socle commun de compétences.

1) Combien de candidats ont été reçus ?
2) Combien de candidats ont la maîtrise du socle commun de compétences ?

4 Dans la liste des nombres entiers de 0 à 20, citer

1) les nombres impairs ;
2) les nombres divisibles par 3 ;
3) les nombres impairs ou divisibles par 3 ;
4) les nombres impairs et divisibles par 3.

5 Benoît a réparé 351 machines à laver. Il a changé le joint sur 128 machines et le programmateur sur les autres dont 26 présentaient aussi un défaut de joint qu'il a aussi remplacé.

1) Quel est le pourcentage de machines à laver ayant un joint défectueux ?
2) Quel est le nombre de machine ayant seulement un programmateur défectueux ?

Voir solutions p. 259

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Événements

Un sac contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard.
On considère les événements suivants :

- A : « Le numéro du jeton tiré est pair ».
- B : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 3 ».

1) Quels sont les événements élémentaires qui composent A et B ?
Recopier et compléter : $A = \{\cdots\}$ et $B = \{\cdots\}$.

2) Décrire de même les événements :

- $A \cap B$
- $\overline{A}$
- $\overline{A \cap B}$
- $\overline{A} \cap \overline{B}$
- $A \cup B$
- $\overline{A \cup B}$
- $\overline{A} \cap B$
- $\overline{A} \cup \overline{B}$

3) Certains de ces événements sont-ils identiques ?

4) Décrire les événements suivants par une phrase :

- $A \cap B$
- $\overline{A}$
- $\overline{A \cap B}$
- $A \cup B$
- $\overline{A \cup B}$
- $\overline{A} \cap B$

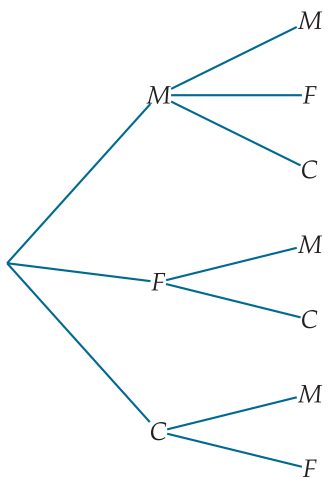
ACTIVITÉ 2 Arbre des possibles

Un paquet contient quatre bonbons :

- deux à la myrtille ;
- un à la framboise ;
- un au citron.

Sandrine prend au hasard 2 bonbons l'un après l'autre.

1) Antoine a dessiné l'arbre des possibles ci-dessous. Quelles remarques peut-on faire ?



2) Dresser un autre arbre des possibles.

3) Combien cette expérience aléatoire a-t-elle d'issues ?

4) Quelle est la probabilité :

a) que Sandrine mange deux bonbons à la myrtille ?

b) que Sandrine mange au moins un bonbon à la myrtille ?

c) que Sandrine ne mange pas de bonbons à la myrtille ?

ACTIVITÉ 3 Tableau

Au self d’un lycée, les 1 230 élèves demi-pensionnaires avaient le choix entre du Bœuf et du Colin d’une part, accompagné soit de Frites, soit de Haricots verts, soit de Navets.
Le cuisinier, qui tient ses statistiques à jour, a remarqué que :

- 840 élèves ont mangé des frites dont 70 % avec du bœuf ;
- 108 élèves ont préféré les haricots verts avec du colin, et autant avec du bœuf ;
- au total, 464 parts de colin ont été servies.

1) Proposer un tableau regroupant l’ensemble des informations ci-dessous.

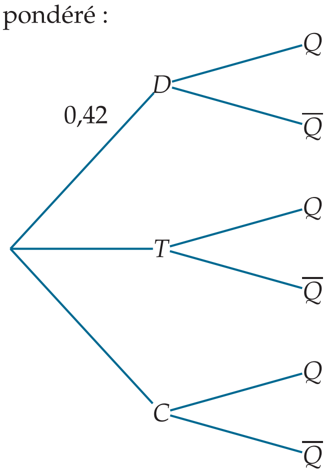
2) On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu’il ait mangé :
a) du navet ? **b)** du colin avec des frites ? **c)** du colin ou des frites ?

3) a) On choisit un élève qui mange du colin. Quelle est la probabilité qu’il mange des frites ?
b) On choisit un élève qui mange des frites. Quelle est la probabilité qu’il mange du colin ?

ACTIVITÉ 4 Arbres pondérés

Un prince charmant se doit de partir à l’aventure et d’affronter des périls. Dans 42 % des cas, il affronte un Dragon, dans 30 % ce sont des Trolls et dans les autres cas, c’est le Chevalier noir. Dans tous les cas, il réussit sa Quête avec une probabilité de 0,8. Tuer un dragon lui rapporte 1 000 pièces d’or, un troll 500 pièces d’or et un chevalier noir 300.

1) a) Recopier et compléter l’arbre pondéré :



b) Décrire $\overline{Q}$ à l’aide d’une phrase.

2) Un prince part à l’aventure. Quelle est la probabilité
a) qu’il gagne 1 000 pièces d’or ?
b) qu’il gagne des pièces d’or ?
c) qu’il revienne bredouille (pour autant qu’il revienne) ?

3) Recopier et compléter le tableau suivant :

Gains (en pièces d’or)	1 000	500	300	0
Probabilité				

4) Combien un prince gagne-t-il de pièces d’or en moyenne pour une quête ?

Cours - Méthodes

1. Vocabulaire des événements

DÉFINITION : Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

REMARQUE : Le but de ce chapitre est de les mathématiser.

DÉFINITION : Univers

L'**univers d'une expérience aléatoire** est l'ensemble des issues possibles appelé également **éventualités**. On le note Ω.

Exemple

Quels sont les univers des expériences aléatoires suivantes ?

1) E_1 : Lancer un dé à six faces.
2) E_2 : Lancer une pièce de monnaie.
3) E_3 : Jouer au loto (FDJ).
4) E_3 : Naissance (genre).

Correction

1) $E_1 : \Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
2) $E_2 : \Omega = \{\text{Pile; Face}\}$
3) E_3 : Ω contient plusieurs millions d'éléments du type $(2; 5; 19; 35; 42; 23), (4; 8; 9; 21; 34; 12), \ldots$
4) $E_4 : \Omega = \{\text{Fille ; garçon}\}$

DÉFINITION : Événement

Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers.
Il peut toujours se décrire à l'aide d'issues.

DÉFINITION : Union

Soient A et B deux événements.
L'**union** de A et de B est l'ensemble des issues qui réalisent A **ou** B.
On le note $A \cup B$ (se lit « A ∪nion B »).

DÉFINITION : Intersection

Soient A et B deux événements.
L'**intersection** de A et B est l'ensemble des issues qui réalisent A **et** B.
On le note $A \cap B$ (se lit « A i∩ter B »).

Exemple

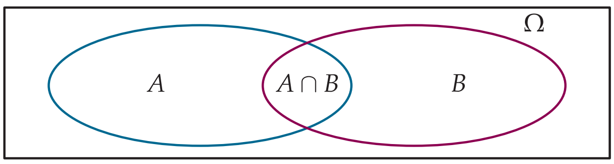
Pour E_1, décrire les événements suivants.

- A : « Faire un nombre pair ».
- B : « Faire un multiple de 3 ».
- $A \cup B$
- $A \cap B$

Correction

- $A = \{2; 4; 6\}$
- $B = \{3; 6\}$
- $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$
- $A \cap B = \{6\}$

REMARQUE : Le **diagramme de Venn** permet de représenter les différents événements.



2. Choix d'un modèle

A. Par l'observation des fréquences

DÉFINITION : De la fréquence à la probabilité

Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence d'une issue va avoir tendance à se stabiliser lorsque n augmente.
La probabilité de l'issue est très proche de la valeur stabilisée observée.

Exemple

Dans une urne opaque contenant un certain nombre de billes rouges, bleues ou jaunes. On tire une bille de l'urne, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne.
On a réalisé l'expérience un très grand nombre de fois :

Nb de boules tirés	Nb d'expériences réalisées		
	2000	5000	10000
Rouges	653	1658	3332
Bleues	1007	2546	5005
Jaunes	340	796	1663

Estimer les probabilités de tirer une boule rouge, une bleue et une jaune.

Correction

Pour $n = 10\,000$. Par expérience, on a obtenu :

- $f_R = \dfrac{3\,332}{10\,000} = 0,3332$
- $f_B = \dfrac{5\,005}{10\,000} = 0,5005$
- $f_B = \dfrac{1\,663}{10\,000} = 0,1663$

On peut choisir le modèle

	R	B	J
p_i	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$

REMARQUE :

1) Lors de la construction du modèle il faut s'assurer que la somme des probabilités fasse 1.
2) Une « modélisation » est une approximation.
Il y a peu de chances que le modèle colle exactement à la réalité.

B. Modèle équiréparti

DÉFINITION : Modèle équiréparti

Dans un **modèle équiréparti**, chaque issue a la même probabilité qui vaut :

$$\frac{1}{\text{Nombre d'issues possibles}}$$

On dit aussi que c'est une **situation d'équiprobabilité**.

3. Calculs de probabilités

DÉFINITION : Loi de probabilité

Une **loi de probabilité** sur un univers associe à chaque issue qui le réalise un nombre compris entre 0 et 1 appelé probabilité. La somme des probabilités des issues est 1.

DÉFINITION : Probabilité d'un événement

La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

NOTATION :

1) Un événement impossible est un événement qui ne se réalise jamais. Sa probabilité vaut 0.
2) Un événement certain est un événement qui est sûr de se réaliser. Sa probabilité vaut 1.

MÉTHODE 1 Calculer des probabilités

► Ex. 32 p. 57 ► Ex. 45 p. 58

1) Si le modèle n'est pas équiréparti, on observe des fréquences.
2) On détermine les issues réalisant l'événement dont on souhaite connaitre la probabilité.
3) On additionne les probabilités des issues qui le réalisent.

Exercice d'application On lance un dé équilibré à 4 faces et on note le numéro de la face du dessus. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Correction Le dé est équilibré, c'est une situation d'équiprobabilité. L'univers est constitué de 4 issues : 1, 2, 3, 4.

La probabilité de chaque issue est donc $\frac{1}{4}$.

L'événement « obtenir un nombre pair » est constitué de deux issues

« 2 » et « 4 » donc sa probabilité est $\frac{1}{4} \times 2$ soit $\frac{1}{2}$.

Exercice d'application On lance un dé truqué qui vérifie $p(1) = 2p(2) = p(3) = 2p(4) = p(5) = 2p(6)$. Quel est la probabilité de l'événement E : « obtenir un multiple de 3 » ?

Correction On a :

$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$

$p(1) + \frac{1}{2}p(1) + p(1) + \frac{1}{2}p(1) + p(1) + \frac{1}{2}p(1) = 1$

soit $p(1) = \frac{2}{9}$. « Obtenir un multiple de 3 »est un événement composé des deux issues « 3 » et « 6 ».

$p(E) = p(3) + p(6) = \frac{2}{9} + \frac{2}{18} = \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$.

REMARQUE :

Dans un modèle équiréparti, il suffit de compter le nombre d'issues réalisant A pour calculer sa probabilité.

DÉFINITION : Événement contraire

Soit A un événement. L'**événement contraire** à A est constitué des issues de Ω ne réalisant pas dans A et se note $\overline{A}$. Sa probabilité vaut : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

PROPRIÉTÉ : Relation entre ∪ et ∩

Si A et B sont deux événements alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

REMARQUE :

1) À priori, $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$. Elle n'est vraie que si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$).
2) Cette formule peut également s'écrire sous la forme $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Activités mentales

1 On considère un dé pipé.
En utilisant le tableau suivant, calculer $p(6)$.

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,1	0,15	0,25	

2 On considère deux événements A et B tels que :
- $p(A) = 0,6$
- $p(B) = 0,5$
- $p(A \cap B) = 0,3$

Calculer $p(A \cup B)$

3 On considère deux événements A et B tels que :
- $p(A) = 0,7$;
- $p(A \cup B) = 0,9$
- $p(B) = 0,5$

Calculer $p(A \cap B)$.

4 On considère deux événements A et B tels que :
- $p(A) = 0,5$
- $p(A \cap B) = 0,4$
- $p(B) = 0,8$

Calculer $p\left(\overline{A \cup B}\right)$

5 On choisit au hasard un des 7 nains. Quelle est la probabilité que ce soit Joyeux ou Atchoum ?

6 On tire au hasard une pièce d'un échiquier.
Soit C l'événement : « la pièce est une tour ou elle est blanche ».
Exprimer $\overline{C}$ par une phrase.

7 Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité qu'ils soient de sexes différents ?

8 A et B sont deux événements incompatibles.
1) Calculer $p(A \cap B)$ si :
   - $p(A) = 0,3$
   - $p(B) = 0,5$
2) Calculer $p(A \cup B)$ si :
   - $p(A) = 0,2$
   - $p(B) = 0,4$

9 Une mère a deux garçons et attend un 3^{e} enfant.
Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille ?

10 On choisit un élève au hasard dans une classe.
Quel est l'événement contraire de l'événement :
1) « c'est une fille qui a appris sa leçon » ?
2) « c'est une fille ou un élève qui appris sa leçon » ?

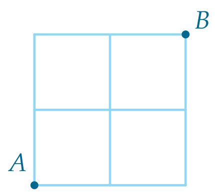
11 Un élève répond au hasard à un Q.C.M. comportant 5 questions. Quel est l'événement contraire de :
« il a répondu juste à au moins 2 questions » ?

Expérience aléatoire

12 On lance cinq fois une pièce de monnaie. La sortie de Pile rapporte 1 point. La sortie de Face ne rapporte rien. On s'intéresse à la somme des points obtenus à l'issue des cinq lancers.
1) Décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire.
2) Préciser le nombre d'éventualités qui le composent.

13 Même consigne que l'exercice **12**.
On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on soustrait le plus petit résultat obtenu du plus grand. Le résultat est nul si le lancer produit un double.

14 Même consigne que l'exercice **12**.
Pour se rendre du point A au point B, on choisit au hasard un trajet parmi tous les trajets possibles en se déplaçant d'un "pas" à droite ou un "pas" vers le haut.



15 À partir du lancer simultané de deux dés tétraédriques, imaginer cinq expériences aléatoires conduisant à cinq univers différents.

16 On lance deux dés à trois faces équilibrés et on s'intéresse à la somme des nombres obtenus. On définit les événements suivants :
- E : « le résultat est pair »
- F : « le résultat est au moins égal à 5 »
- G : « le résultat est au moins égal à 6 »

Préciser les événements élémentaires qui composent chacun des événements ci dessus.

17 Une personne pressée répond au hasard à un sondage. Deux questions sont posées et à chacune, on donne le choix entre :
- favorable
- sans opinion
- opposé

De combien de façons la personne peut répondre ?

S'entraîner

Vocabulaire des événements

18 On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.
On appelle :

- C l'événement « la carte tirée est un cœur »
- F l'événement « la carte tirée est une figure »

1) Décrire par une phrase l'événement $C \cap F$.
Combien compte-t-il d'issues ?
2) Décrire par une phrase l'événement $C \cup F$.
Combien compte-t-il d'issues ?
3) Décrire par une phrase l'événement $\overline{C} \cap F$.
Combien compte-t-il d'issues ?
4) Décrire par une phrase l'événement $\overline{C \cup F}$.
Combien compte-t-il d'issues ?

19 Deux épidémies sévissent en même temps dans un lycée, la gastro-entérite et un rhume. On choisit un élève au hasard et on nomme :

- G l'événement « l'élève a la gastro-entérite »
- R l'événement « l'élève a un rhume »

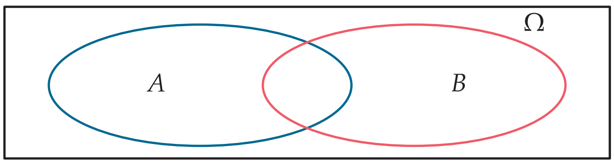
Décrire à l'aide de ces deux événements :
1) « l'élève a la gastro-entérite et le rhume »
2) « l'élève a le rhume mais pas la gastro-entérite »
3) « l'élève a au moins une des deux maladies »
4) « l'élève n'a aucune des deux maladies »

20 On regarde à un instant au hasard l'heure affichée par une horloge à affichage numérique, et on note le chiffre des dizaines du nombres des minutes.
1) Décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire.
2) Préciser le nombre d'éventualités qui le composent.

21 Dans une classe de 13 filles et 16 garçons, on désigne au hasard une fille et un garçon pour être délégués provisoires.
Combien y a-t-il de couples possibles ?

22 Construire un diagramme de Venn (sur le modèle ci-dessous) pour chacun des événements suivants.

- $A \cap \overline{B}$
- $A \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B}$
- $\overline{A \cup B}$
- $\overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A} \cup \overline{B}$



Calcul de probabilités

23 Soit A et B deux événements tels que :

- $p(A) = 0,7$
- $p(A \cap B) = 0,3$
- $p(B) = 0,5$

En s'aidant d'un diagramme de Venn, calculer :
1) $p\left(\overline{A}\right)$ **2)** $p(A \cup B)$ **3)** $p\left(\overline{A} \cap B\right)$

24 Soit S et T deux événements tels que :

- $p(S) = 0,5$
- $p(S \cup T) = 0,9$
- $p(T) = 0,6$

Calculer les probabilités suivantes :
1) $p(S \cap T)$ **2)** $p\left(\overline{S \cup T}\right)$ **3)** $p\left(\overline{S \cap T}\right)$.

25 Robin des Bois atteint la cible avec une probabilité de 0,7. Quelle est la probabilité qu'il rate sa cible ?

26 A et B sont deux événements incompatibles.

- $p(A) = 0,4$
- $p(B) = 0,22$

Déterminer la probabilité des événements suivants :
1) $\overline{A}$ **2)** $\overline{B}$ **3)** $A \cup B$

27 A et B sont deux événements tels que :

- $p(A) = 0,8$
- $p(B) = 0,53$

1) A et B sont-ils incompatibles ?
2) Sachant que $p(A \cup B) = 0,95$, calculer :
a) $p(A \cap B)$ **b)** $p\left(A \cap \overline{B}\right)$

28 On considère 2 événements V et F tels que :

- $p(V) = 0,4$
- $p(V \cup F) = 0,8$
- $p(F) = 0,3$

Aïssatou prétend que ce n'est pas possible.
Confirmer ou infirmer sa déclaration.

29 On considère 2 événements V et F tels que :

- $p(V) = 0,6$
- $p(V \cap F) = 0,5$
- $p(F) = 0,4$

Arinucea prétend que ce n'est pas possible.
Confirmer ou infirmer sa déclaration.

30 On considère 2 événements V et F tels que :

- $p(V) = 0,6$
- $p(V \cap F) = 0,4$
- $p(F) = 0,4$

Ataroa prétend que ce n'est pas possible.
Confirmer ou infirmer sa déclaration.

31 On considère deux événements V et F tels que $p(V) = 0,6$ et $p(V \cup F) = 0,7$. Ahuarii prétend que ce n'est pas possible. Confirmer ou infirmer sa déclaration.

Équiprobabilité

32 ► MÉTHODE 1 p. 54

On lance 3 fois une pièce bien équilibrée.

1) Représenter la situation par un arbre.
2) Quelle est la probabilité :
   a) d’avoir 3 faces ?
   b) que le 2e jet soit face ?
   c) que le 3e jet soit différent du 1er ?

33 Deux dés tétraédriques ont des faces numérotées de 1 à 4. On les lance et on regarde la somme obtenue.

1) Quels sont les résultats possibles ?
2) Est-ce une situation d’équiprobabilité ?
3) Déterminer la probabilité de chaque résultat.

34 On lance un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

1) Les trois couleurs sont-elles équiprobables ?
2) Déterminer la probabilité d’apparition de chaque couleur.

35 **Dé à 4 faces**

On lance deux dés à quatre faces et on regarde la somme obtenue.

1) Donner l’ensemble des résultats possibles.
2) Donner une loi de probabilités de cette expérience aléatoire (justifier).
3) Quelle est la probabilité d’obtenir un nombre pair ?
4) Quelle est la probabilité d’obtenir un nombre multiple de trois ?

36 **Menus**

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix

- entre 2 entrées : Artichaut ou Betterave ;
- entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope ;
- entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.

Un menu se compose :

- d’une entrée ; • d’un plat ; • d’un dessert.

1) En utilisant un arbre, représenter tous les menus.
2) Combien de menus différents sont possibles ?
3) On choisit un menu au hasard.
   Quelle est la probabilité :
   a) qu’il comporte une escalope ?
   b) qu’il comporte de l’artichaut et du fromage ?
   c) qu’il ne comporte pas de cheval ?

37 Un groupe de 4 amis, Émile, Flore, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1) Représenter cette situation par un arbre.
2) Déterminer les probabilités suivantes.
   a) C’est un garçon qui rame.
   b) Hélène écope.
   c) Les deux qui travaillent sont de même sexe.

38 **Tirage successif avec remise**

On tire au hasard une carte d’un jeu de 32 cartes, on la note, puis on la remet dans le jeu avant d’en tirer une seconde.

1) Est-ce une situation d’équiprobabilité ?
2) Combien y a-t-il d’issues ?
3) Calculer la probabilité de :
   a) tirer 2 cœurs ;
   b) ne pas tirer de cœur ;
   c) tirer exactement 1 cœur ;
   d) tirer deux fois la même carte ;
   e) tirer deux cartes différentes ;
   f) tirer le roi de cœur.

39 **Tirage successif sans remise**

On tire au hasard deux cartes d’un jeu de 32 cartes, l’une après l’autre.

1) Est-ce une situation d’équiprobabilité ?
2) Combien y a-t-il d’issues ?
3) Calculer la probabilité de tirer
   a) deux cœurs ;
   b) exactement 1 cœur ;
   c) deux fois la même carte ;
   d) deux cartes différentes ;
   e) le roi de cœur.
4) Calculer la probabilité de ne pas tirer de cœur.

40 Trois CD notés a, b et c ont respectivement des boîtes nommées A, B et C. On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1) Combien de rangements sont possibles ?
2) Quelle est la probabilité
   a) que les 3 CD soient bien rangés ?
   b) qu’exactement 1 CD soit bien rangé ?
   c) qu’exactement 2 CD soient bien rangés ?
3) En déduire la probabilité qu’aucun CD ne soit bien rangé.

S'entraîner

Sans équiprobabilité

41 Un univers associé à une expérience aléatoire est constitué de trois issues. La loi de probabilité vérifie $p(A) = t^2$, $p(B) = t$ et $p(C) = \frac{1}{4}$. Déterminer t.

42 **Loi de probabilité**

Pour chacun des cas suivants, déterminer la valeur de t qui permet de définir une loi de probabilités.

1)

Issues	P	F
Probabilités	0,3	t

2)

Issues	Vert	Orange	Rouge
Probabilités	0,5	t	0,3

3)

Issues	1	2	3	4
Probabilités	0,25	t	0,2	0,4

4)

issues	1	2	3	4	5	6
probabilités	t	$2t$	$3t$	$4t$	$5t$	$6t$

43 **Au tennis**

Un joueur de tennis de niveau international a une probabilité 0,58 de réussir son premier service et une probabilité de 0,06 de faire une double faute.

Quelle est la probabilité qu'il réussisse seulement son deuxième service ?

44 Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. Ils peuvent présenter deux défauts :

- un défaut de clavier ;
- un défaut d'écran.

Sur un grand nombre d'ordinateurs, une étude statistique montre que :

- 2 % présentent un défaut d'écran ;
- 2,4 % présentent un défaut de clavier ;
- 1,5 % présentent les deux défauts.

1) On choisit au hasard un ordinateur et on considère les événements suivants.
- E : « L'ordinateur présente un défaut d'écran » ;
- C : « L'ordinateur présente un défaut de clavier ».

Détermine $p(E)$, $p(C)$ et $p(E \cap C)$.

2) On considère les événements suivants.
- « L'ordinateur présente au moins un défaut » ;
- « L'ordinateur ne présente que le défaut de d'écran ».

a) Traduire ces 2 événements à l'aide de E et C.

b) Calcule leur probabilité.

45 ► MÉTHODE 1 p. 54

On lance un dé pipé.

Le tableau suivant regroupe les probabilités.

F	1	2	3	4	5	6
$p(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1) Calculer $p(6)$.

2) Calculer la probabilités des événements suivants.

a) « La face obtenue est paire » ;

b) « la face obtenue est supérieur ou égale à 5 ».

46 **S'arrêter**

Voici le cycle d'allumage d'un feu tricolore :

- 45 s pour le feu vert ;
- 5 s pour le feu orange ;
- 20 s pour le feu rouge.

En admettant qu'un automobiliste arrive par hasard devant un feu tricolore fonctionnel, déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience.

47 **Prendre rendez-vous !**

Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements :

- O_1 : « La 1er ligne est occupée ».
- O_2 : « La 2e ligne est occupée ».

Une étude statistique montre que :

- $p(O_1) = 0,4$
- $p(O_2) = 0,3$
- $p(O_1 \cap O_2) = 0,2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

1) « La ligne 1 est libre ».

2) « Au moins une des lignes est occupée ».

3) « Au moins une des lignes est libre ».

48 Un magazine de jeux vidéos souhaite étudier les ventes des deux consoles de next-gen :

- celle de Megahard : la Z-boite 2 ;
- celle de Silency : la Gare de jeux.

Pour cela elle étudie les ventes sur une journée dans un magasin de centre-ville. Elle constate que sur les 127 ventes de consoles next-gen de la journée, 53 personnes ont acheté la Z-boite 2. Pedro entre dans le magasin pour acheter une des deux consoles.

1) Quelle est la probabilité qu'il achète la Gare de jeux ?

2) Bill pense que Pedro à 50 % de chances d'acheter chacune des deux consoles. Bill a-t-il raison ? Pourquoi ?

49 Écrire son prénom

THEO connaît les quatre lettres de son prénom sans se rappeler de leur ordre.

1) Il écrit les quatre lettres au hasard.
   a) Combien a-t-il de possibilités d'écriture ?
   b) Quelle probabilité a-t-il de l'écrire correctement ?
   c) Quelle est la probabilité que le mot écrit commence par T ?
2) S'il sait que son prénom commence par T, quelle est la probabilité qu'il l'écrive correctement ?
3) Reprendre les mêmes questions avec BOB.

50 Résultats au baccalauréat

On considère un établissement scolaire de 2 000 élèves, regroupant des collégiens et des lycéens.

- 19 % de l'effectif total est en classe Terminale ;
- parmi ces élèves de Terminale, 55 % sont des filles ;
- le taux de réussite au baccalauréat dans cet établissement est de 85 % ;
- parmi les candidats ayant échoué, la proportion des filles a été de $\frac{8}{19}$.

1) Recopier et compléter le tableau des effectifs regroupant les résultats au baccalauréat :

Éleves	Garçons	Filles	TOTAL
Réussite			
Échec		24	
TOTAL			380

Après la publication des résultats, on choisit au hasard un élève parmi l'ensemble des élèves de Terminale. On considère les événements suivants :

- G : « l'élève est un garçon » ;
- R : « l'élève a eu son baccalauréat ».

Dans la suite, on donnera les résultats sous forme décimale, arrondis à 10^{-2} près.

2) Définir les événements suivants par une phrase :
   a) R b) $\overline{G} \cap R$
3) Calculer les probabilités des événements suivants :
   a) $\overline{R}$ b) $\overline{G} \cup \overline{R}$
4) On choisit un élève au hasard parmi les bacheliers. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

51 Jetons dans une urne

Une urne contient 4 jetons :

- deux jaunes ;
- un rose ;
- un violet.

On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1) Représenter cette situation par un arbre.
2) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3) On considère les événements :
   - R : « Le 1er jeton tiré est rose » ;
   - J : « Le 2^{e} jeton tiré est jaune ».
   a) Déterminer $p(R)$ et $p(J)$.
   b) Traduire par une phrase $R \cap J$.
   Calculer $p(R \cap J)$.
   c) Calculer $p(R \cup J)$.
4) On considère l'événement :
   - N :« Aucun jeton tiré n'est jaune ».
   a) Calculer $p(N)$.
   b) Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
   c) Calculer $p\left(\overline{N}\right)$.

52 Une pièce de monnaie à deux faces, PILE et FACE, est bien équilibrée. C'est à dire qu'à chaque lancer, chaque face a la même probabilité d'apparition.
Préciser la loi de probabilité dans chacun des cas suivants.

1) On effectue un seul lancer de la pièce et on note le résultat obtenu.
2) On effectue deux lancers de la pièce et on note, dans l'ordre d'apparition, les deux faces obtenues.
3) On effectue deux lancers de la pièce et on note le résultat sans tenir compte de l'ordre d'apparition des deux faces obtenues.

53 Choix d'un doigt

On choisit au hasard un doigt d'une des deux mains.
On considère les événements suivants.

- I : « le doigt est un index » ;
- G : « le doigt est sur la main gauche ».

Calculer les probabilités des événements suivants.

1) I
2) G
3) $\overline{I}$
4) $I \cup G$
5) $I \cap G$
6) $\overline{I \cup G}$
7) $\overline{I \cap G}$
8) $\overline{I} \cap \overline{G}$
9) $\overline{I} \cup \overline{G}$

Approfondir

54 Le mercredi à la piscine municipale, on a relevé 42 % des entrées au « tarif moins de 12 ans », 37 % au « tarif étudiant »et les autres « plein tarif ». On rencontre au hasard une personne sortant de la piscine.

1) Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 12 ans ?

2) Quelle est la probabilité que la personne ait payé « plein tarif » ?

55 **Sondage**

Afin de mieux connaître sa clientèle, une station de sports d'hiver a effectué une enquête auprès de 250 skieurs.

Voici la synthèse des réponses au sondage :

- deux tiers des personnes qui viennent tous les week-ends possèdent leur matériel ;
- la moitié des personnes venant deux semaines par an possèdent également leur matériel ;
- 44 % des personnes interrogées louent sur place.

On considère les événements suivants.

- M : « la personne possède son matériel » ;
- L : « la personne loue ses skis sur place » ;
- A : « la personne loue ses skis ailleurs » ;
- S : « la personne vient une semaine par an » ;
- W : « la personne vient tous les week-ends » ;
- Q : « la personne vient deux semaines par an ».

1) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous présentant la synthèse des réponses.

	M	L	A	Total
S	25			
W			5	30
Q		30		100
Total				250

2) On choisit au hasard un client parmi les 250 personnes interrogées, toutes ayant la même chance d'être choisies.

a) Calculer les probabilités $p(Q)$ et $p(L)$.

b) Décrire par une phrase l'événement $Q \cap L$.
Calculer $p(Q \cap L)$.

c) Calculer $p(Q \cup L)$.

3) On choisit au hasard un client qui possède son propre matériel.
Quelle est la probabilité qu'il vienne toutes les semaines ?

56 Un car scolaire se dirige vers Saint Jacques de Compostelle en passant par Conques avec à son bord 75 élèves dont 40 garçons. Miguel, le chauffeur, fait un sondage auprès des élèves pour savoir qui aime les chants grégoriens. Il découvre alors que 32 élèves ne les aiment pas, dont la moitié sont des filles, et que 20 % des garçons les aiment, et que 18 filles n'en ont jamais entendu parler.

1) Recopie et complète le tableau ci-dessous.

	Aime	N'aime pas	Ne connait pas	Total
Garçons				
Filles				
Total				

2) On tire au hasard la fiche d'un élève.
Quelle est la probabilité que :

a) ce soit un garçon ;

b) ce soit un garçon qui aime les chants grégoriens ;

c) ce soit un garçon ou un élève qui aime les chants grégoriens ;

3) On tire au hasard la fiche d'un garçon.
Quelle est la probabilité qu'il aime les chants grégoriens ?

57 Dans un lycée de 1 470 élèves, 350 élèves ont été vaccinés contre la grippe au début de l'hiver.
10 % des élèves ont contracté la maladie pendant l'épidémie annuelle dont 4 % des élèves vaccinés.

1) Dresser un tableau à double entrée et le compléter.

2) On choisit au hasard l'un des élèves de ce lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être choisis.

a) Calculer la probabilité des événements :
- V : « il a été vacciné » ;
- G : « il a eu la grippe ».

b) Calculer la probabilité de l'événement $V \cap G$.

c) Calculer la probabilité de l'événement $V \cup G$.

d) Décrire par une phrase l'événement $\overline{V}$

3) On choisit au hasard un élève parmi ceux qui ont été vaccinés, quelle est la probabilité qu'il ait eu la grippe ?

4) On choisit au hasard un élève parmi ceux qui n'ont pas été vaccinés, quelle est la probabilité qu'il ait eu la grippe ?

5) Expliquer pourquoi le vaccin est efficace.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Connaître et utiliser le vocabulaire
- expérience aléatoire, univers
- événement, issues

Comprendre et interpréter
- une intersection d'événements
- une union d'événements
- un événement contraire

Reconnaître et utiliser
- une situation d'équiprobabilité
- une observation de fréquences

Calculer des probabilités
- à l'aide d'une distribution de fréquences
- à l'aide un arbre des possibles
- à l'aide d'un tableau

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur **manuel.sesamath.net**

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

58 On tire 2 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'une après l'autre et sans remettre la 1re. Le nombre d'issues est :

ⓐ 63 ⓑ 64 ⓒ 992 ⓓ 1 024

59 On observe la trotteuse d'une horloge à aiguilles qui affiche les chiffres de 1 à 12.
La probabilité qu'elle soit à un instant donné sur un chiffre est de :

ⓐ $\frac{1}{5}$ ⓑ $\frac{1}{12}$ ⓒ $\frac{1}{60}$ ⓓ $\frac{12}{60}$

Un concessionnaire propose deux options sur les voitures qu'il vend :
la peinture métallisée (M) et l'autoradio bluetooth (B). On choisit une voiture au hasard.

60 L'événement $M \cup B$ peut s'énoncer :

ⓐ la voiture a les deux options
ⓑ la voiture a au moins une option
ⓒ la voiture a soit l'option M, soit l'option B
ⓓ la voiture a l'option M ou l'option B
ⓔ la voiture a l'option M et l'option B

61 L'événement $M \cap B$ peut s'énoncer :

ⓐ la voiture a les deux options
ⓑ la voiture a au moins une option
ⓒ la voiture a soit l'option M, soit l'option B
ⓓ la voiture a l'option M ou l'option B
ⓔ la voiture a l'option M et l'option B

62 L'événement $\overline{M \cup B}$ peut s'énoncer :

ⓐ la voiture n'a pas d'option
ⓑ la voiture n'a pas l'option M ou n'a pas l'option B
ⓒ la voiture n'a ni l'option M, ni l'option B
ⓓ soit la voiture n'a pas l'option M, soit elle n'a pas l'option B

63 A et B sont deux événements tels que : $p(A) = 0,3$; $p(B) = 0,5$; $p(A \cup B) = 0,7$.

(a) $p(A \cap B) = 0,1$ (b) $p(A \cap B) = 0,15$ (c) $p(A \cap B) = 0,2$ (d) $p(A \cap B) = 0,8$

Un élève répond au hasard aux 5 questions d'un Q.C.M.
Chaque question du test propose trois réponses dont une seule est juste.

64 On appelle A l'événement : « l'élève a répondu juste à au moins 2 questions ».
L'événement $\overline{A}$ est :« l'élève a répondu ...

(a) ... faux à au moins deux questions »
(b) ... juste à au plus deux questions »
(c) ... juste à moins de deux questions »
(d) ... juste à au plus une question »

65 On appelle B l'événement : « l'élève a 5 réponses justes ».

(a) $p(B) = \frac{1}{5}$ (b) $p(B) = \frac{5}{3}$ (c) $p(B) = \frac{1}{15}$ (d) $p(B) = \frac{1}{243}$

On donne la répartition des élèves de 1re du lycée Sophie Germain :

	ES	L	S	Total
Garçons	18	8	63	89
Filles	43	18	39	100
Total	61	26	102	189

66 On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ou un élève de ES ?

(a) $\frac{61+89}{189}$ (b) $\frac{61+89-18}{189}$ (c) $\frac{43+18+8+63}{189}$ (d) $\frac{18}{61+89}$

67 On choisit un garçon au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit en ES ?

(a) $\frac{18}{189}$ (b) $\frac{18}{61}$ (c) $\frac{18}{89}$ (d) $\frac{61}{89}$

68 On lance trois dés cubiques simultanément. Quelles combinaisons ont la plus forte probabilité de sortie ?

(a) un 1, un 2 et un 3. (b) deux 1 et un 2 (c) un 2, un 3 et un 5 (d) trois 4

69 On lance deux dés simultanément. Quelle est la probabilité d'avoir deux faces identiques ?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{36}$ (c) $\frac{2}{36}$ (d) $\frac{6}{36}$

TP 1 Le lièvre et la tortue

INFO ALGO

1 Première course

Une partie du jeu du lièvre et de la tortue se déroule de la façon suivante :

> La distance à parcourir est de 6 cases.
> - On lance un dé.
> - Si on obtient 6, le lièvre avance de 6 cases.
> - Sinon, la tortue avance d'une case.

1) À priori, qui a le plus de chances de gagner ?

2) Faire une simulation à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme.
Donner une valeur approchée de la probabilité que le lièvre gagne.

3) À l'aide d'un arbre, calculer la probabilité que la tortue gagne.
En déduire la probabilité que le lièvre gagne.

2 Deuxième course

Les règles changent !

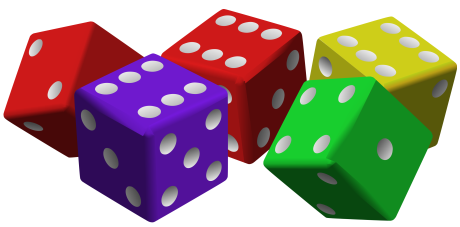
> - La distance a parcourir est maintenant de 4 cases.
> - Le lièvre a mangé une super carotte :
> il avance de 4 cases quand on obtient 5 ou 6 au lancer de dé.

1) Adapter la simulation à cette situation.
Donner une approximation de la nouvelle loi de probabilité.

2) À l'aide de l'arbre, retrouver la distribution de probabilité.

TP 2 Full

Le jeu de yams se joue avec 5 dés. On essaye de faire des combinaisons diverses et on a le droit de relancer deux fois tout ou une partie des dés.
Corinne a obtenu au 1er lancer trois 4, un 2 et un 5. Elle voudrait faire un full (3 dés d'une valeur et 2 dés d'une autre). Elle hésite entre garder les trois 4 et le 5 et relancer le dé indiquant 2 ou garder les trois 4 et relancer les deux autres dés. Aide-la à résoudre ce dilemme.



Travaux pratiques

TP 3 Algorithme de Monte-Carlo

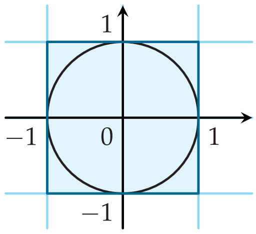
INFO

1) Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère un disque de centre O et de rayon 1 et un carré de centre O et de côté 2 comme sur le graphique ci-dessous.

a) Déterminer l'aire du disque et l'aire du carré.

b) Quelles conditions doivent vérifier les coordonnées d'un point M pour qu'il soit à l'intérieur du carré ?

c) Quelles conditions doivent vérifier les coordonnées de M pour que $OM \leqslant 1$?
Dans ce cas, que peut-on en déduire pour M ?



2) L'algorithme de Monte-Carlo calcule une valeur approchée de π en créant un grand nombre de points aléatoires dans le carré, et en observant combien se trouvent dans le disque. Le rapport du nombre de points dans le disque sur le nombre total de points devrait être proche du rapport de l'aire du disque sur l'aire du carré et nous permettra de calculer π.

a) Complète l'algorithme ci-dessous.

```
Algorithme : algorithme mystère
Liste des variables utilisées
  x,y,pi : nombre réel
  k, n, compteur : nombre entier
Traitements
  Demander n
  Donner à compteur la valeur de 0
  Pour k variant de 1 à n faire
    Donner à x la valeur de un nombre aléatoire entre ...et ...
    Donner à y la valeur de un nombre aléatoire entre ...et ...
    Si ... Alors
      Donner à compteur la valeur de compteur+1
    Fin Si
  Fin Pour
  Donner à pi la valeur de compteur/n
  Donner à pi la valeur de pi × ...
Affichage
  Afficher « π vaut environ : »
  Afficher la valeur pi
Fin de l'algorithme
```

b) Implémenter cet algorithme sur un ordinateur ou sur une calculatrice.
Le tester avec différentes valeurs de n.

c) Trouve-t-on toujours la même valeur approchée pour π ?

3) Paul affirme qu'on peut connaître la précision de notre valeur approchée de π. A-t-il raison ?

TP 4 Problème de Monty Hall

INFO

Sur le plateau d'un jeu télévisé, il y a trois portes dont une cache une voiture et les deux autres une chèvre. Il s'agit de choisir une des portes pour gagner ce qu'il y a derrière.
Le jeu se déroule en 3 étapes :

- le joueur choisit une porte mais ne l'ouvre pas ;
- l'animateur, qui sait où se trouve la voiture, ouvre une autre porte que celle choisie et qui cache une chèvre ;
- l'animateur propose au joueur de changer son choix initial.

Le joueur a-t-il intérêt à modifier son choix ?

1) L'algorithme ci-dessous permet de faire une simulation de ce problème.
Compléter-le puis effectuer la simulation.

```
Algorithme : Problème de Monty Hall
Liste des variables utilisées
  NbEssais : nombre entier
  Change : nombre réel
  NeChangePas : nombre réel
  PorteGagnante : nombre entier
  PorteChoisie : nombre entier
  k : nombre entier
Traitements
  Demander NbEssais
  Donner à Change la valeur de 0
  Donner à NeChangePas la valeur de 0
  Pour k variant de 1 à NbEssais faire
    Donner à PorteGagnante la valeur de un nombre aléatoire entre 1 et 3
    Donner à PorteChoisie la valeur de un nombre aléatoire entre 1 et 3
    Si PorteChoisie =PorteGagnante Alors
      Donner à ... la valeur de ...+1
    Sinon
      Donner à ... la valeur de ...+1
    Fin Si
  Fin Pour
  Donner à Change la valeur de Change/NbEssais
  Donner à NeChangePas la valeur de NeChangePas/NbEssais
Affichage
  Afficher « La probabilité de gagner en changeant est de »
  Afficher la valeur Change
  Afficher « La probabilité de gagner en ne changeant pas est de »
  Afficher la valeur NeChangePas
Fin de l'algorithme
```

2) Que peut-on en conclure ?

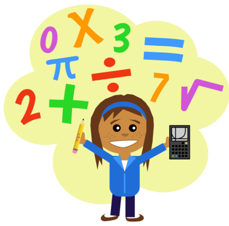
3) Que se passe-t-il si on joue maintenant avec quatre portes dont une seule gagnante ?

TRAVAILLER AUTREMENT

Ce chapitre regroupe un ensemble d'activités pouvant être abordées à des moments variés de l'année.
Elles utilisent des notions de différents chapitres et permettent de travailler autrement pour développer les compétences transversales :

- rechercher, extraire et organiser l'information utile ;
- réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes ;
- raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale, démontrer ;
- présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté.

SE DÉPASSER ET FRANCHIR DES SOMMETS



Problèmes ouverts

Les **problèmes ouverts** se définissent comme des « *énoncés courts qui n'induisent ni la méthode, ni la solution* ».
Il est possible de s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.
La **narration de recherche**, trace écrite des démarches engagées pour résoudre le problème, permet de s'initier et de développer une démarche scientifique.

Problèmes de synthèse

Les **problèmes de synthèse** font appel à des notions de différents chapitres avec des questions qui s'enchaînent. Ils permettent de réactiver un ensemble de connaissances et établir des liens entre les chapitres tout en étant guidé.

QCM de synthèse

Les **Questionnaires à Choix Multiples** permettent de vérifier l'acquisition des raisonnements en s'affranchissant de la rédaction. Trois sont proposés sur chaque partie du programme.
Un outil permettant de créer des QCM très facilement est disponible sur le logiciel gratuit Labomep (*www.labomep.net*).
Interactif, il propose solutions, éléments de correction et des exercices en remédiation.

Sudomath

Basé sur le principe du sudoku, le **Sudomath** est une grille à compléter à partir des réponses aux questions. Lorsque toutes sont résolues sans erreurs, on obtient une grille classique qu'il est possible de compléter. Trois sont proposés sur chaque partie du programme. Un outil permettant de créer des Sudomaths individualisés est disponible gratuitement sur Mutuamath (*www.mutuamath.net*).

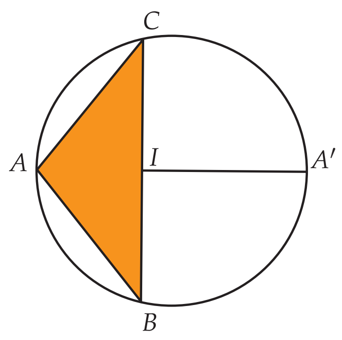
PROBLÈMES OUVERTS

1 Émile voudrait faire fabriquer une enseigne lumineuse pour son magasin suivant le schéma ci-dessous. Il s'agit d'un triangle inscrit dans un cercle de diamètre $[AA']$ avec $AA' = 5\,\text{m}$.

Pour que son enseigne soit la plus lumineuse possible il souhaiterait que le triangle ait la plus grande aire possible.

Sur le schéma, I est un point du segment $[AA']$, mobile sur ce segment. B et C sont les points d'intersection de la droite (d) perpendiculaire à $[AA']$ passant par I avec le cercle.

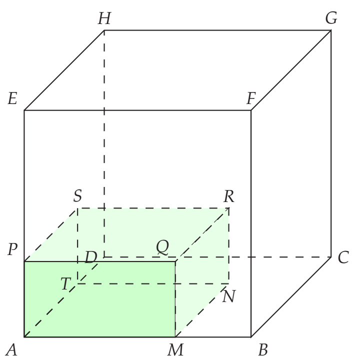
Quelle position de I sur le segment $[AA']$ donne l'aire maximale pour le triangle ?



2 **Prendre des initiatives**

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 cm.

On construit un point M appartenant au segment $[AB]$ et le point P appartenant au segment $[AE]$ tel que $AM = EP$. On construit alors le pavé droit $AMNTPQRS$ de telle façon que $AMNT$ soit un carré.



Pour quelle position du point M le volume du pavé $AMNTPQRS$ sera-t-il maximal ?

3 On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx$,
où $a \in \{0,5; 1; 1,5; 2\}$ et $b \in \{-2; -1; -0,5; 0\}$.
On choisit au hasard une de ces fonctions.
Quelle est la probabilité que sa courbe représentative passe par le point de coordonnées $(3; 3)$?

4 Marius possède une boule de pétanque de compétition de diamètre 7,5 cm et qui pèse 750 g. Elle est en acier inoxydable de densité 8,01 g/cm^3. Un ferrailleur décide de découper la boule au niveau de « l'équateur ». Dessiner en vraie grandeur la section obtenue.

5 **Inspiré par les BD de Morris et Goscinny**

Averel est en train de manger avec Ma pendant que Joe, Jack et William se trouvent dans un champ et ne bougent pas. Ils forment donc un triangle.

Rantanplan se trouve n'importe où dans le même champ. (dans le triangle ou en dehors, peu importe).
Simultanément, les trois frères Dalton appellent Rantanplan. De manière équiprobable, le célèbre chien choisit un des trois lascars au hasard et se dirige vers lui. Arrivé à la moitié du chemin, il fait un trou et comme il a une mémoire de poisson rouge, il s'arrête car il ne sait plus où aller.

Les trois frères l'appellent simultanément à nouveau, et à nouveau Rantanplan choisit un des trois loustics au hasard et se dirige vers lui. Arrivé à la moitié du chemin il fait un trou et comme bla bla bla poisson rouge bla bla bla, il s'arrête... et ainsi de suite un très grand nombre de fois.
Quelle figure les trous de Rantanplan réalisent-t-ils (vue du ciel) ?

6 Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère les points suivants :

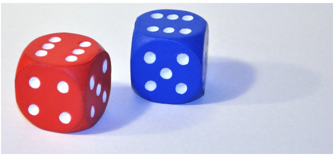
- $A(1; 3)$
- $C(-3; 0)$
- $B(4; 1)$
- $K\left(1; \dfrac{4}{7}\right)$
- $H\left(3; \dfrac{5}{3}\right)$

Soit L, un point de la droite (AC). À quelle condition les droites (AK), (CH) et (BL) sont-elles concourantes ?

7 Comparer le nombre de points entre une droite et un cercle.

8 Une droite est-elle droite ?

9 Yassine et Éric jouent au vecteur aléatoire.
Le jeu se joue sur un plateau muni d'un repère $(O; I, J)$ et d'un quadrillage sur les graduations entières. Chaque joueur dispose de deux pions placés au début du jeu en O.
Il se joue avec deux dés, l'un rouge et l'autre bleu. À chaque lancé, un joueur peut déplacer l'un de ses pions selon un vecteur dont le dé rouge donne la première coordonnée et le dé bleu donne la seconde. Le joueur peut choisir de les compter positivement ou négativement.
Le but du jeu est d'arriver sur un nœud du quadrillage déjà occupé par l'adversaire pour manger son pion.



Yassine a un pion en $(-2, 4)$. Éric a un pion en $(5; -4)$. Il voudrait manger le pion de Yassine.
Quelle est la probabilité qu'Éric gagne en deux coups sachant que Yassine déplace son pion entre les deux ?

10 **Combien de nombre (niveau 1)**
Combien y a-t-il de nombres dans la liste ci-dessous ?

1) vingt-quatre
2) $\dfrac{13}{27}$
3) $0,01$
4) $3(8+5x)-15x$
5) 10 millièmes
6) $\sqrt{9\times 2^6}$
7) $\dfrac{4(5x-2)+8+4x}{x}$

11 **Combien de nombre (niveau 2)**
Combien y a-t-il de nombres dans la liste ci-dessous ?

1) $(x-2)(x+3)-(x+2)(x-3)$
2) $2x+3$
3) $x^2-(x+\sqrt{11})(x-\sqrt{11})+x$
4) $x+4^2-5$
5) $2x$
6) $x+11$

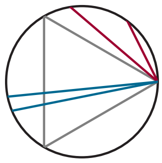
12 Comparer le carré de la somme de deux réels avec la somme de leurs carrés.

13 Comparer le carré de la moyenne de deux réels avec la moyenne de leurs carrés.

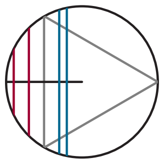
14 Sans matériel électronique,
calculer 4568123×6147235.

15 **Paradoxe de Bertrand**
Soit un cercle de rayon 1. Tous les triangles équilatéraux inscrits dans ce cercle ont la même longueur de côté. On cherche à déterminer la probabilité qu'une corde du cercle, choisie au hasard, possède une longueur supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit (On appelle S cet événement).
Sur les figures ci-dessous, les cordes bleues ont une longueur supérieure à la longueur du côté du triangle, alors que les cordes rouges ont une longueur inférieure.

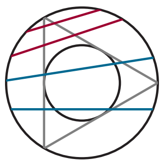
1re méthode : Extrémités aléatoires : soit un point de la circonférence du cercle et le triangle équilatéral inscrit dont l'un des sommets est ce point. On choisit aléatoirement un autre point sur le cercle et on considère la corde reliant les deux points. Calculer $p(S)$.



2e méthode : Rayon aléatoire : on choisit un rayon du cercle et on considère le triangle équilatéral inscrit dont un côté est perpendiculaire au rayon. On choisit aléatoirement un point sur le rayon et on trace la corde dont il est le milieu. Calculer $p(S)$.



3e méthode : Milieu aléatoire : soit un point choisi aléatoirement à l'intérieur du cercle et une corde dont il est le milieu. La corde est plus longue qu'un côté du triangle équilatéral inscrit si le point est situé à l'intérieur d'un cercle inscrit dans le triangle. Calculer $p(S)$.



Que peut-on conclure de ces trois calculs sur la notion d'équiprobabilité ?

16 Un rectangle a :

- une aire égale à 1 m^2 ;
- un périmètre inférieur ou égal à 8 m.

Quelles sont les dimensions possibles de ce rectangle ?

17 Dans un pays, on incite les parents à avoir des enfants jusqu'à ce que les deux sexes soient représentés. Quel est le nombre moyen d'enfants par famille ?

18 $\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre $[AB]$ et O est son centre. M est un point du cercle et on note M' le milieu de $[AM]$.
Quel est l'ensemble des points M' obtenus lorsque M décrit $\mathcal{C}$?

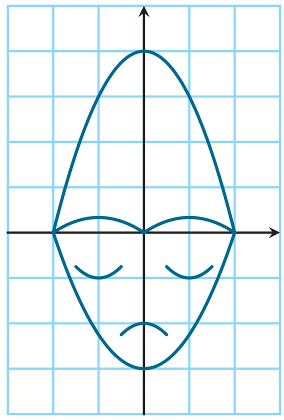
19 Calculer la somme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

20 Parmi les décompositions additives d'un entier naturel, trouver celle(s) dont le produit des termes est(sont) le plus grand.

21 **Inspiré du personnage Calimero**

Utilise le logiciel de ton choix pour reproduire le visage de Calimero.



22 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$. On note $\Delta(x) = f(x) - g(x)$. Déterminez un intervalle I tel que pour tout x de I, cet écart soit inférieur à 1 % de la valeur de $f(x)$.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

23 **Optimiser sa moyenne !**

Un examen comporte deux épreuves :

- une épreuve écrite x de coefficient 6 ;
- une épreuve orale y de coefficient 4.

On pose m la moyenne pondérée.

1) **a)** Exprimer m en fonction de x et y.
b) Johann a 15 à l'écrit et 12 à l'oral.
Calculer sa moyenne.
c) La moyenne de Thibaut est 12 avec 14 à l'écrit. Quelle est sa note d'oral ?

2) **a)** Quelle relation doivent vérifier x et y pour que la moyenne soit 10 ?
b) Tracer la droite (D) d'équation $y = -1,5x + 25$.
c) En déduire graphiquement toutes les possibilités de notes afin d'obtenir une moyenne de 10.

3) **a)** Déterminer la relation entre x et y pour obtenir une moyenne de 12.
b) À l'aide d'une droite (Δ), donner toutes les possibilités d'obtenir 12 de moyenne à cet examen.
c) Quelle remarque peut-on faire pour les droites (D) et (Δ) ?

24 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; I, J)$ et on considère les points $A(1;2)$, $B(3;3)$, $C(9;-3)$ et $D(3;-6)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$.

1) Faire une figure et construire le point S tel que : $\overrightarrow{CS} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \vec{u}$.

2) Déterminer par le calcul les coordonnées de $\overrightarrow{CS}$.
En déduire celles de S.

3) Déterminer graphiquement une équation de la droite (BC).

4) Construire la droite (Δ) d'équation $y = -4x + 6$.

5) Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

6) Déterminer une équation de la droite (AC) puis de la droite (BD).

7) Calculer les coordonnées du point d'intersection K de ces deux droites.

8) Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.
Calculer les coordonnées de I et J.
Montrer que I, J et K sont alignés.

25 ABC est un triangle tel que $BC = 8\,\text{cm}$.
Sa hauteur $[AH]$ est telle que $AH = 4\,\text{cm}$.
On inscrit dans ce triangle un rectangle $MNPQ$ tel que

- P et Q appartiennent à $[BC]$;
- M est un point de $[AB]$;
- N est un point de $[AC]$.

On veut déterminer les longueurs MN et NP pour que le périmètre de $MNPQ$ soit égal à 12 cm.
On pose $MN = y$ et $NP = x$.

1) Exprimer x et y en fonction de $\dfrac{AN}{AC}$.

2) En déduire le système $\begin{cases} x+y &= 6 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6} &= 1 \end{cases}$

3) Résoudre le système et conclure.

26 On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

PARTIE A

Soit la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$.
Il s'agit de déterminer, parmi toutes les droites parallèles à $(\mathcal{D})$, celles qui ont au moins un point d'intersection avec $\mathcal{H}$.

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la réponse à cette question.

2) Quelle est la forme des équations des droites parallèles à $(\mathcal{D})$?
On note p l'ordonnée à l'origine de ces droites.

3) Résoudre le problème posé.
indice : on pourra remarquer que pour tout $x \neq 0$:
$\dfrac{1}{x} = x + p$ équivaut à $\left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 - \dfrac{p^2}{4} - 1 = 0$.

PARTIE B

Soit la droite $(\mathcal{D}')$ d'équation $y = -x$.
Il s'agit de déterminer, parmi toutes les droites parallèles à $(\mathcal{D}')$, celles qui ont au moins un point d'intersection avec $\mathcal{H}$.

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la réponse cette question.

2) Quelle est la forme des équations des droites parallèles à $(\mathcal{D}')$?
On note p l'ordonnée à l'origine de ces droites.

3) Résoudre le problème posé.
indice : on pourra remarquer que pour tout $x \neq 0$:
$\dfrac{1}{x} = -x + p$ équivaut à $\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 - \dfrac{p^2}{4} + 1 = 0$.

27 Pour ses 50 ans d'existence, un fabriquant de boules de pétanque souhaite commercialiser une série de boules couleur "or". Il hésite entre deux étuis contenant trois boules de diamètre 7,5 cm : un cylindrique ou un parallélépipédique.

1) Étude de l'étui cylindrique.

a) Quel est le rapport entre le volume occupé par les boules et le volume intérieur du cylindre ?
On considère que le diamètre intérieur du cylindre est identique à celui d'une boule.

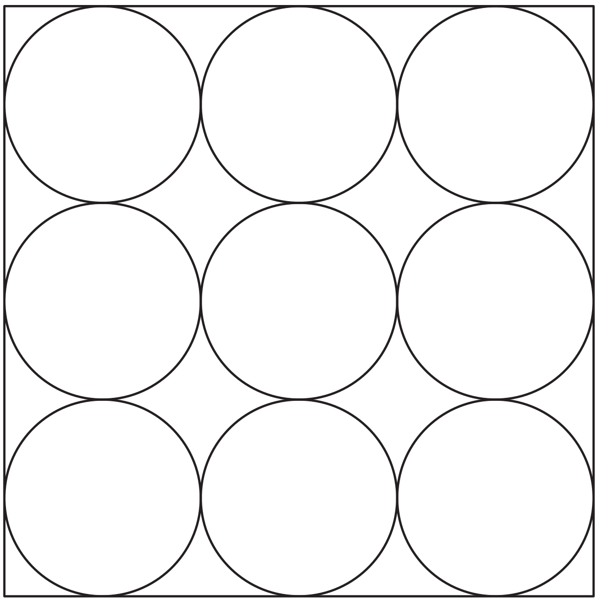
b) Comment évolue ce rapport si le nombre de boules augmente ? Diminue ?

c) Quelle surface de matière est nécessaire pour confectionner un étui ?

2) Reprendre les questions précédentes avec un étui parallélépipédique.

3) Quelle est la solution la plus avantageuse, c'est à dire celle qui utilise le moins de matière ?

4) La solution de ce problème n'est pas aussi simple.
En effet, la découpe de rectangles dans une plaque métallique correctement choisie n'entraîne pas de perte de matière, alors que dans le cas de la boîte cylindrique, le couvercle et la base sont des disques.



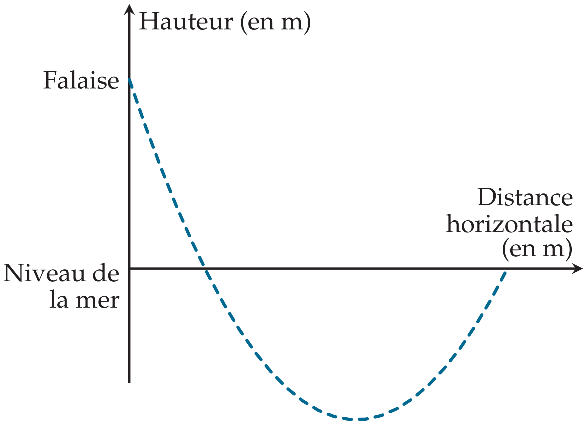
a) Si la découpe s'effectue selon la figure ci-dessus, quelle proportion de matière est perdue par couvercle ?

b) Quel est alors le rapport entre les quantités de matière nécessaire dans les deux cas ?

28 **Le Fou de Bassan**

C'est un oiseau qui se nourrit de poissons en plongeant dans l'eau depuis les falaises de l'île de Bass.

Soit $h(x)$ la hauteur de l'oiseau au dessus du niveau de l'eau en fonction de la distance x, à l'horizontale, le séparant de la rive. L'oiseau décrit une parabole représentative de la fonction définie par $h(x) = x^2 - 6x + 5$ pour x appartenant à $[0;6]$.



Partie A : lecture graphique

1) À quelle hauteur l'oiseau commence-t-il son plongeon ? Justifier.

2) Dresser un tableau de valeur sur le domaine de définition de h avec un pas de $0,5$.

3) Tracer la courbe représentative de h.

4) Indiquer graphiquement :

a) le sens de variation de h ;

b) la distance de la rive

i) où la hauteur de l'oiseau est minimale ;

ii) où l'oiseau rentre et sort de l'eau.

Partie B : étude d'une fonction

1) Montrer que $h(x) = (x-3)^2 - 4$.

2) Étudier les variations de h sur $]-\infty;3]$ et sur $]3;+\infty]$.

3) Donner un encadrement de $h(x)$ si :

a) $1,5 \leqslant x \leqslant 2$; **b)** $3 \leqslant x \leqslant 4$.

4) Quel est l'extremum de h sur $\mathbb{R}$?

5) En déduire le tableau de variations complet de la fonction h sur $[0;6]$.

6) Écrire l'équation qui détermine à quelles distances du rivage l'oiseau est entré puis sorti de l'eau.

7) Résoudre cette équation.

8) Comment retrouver ce résultat graphiquement ?

9) Trouver par le calcul les solutions de $h(x) < 0$.

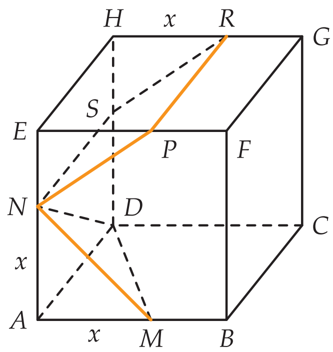
29 $ABCDEFGH$ est un cube de côté 10 cm.

- $M \in [AB]$ ■ $N \in [AE]$ ■ $R \in [HG]$

tel que $AM = AN = HR = x$ cm $(0 \leqslant x \leqslant 10)$.

- $P \in [EF]$ ■ $S \in [DH]$

tels que $(PR)//(NS)//(HE)$.



1) Quelle est la position relative

a) des plans (PRS) et (MND) ? (FRG) et (BMD) ?

b) des droites (FS) et (BD) ? (MD) et (GF) ?

2) On pose $x = 3$ cm.

a) Dessiner en vraie grandeur le triangle DMN. Préciser sa nature.

b) Calculer le volume V_1 du solide $AMND$.

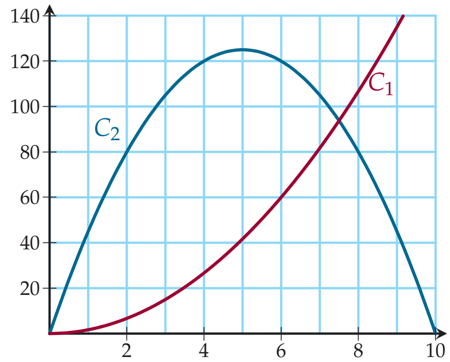
c) Donner la nature du solide $ENPHSR$. Calculer son volume V_2.

3) x est un réel de l'intervalle $[0;10]$.

a) Exprimer le volume $V_1(x)$ du tétraèdre $AMND$ en fonction de x.

b) Montrer que le volume du solide $ENPHSR$ en fonction de x peut s'écrire : $V_2(x) = 5x(10-x)$.

4) Sur le graphique, C_1 et C_2 sont les représentations graphiques de V_1 et V_2.



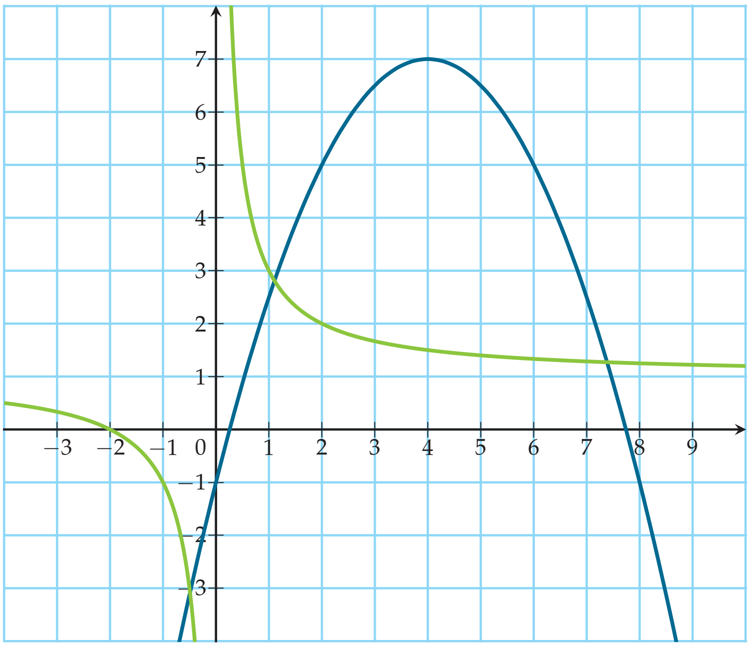
a) Déterminer le volume maximum de $ENPHSR$.

b) Résoudre graphiquement $\dfrac{5x^2}{3} = 5x(10-x)$.

Interpréter le résultat.

QCM - BILAN

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormé, deux courbes représentatives respectivement d'une fonction f pour la courbe en bleu et d'une fonction g pour la courbe en vert.



1 La courbe bleue semble être une :

ⓐ parabole ⓑ hyperbole ⓒ ni l'une, ni l'autre

2 La courbe verte semble être une :

ⓐ parabole ⓑ hyperbole ⓒ ni l'une, ni l'autre

3 La fonction f représentée par la courbe bleue semble être :

ⓐ la fonction carré
ⓑ la fonction inverse
ⓒ une fonction polynôme du 2e degré
ⓓ une fonction homographique

4 La fonction g représentée par la courbe verte semble être

ⓐ la fonction carré
ⓑ la fonction inverse
ⓒ une fonction polynôme du 2e degré
ⓓ une fonction homographique

5 L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 5$ est :

ⓐ S=$\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ⓑ S=$\{2; 6\}$ ⓒ S=$]-\infty; 0[\cup]0; 0,5]$ ⓓ S=$[2; 6]$

6 L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \leq 3$ est :

ⓐ S=$\{1\}$ ⓑ S=$\{1,17; 6,83\}$ ⓒ S=$]-\infty; 0[\cup[1; +\infty[$ ⓓ S=$]0; 1]$

7 La parabole ci-dessus représente la fonction définie par l'expression :

ⓐ $-(x-7)^2 + 4$ ⓑ $0,5(x-4)^2 + 7$ ⓒ $-(x-4)^2 - 1$ ⓓ $-0,5(x-4)^2 + 7$

8 La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ coupe l'hyperbole ci-dessus en deux points dont les abscisses sont :

ⓐ -2 et 2 ⓑ 0 et 2 ⓒ -1 et 3 ⓓ -1 et 1

Dans les exercices suivants la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x^2 - 9x + 7$.

9 La fonction polynôme h admet pour forme canonique :

ⓐ $3(x-1,5)^2+7$ ⓑ $(x-1,5)^2+7$ ⓒ $(x-1,5)^2+0,25$ ⓓ $3(x-1,5)^2+0,25$

10 La fonction h est :

ⓐ strictement croissante sur $[1,5;+\infty[$

ⓑ strictement décroissante sur $[1,5;+\infty[$

ⓒ strictement croissante sur $]-\infty;1,5]$

ⓓ strictement décroissante sur $]-\infty;1,5]$

11 La parabole qui représente la fonction polynôme h a pour sommet :

ⓐ $S\left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$ ⓑ $S\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$ ⓒ $S\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$ ⓓ $S\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{2}\right)$

12 La parabole qui représente la fonction polynôme h admet pour axe de symétrie :

ⓐ l'axe des ordonnées

ⓑ l'axe des abscisses

ⓒ la droite d'équation $x = 1,5$

ⓓ la droite d'équation $y = 1,5$

13 La droite d'équation $y = 0,25$ coupe la parabole représentant h en :

ⓐ un point ⓑ deux points ⓒ aucun point

14 L'équation $h(x) = 0,5$:

ⓐ a une solution ⓑ a deux solutions ⓒ a plus de 2 solutions ⓓ n'a aucune solution

15 L'inéquation $h(x) < 0$:

ⓐ a une solution ⓑ a deux solutions ⓒ a plus de 2 solutions ⓓ n'a aucune solution

16 L'ensemble $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ est l'ensemble des solutions de :

ⓐ $h(x) = 0,25$ ⓑ $h(x) > 0,25$ ⓒ $h(x) \leq 0,25$ ⓓ autre (in)équation

17 L'ensemble $S = [0,5;2,5]$ est l'ensemble des solutions de :

ⓐ $h(x) = 3,25$ ⓑ $h(x) \geq 3,25$ ⓒ $h(x) \leq 3,25$ ⓓ autre (in)équation

18 $\sin(-\frac{29\pi}{3})$ vaut :

ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⓑ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⓒ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⓓ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

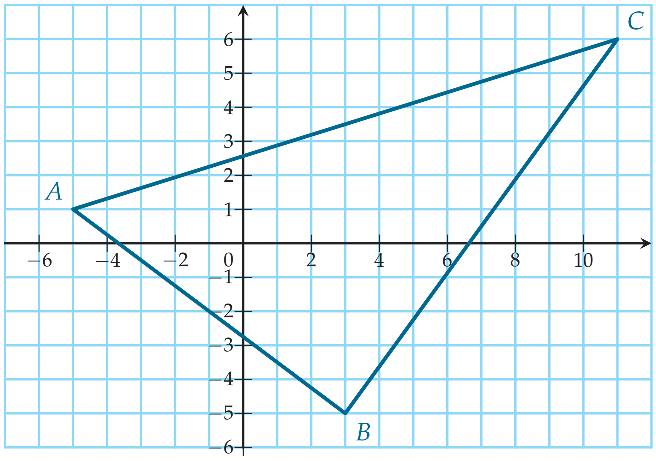
19 L'ensemble S des réels α de l'intervalle $[0;2\pi]$ tels que $\sin(\alpha) < 0,5$ est :

ⓐ $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ ⓑ $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ ⓒ $\left[0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$ ⓓ autre réponse

20 L'ensemble S des réels β de l'intervalle $[0;4\pi]$ tels que $\cos(\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ est :

ⓐ $\left\{\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$ ⓑ $\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$ ⓒ $\left\{\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{9\pi}{4};\frac{15\pi}{4}\right\}$ ⓓ $\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{11\pi}{4};\frac{13\pi}{4}\right\}$

Les exercices suivants utilisent la figure ci-dessous :



21 Le triangle ABC :

(a) est rectangle en B (b) n'est pas rectangle (c) est rectangle en A (d) on ne peut pas savoir

22 L'affirmation "*la droite* (AC) *passe par le point de coordonnées* $(-2;2)$" est :

(a) fausse (b) vraie (c) on ne peut pas savoir

23 La droite (AB) a pour équation :

(a) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{8}{3}$ (b) $y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$ (c) $y = \frac{3}{4}x - \frac{8}{3}$ (d) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$

24 Le milieu I du segment $[BC]$ a pour coordonnées :

(a) $(0,5;7)$ (b) $(6,64;0)$ (c) $(6,8;0,1)$ (d) $(7;0,5)$

25 On appelle D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$ sont :

(a) $(-8;-11)$ (b) $(8;11)$ (c) $(8;-11)$ (d) on ne peut pas savoir

26 Le point D défini ci-dessus a pour coordonnées :

(a) $(3;12)$ (b) $(3;12,5)$ (c) $(2,5;12,5)$ (d) $(2,5;12)$

27 La droite (CD) a pour équation :

(a) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{57}{4}$ (b) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{57}{4}$ (c) $y = \frac{3}{4}x + \frac{57}{4}$ (d) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{59}{4}$

28 La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le milieu J du segment $[AB]$ a pour équation :

(a) $y = -1$ (b) $x = -2$ (c) $y = -2$ (d) $x = -1$

29 Le point G de coordonnées $(115;38,5)$ est un point de la droite :

(a) (AC) (b) (AB) (c) (BC) (d) aucune de ces 3 droites

Au lycée Paul Quetelet de StatVille, tous les élèves de toutes les classes de seconde ont participé à un devoir commun de mathématiques. Aucun absent pour cette composition tant attendue ! Les enseignants ont décidé d'arrondir la note à l'entier supérieur.

Les résultats sont présentés dans le tableau ci dessous :

note	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
effectif	3	12	14	13	16	12	10	6	7	3	2	2

30 Pour compléter la phrase :

"*il y a au moins la moitié des élèves de seconde qui ont une note inférieure ou égale à .....*", il faut calculer :

(a) la moyenne (b) le mode (c) la médiane (d) le premier quartile

31 La note moyenne des élèves de seconde à ce devoir commun de mathématiques est :

(a) 9,5 (b) 11,3 (c) 10,9 (d) 11,6

32 Paul a eu 14. Il affirme qu'il fait partie du quart des élèves ayant eu les meilleures notes. A-t-il raison ?

(a) oui (b) non (c) il ne peut pas le savoir

33 Un élève a recompté ses points et signale qu'il lui en manque 1. Sa note passe alors de 7 à 8.

Les indicateurs dont on peut affirmer, sans calculer, qu'ils ne changent pas sont :

(a) la moyenne (b) le premier quartile (c) la médiane (d) le troisième quartile

34 On demande, au hasard, à un élève de seconde s'il a eu "la moyenne" (soit 10 ou plus) au devoir commun. La probabilité qu'il réponde oui est de :

(a) 0,71 (b) 0,58 (c) 0,42 (d) aucune de ces valeurs

35 On interroge deux élèves de seconde en leur demandant s'ils ont eu "la moyenne" (toujours 10 ou plus). Cette expérience aléatoire peut-être modélisée avec un modèle où il y a :

(a) 4 issues équiprobables (b) 4 issues non équiprobables (c) 9900 issues équiprobables

36 La proportion d'élèves ayant obtenu, sur l'ensemble des secondes, entre 8 et 12 est de 67%. Pourrait-on prévoir cela en calculant la proportion d'élèves de la classe d'Albertine qui ont eu entre 8 et 12 ?

(a) oui, sûrement (c) oui, en donnant un intervalle

(b) non, sûrement pas (d) oui, si l'effectif de la classe est assez important

37 Sur l'ensemble des élèves de seconde, la proportion des élèves ayant obtenu plus de 13 est de 0,2. La classe de seconde de Quentin compte 36 élèves. Quentin peut affirmer qu'il y a 95 chances sur 100 pour que la proportion d'élèves de sa classe ayant obtenu plus de 13 soit dans l'intervalle :

(a) $[0,03;0,37]$ (b) $[0,05;0,35]$ (c) $[0,17;0,23]$

38 L'interprétation ambigüe d'une question jette un doute sur l'application du barème. Les copies ayant été rendues, les enseignants décident d'augmenter toutes les notes d'un demi-point. La médiane :

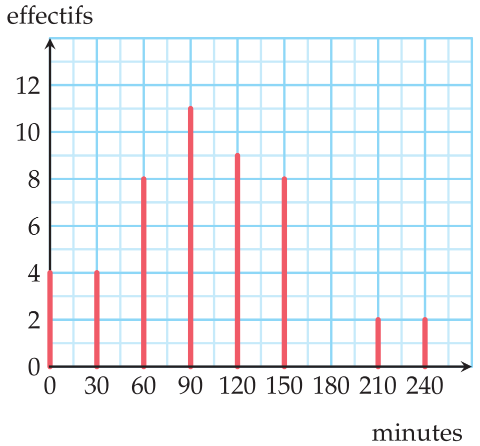
(a) ne change pas (b) augmente d'un demi-point (c) on ne peut pas savoir

SUDOMATH

Ce sudoku est à remplir avec les nombres entiers de 1 à 9.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	3				2				
B									
C			2	3				1	5
D					3				
E									
F			9					5	
G	7			9	4				6
H								3	
I					6	5	4		

1) On a demandé à 52 jeunes gens de 15 à 19 ans d'estimer le temps qu'ils passaient en moyenne devant la télévision chaque jour exprimé en nombre de demi-heures. Les réponses sont données dans le graphique.



a) Calculer la médiane de cette série statistique. Placer son chiffre des dizaines en **Ah**.

b) Placer le chiffre des dizaines du premier quartile en **Dh** et celui du troisième quartile en **Db**.

c) Combien de minutes passent ces jeunes gens en moyenne devant la télévision ? Placer le chiffre des unités en **Af**.

d) Quelle est la fréquence des jeunes gens qui ne regardent pas du tout la télévision ? Placer l'unité du pourcentage en **Di**.

e) Combien de ces jeunes gens passent plus de six heures par semaine devant la télévision ? Placer le chiffre des unités en **Fd**.

f) Placer le chiffre des dizaines du maximum de cette série en **Dc**.

2) Un dé est truqué de manière à ce que si, pour i allant de 1 à 6, on note p_i la probabilité d'obtenir la face numérotée i, on ait :

- $p_2 = 0,21$;
- $p_3 = 0,12$;
- $p_4 = 0,15$;
- $p_5 = 0,13$;
- $p_6 = 0,31$.

On note A l'événement "obtenir un nombre pair" et B l'événement "obtenir un multiple de 3".

a) Déterminer la probabilité d'obtenir un 1. Placer le chiffre des centièmes de cette probabilité en **Bc**.

b) Placer le chiffre des centièmes de $p(A)$ en **Be**.

c) Placer le chiffre des centièmes de $p(B)$ en **Eb**.

d) Placer le chiffre des centièmes de $p(\overline{A})$ en **Ic**.

e) Placer le chiffre des centièmes de $p(A \cap B)$ en **Ac**.

f) Placer le chiffre des centièmes de $p(A \cup B)$ en **Ce**.

3) Une assemblée de 214 personnes est composé de 182 hommes dont 121 ont un ou plusieurs enfants. Il y a 7 femmes qui n'ont pas d'enfant.

a) On choisit au hasard une personne de l'assemblée.

i) Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? Placer son chiffre des dixièmes en **Id**.

ii) Quelle est la probabilité que ce soit une femme qui a des enfants ? Placer son chiffre des dixièmes en **Ib**.

iii) Quelle est la probabilité que ce soit une personne qui n'a pas d'enfant ? Placer son chiffre des dixièmes en **Fg**.

b) On choisit au hasard une femme de l'assemblée. Quelle est la probabilité qu'elle ait des enfants ? Placer son chiffre des dixièmes en **Hd**.

c) On choisit au hasard une personne qui a des enfants. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? Placer son chiffre des dixièmes en **Gh**.

Ce sudoku est à remplir avec les nombres entiers relatifs de -2 à 6.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A									
B									
C									
D		5							
E		4	-2						
F									
G									
H									
I									

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les points $A(3;1)$, $B(-1;3)$, $C(2;4)$, $D(3;-2)$ et $E(6;5)$.

a) Soit F le milieu du segment $[AB]$. Placer l'abscisse du point F en **Ae** et son ordonnée en **Ed**.

b) Soit G le symétrique de A par rapport à I. Placer son abscisse en **Ab** et son ordonnée en **Eh**.

c) Soit H le point tel que $ABCH$ soit un parallélogramme. Placer son abscisse en **Dd** et son ordonnée en **Ai**.

d) En **Cc**, si le parallélogramme $ABCH$

- est un parallélogramme quelconque, placer 1 ;
- est un rectangle mais pas un carré, placer 2 ;
- est un losange mais pas un carré, placer 3 ;
- est un carré, placer 4.

e) En **Bg**, placer l'abscisse du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et en **Gi** son ordonnée.

f) Soit le point K tel que $\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Placer l'abscisse du point K en **Fd** et son ordonnée en **Eg**.

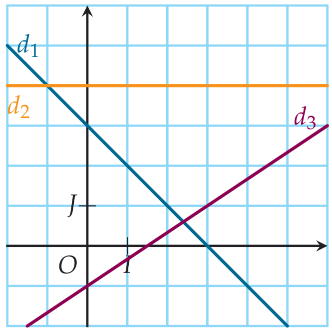
g) Placer la distance AE en **Af**.

2) On considère, dans un repère $(O; I; J)$, les points $A(1;4)$, $B(5;4)$ et $C(5;-4)$.

a) Placer le coefficient directeur de la droite (AB) en **Ad** et son ordonnée à l'origine en **Gg**.

b) Placer le coefficient directeur de la droite (AC) en **Ba** et son ordonnée à l'origine en **Cg**.

3) On considère la figure suivante.



a) Place le coefficient directeur de la droite d_1 en **De** et son ordonnée à l'origine en **Ch**.

b) Place le coefficient directeur de la droite d_2 en **Hf** et son ordonnée à l'origine en **Ff**.

c) Le coefficient directeur de d_3 peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible. Placer son numérateur (éventuellement négatif) en **Dh** et son dénominateur en **If**.

d) Placer l'ordonnée à l'origine de d_3 en **Hd**.

e) On considère le point A de d_1 d'abscisse $\dfrac{7}{3}$.

L'ordonnée de A peut se mettre sous la forme d'une fraction irréductible. Placer son numérateur (éventuellement négatif) en **Fa** et son dénominateur en **Be**.

f) On considère le point B de d_3 d'ordonnée $-\dfrac{19}{15}$.

L'abscisse de B peut se mettre sous la forme d'une fraction irréductible. Placer son numérateur (éventuellement négatif) en **Df** et son dénominateur en **Hh**.

4) On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ dont les dimensions en dm sont les suivantes :

$AB = 3$ $AD = 2$ $AE = 1$.

a) Quelle est, en dm, la longueur AC ?

Placer son chiffre des dixièmes en **Ea**.

b) Quelle est, en dm, la longueur AG ?

Placer son chiffre des centièmes en **Di**.

c) Placer en **Ic** le volume en dm^3 de la pyramide $ABCDF$.

5) a) Placer en **Fi** la valeur de :

$$4\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 - 8\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

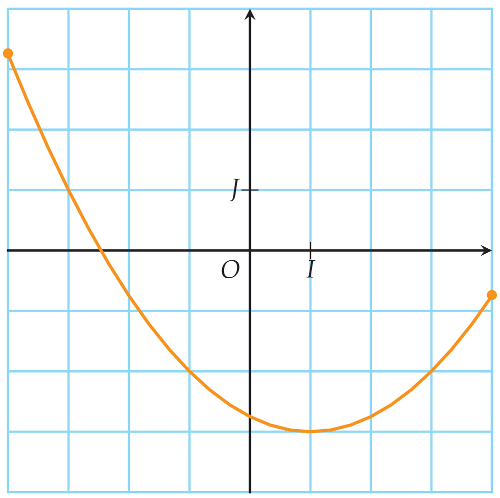
b) Placer en **Gf** la valeur de :

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) + 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right).$$

Ce sudoku est à remplir avec les nombres entiers relatifs de -4 à 4.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A									
B							-2		
C		-3						2	4
D							0		
E		0							
F									
G									
H	-4				-3				
I									

1) On considère la représentation graphique de la fonction f donnée ci-dessous.



a) La fonction f est définie sur l'intervalle $[a; b]$.
Placer a en **Id** et b en **Ea**.

b) Placer le minimum de la fonction f en **Gg** et la valeur en laquelle il est atteint en **Ai**.

c) Soit l'équation $f(x) = -2$.
Placer le nombre de solutions de en **Fd**, la plus petite de ces solutions en **Dd** et la plus grande en **Gi**.

d) La fonction f est croissante sur un intervalle $[c; d]$.
Placer c en **Hc** et d en **Hf**.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3x - 1$

a) Écrire l'image par g de $\sqrt{2}$ sous la forme $a + b\sqrt{2}$.
Placer a en **Eh** et b en **Dh**.

b) Calculer l'image par g de $-\dfrac{1}{2}$ et l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
Placer son numérateur (éventuellement négatif) en **Dc** et son dénominateur en **Ab**.

c) Placer le nombre d'antécédents par g de -1 en **Aa**.
Placer le plus petit antécédent en **Ae** et le plus grand en **Ed**.

3) Montrer que l'expression $(2x - 4)(x + 1)$ peut se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c$.
Placer a en **Be**, b en **Cd** et c en **Bc**.

4) Montrer que l'expression $9x^2 - 12x + 4$ peut se mettre sous la forme $(ax + b)^2$
Placer a en **Fh** et b en **Ib**.

5) Mettre l'expression $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{1}{2x-4}$ sous la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $a > 0$.
Placer a en **Di**, b en **Eg**, c en **Gb** et d en **Ce**.

6) On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x-4}{4x+3}$. Pour quelle valeur de x la fonction f n'est elle pas définie ?
L'écrire sous la forme d'une fraction simplifiée.
Placer son numérateur (éventuellement négatif) en **Ef** et son dénominateur en **Bd**.

7) On considère l'équation $\dfrac{3}{x+2} = \dfrac{5}{2x+3}$.
Placer sa solution en **Gd**.

8) On considère l'équation $2(x-1)^2 - 8 = 0$.
Placer sa plus petite solution en **Fa** et sa plus grande en **Af**.

9) On considère l'inéquation $(x-3)(-2x-2) > 0$ sur l'intervalle $[-4; 4]$. L'ensemble des solutions peut se mettre sous la forme d'intervalle de type $]a; b[$.
Placer a en **Hi** et b en **Ie**.

FONCTIONS

1

Généralités sur les fonctions

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Évaluer la valeur d'une expression littérale
- Résoudre des équations
- Placer des points dans un repère
- Lire les coordonnées d'un point dans un repère

Auto-évaluation

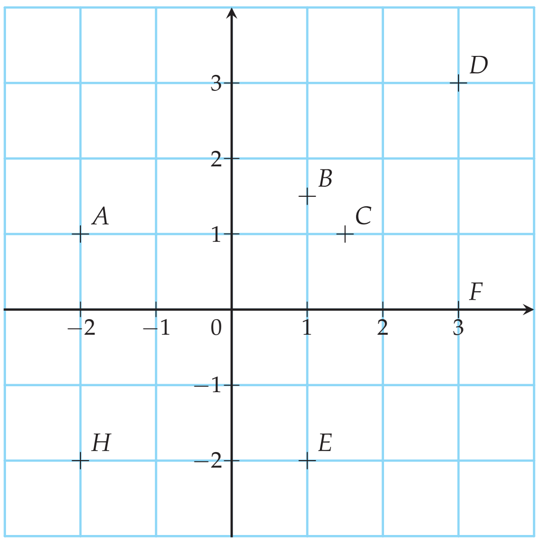
Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Soit l'expression $2x^2 + 5x - 1$.
Quelle est sa valeur si :
1) $x = 2$?
2) $x = -1$?

2 Résoudre les équations suivantes.
1) $2x - 4 = 7$.
2) $5x + 8 = 9x - 15$.

3 Quelle est la valeur de $\dfrac{2x-5}{x-3}$ si $x = 0$?

4 Sur le graphique ci-contre :
1) Quel est le point de coordonnées $(-2; 1)$?
2) Quelles sont les coordonnées du point F ?
3) Quel(s) est(sont) le(s) point(s) d'abscisse 1 ?
4) Quel(s) est(sont) le(s) point(s) d'ordonnée -2 ?



Voir solutions p. 259

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Où est l'eau ?

Voici les hauteurs d'eau, en mètres, relevées par le marégraphe de Saint-Malo le 30 août 2012.

Heure	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Hauteur (m)	2,452	3,651	5,943	8,481	10,486	11,271	10,82	9,496	7,655

Heure	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Hauteur (m)	5,721	3,994	2,744	2,233	2,997	5	7,775	10,264	11,707

Heure	18	19	20	21	22	23	24		
Hauteur (m)	11,687	10,492	8,575	6,388	4,339	2,783	1,815		

Les observations du marégraphe de Saint-Malo sont la propriété du SHOM, de la CCI pays de Saint-Malo, de la DDTM Ille-et-Vilaine et sont mises à disposition sur le site des Réseaux de référence des observations marégraphiques (`refmar.shom.fr`)

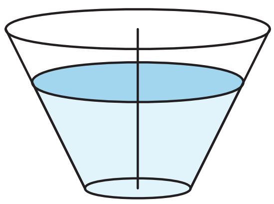
1) À quelle heure la marée est-elle haute ? Basse ?

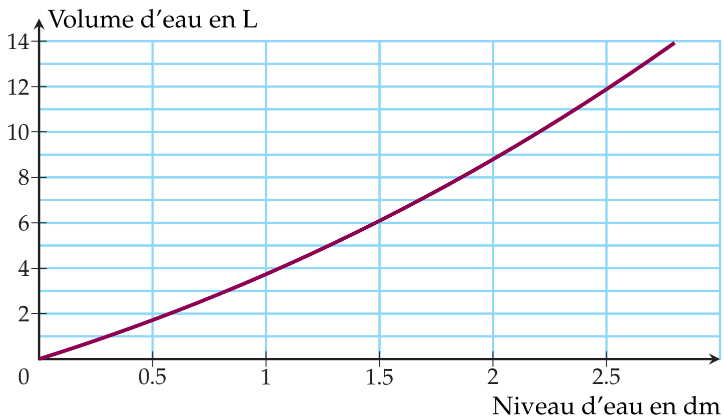
2) Quand la mer a-t-elle dépassé une hauteur de 10 m ?

3) Quand la mer a-t-elle une hauteur inférieure à 4 m ?

ACTIVITÉ 2 Inspirée par *La Fille du puisatier*, Marcel Pagnol

Pascal Amoretti, puisatier, possède plusieurs seaux pour transporter de l'eau.
Il voudrait connaître le volume d'eau transporté en mesurant juste la hauteur d'eau grâce à une jauge, c'est-à-dire une réglette graduée.
Jacques Mazel, son beau-fils, lui construit le schéma et la courbe ci-dessous.





À l'aide du graphique, compléter les tableaux de correspondance suivants.

Hauteur en dm	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Volume d'eau en L						

Volume d'eau en L	1	2	3	4	5	10
Hauteur en dm						

Les graduations obtenues n'étant pas assez fines, Pascal demande à son gendre de préciser ses calculs. La suite de l'histoire ... au TP 2.

ACTIVITÉ 3 Somme de chiffres

On considère un processus qui, à tout nombre entier naturel, associe la somme de ses chiffres.

1) Qu'obtient-on à partir du nombre 13 717 ?

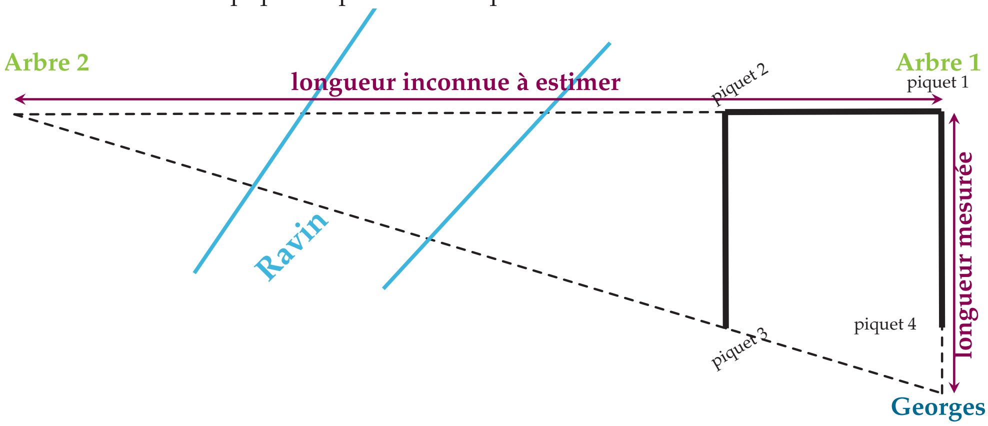
2) Proposer un nombre dont le résultat de ce processus est 22.

3) Combien de nombres de l'intervalle $]0; 10\,000]$ permettent d'obtenir 3 ? Expliquer.

4) Est-ce que tout entier naturel peut être le résultat de ce processus ?

ACTIVITÉ 4 Sur un fil

Georges est un funambule. Il se promène dans la montagne à la recherche de deux arbres séparés par un ravin pour tendre un câble. Il souhaite, à chaque site qu'il découvre, estimer la longueur du câble à utiliser. Il se construit un U en bois (un carré avec un côté en moins) d'un mètre de côté avec des piquets à planter à chaque sommet.



Voici les instructions pour mesurer la distance entre les deux arbres :

- planter le piquet 1 à côté de l'arbre 1 ;
- aligner le piquet 1, le piquet 2 et les deux arbres puis fixer les piquets 3 et 4 ;
- se placer de manière à être aligné avec l'arbre 2 et le piquet 3 d'une part ;
  et avec l'arbre 1 et le piquet 4 d'autre part.
- mesurer sa distance à l'arbre 1 ;
- rechercher, dans le tableau, la distance correspondante entre les deux arbres.

1) Georges est un étourdi. Il a perdu le tableau de correspondance.

a) Il a effectué les 4 premières étapes et a mesuré une distance de 1,2 m entre lui et l'arbre 1. Calculer la distance entre les arbres 1 et 2.

b) Dresser un tableau de correspondance variant entre 1,1 et 2 avec un pas de 0,1 entre :
- les distances x mesurées entre Georges et l'arbre 1 ;
- la distance y entre les deux arbres pour x.

2) Georges pense alors qu'une application pour son smartphone serait une très bonne idée. Proposer un algorithme qui calculerait la distance entre les deux arbres séparés par le ravin à partir de la distance entre l'arbre 1 et Georges.

Cours - Méthodes

1. Définitions

DÉFINITION : Fonction

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de nombres réels. Définir une **fonction** f sur $\mathcal{D}$ revient à associer, à chaque réel x de $\mathcal{D}$, un réel *et un seul*, appelé **image** de x.

VOCABULAIRE : $\mathcal{D}$ est l'**ensemble de définition de** f. $\mathcal{D}$ peut être l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, ou être constitué d'une ou plusieurs parties de $\mathbb{R}$.

NOTATIONS :

- Soit $a \in \mathcal{D}$. L'**image** du nombre a par la fonction f est **unique** et se note $f(a)$.
  $f(a)$ se lit « f de a ». La notation suivante se rencontre également $f : a \mapsto f(a)$.
- Si b est l'image de a, on a l'égalité $f(a) = b$ et a est un **antécédent** de b par la fonction f.

DÉFINITION : Fonctions de référence

Une **fonction de référence** est une fonction simple qui permet l'étude d'une famille plus large de fonctions.

- La **fonction carrée** est la fonction qui à x associe x^2.
  Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
- La **fonction inverse** est la fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$.
  Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- Une **fonction affine** est une fonction qui à x associe $mx + p$ (avec m et p réels).
  Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

NOTATIONS :

- Quand un intervalle contient des nombres aussi grands (aussi petits) que l'on veut, le symbole $+\infty$ $(-\infty)$ remplace la borne.
- $\mathbb{R}^+$ note l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. C'est l'ensemble $[0; +\infty[$.
- $\mathbb{R}^-$ note l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls. C'est l'ensemble $]-\infty; 0]$.
- $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ note l'ensemble des nombres non nuls. C'est l'ensemble $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

2. Différentes représentations d'une fonction

DÉFINITION : Expression d'une fonction

Soit f une fonction, $\mathcal{D}$ son ensemble de définition et $x \in \mathcal{D}$. L'**expression algébrique** d'une fonction donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x.

Exemple

Une fonction est déterminée par le programme de calcul suivant :

- choisir un nombre ;
- lui ôter 6 ;
- prendre le carré du résultat.

Trouver l'expression définissant cette fonction.

Correction

On note g la fonction qui à un nombre x, lui associe le résultat du programme de calcul.
Après avoir choisi un nombre x, le programme lui ôte 6.
On obtient donc $x - 6$.
Ensuite le programme élève ce nombre au carré soit : $(x - 6)^2$.
Donc la fonction liée à ce programme de calcul est définie par :
$g : x \mapsto (x - 6)^2$.

DÉFINITION : Tableau de valeurs

Soit f une fonction, $\mathcal{D}$ son ensemble de définition et x un élément de $\mathcal{D}$.
Un **tableau de valeurs** d'une fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Remarque : Un tableau de valeurs n'est pas unique.
Il dépend du choix des valeurs de x sur la première ligne (ou colonne).

MÉTHODE 1 Construire un tableau de valeurs

► Ex. 17 p. 86

Exercice d'application

Dresser un tableau de 10 valeurs de la fonction g définie par $g(x) = (2x-3)^2$ à partir de $x = -5$ avec un pas de 1.

Correction

Le pas de 1 signifie qu'il y a une différence de 1 entre chaque valeur de x de la première ligne.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	169	121	81	49	25	9	1	1	9	25

DÉFINITION : Courbe représentative d'une fonction

La **courbe représentative de la fonction** f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
Elle est souvent notée $\mathcal{C}_f$.
L'**équation de cette courbe représentative** est : $y = f(x)$.

Vocabulaire : La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une **parabole**, celle de la fonction inverse une **hyperbole**.

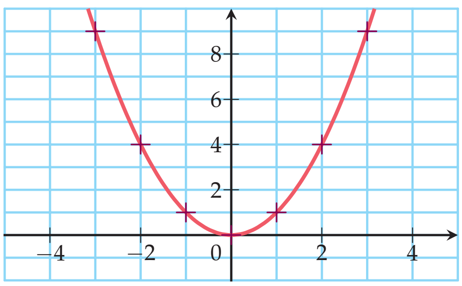
MÉTHODE 2 Tracer une courbe représentative

► Ex. 26 p. 86

Exercice d'application Tracer la parabole représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

Correction On établit un tableau de valeurs de la fonction f, on reporte les coordonnées des points dans un repère puis on les relie à la main.

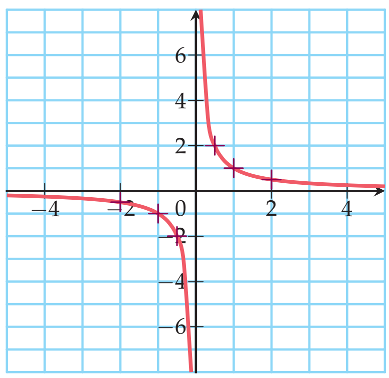
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



Exercice d'application Tracer l'hyperbole représentant la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Correction

x	-2	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	2
$f(x)$	$-0{,}5$	-1	-2	╳	2	1	0,5



Cours - Méthodes

3. Détermination d'images et d'antécédents

MÉTHODE 3 Calculer des images à partir d'une expression littérale

► Ex. 37 p. 88

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^5 + 6x^2 - 9$.
Calculer les images de 0 et de -1 par la fonction f.

Correction

0 et -1 appartiennent à $\mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f.
$f(0) = 4 \times 0^5 + 6 \times 0^2 - 9 = -9$
$f(-1) = 4 \times (-1)^5 + 6 \times (-1)^2 - 9 = -4 + 6 - 9 = -7$
Les images de 0 et -1 par f sont respectivement -9 et -7.

MÉTHODE 4 Rechercher un (ou des) antécédent(s) par le calcul

► Ex. 38 p. 88

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$.
Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 16 par la fonction f.

Correction

On note x un nombre dont l'image est 16.
x est solution de l'équation $f(x) = 16$ soit $3x - 5 = 16$.
$3x = 16 + 5 = 21$ donc $x = 21 \div 3 = 7$
$7 \in \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f.
Donc, 7 est l'unique antécédent de 16 par la fonction f.

Remarques :

- Calculer l'**image** d'un nombre, c'est **évaluer** la valeur d'une expression littérale.
- Calculer le (ou les) **antécédent(s)** d'un nombre, c'est **résoudre** une équation.

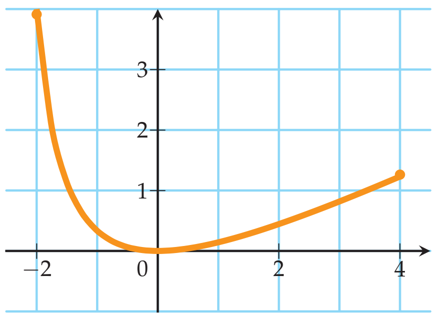
MÉTHODE 5 Lire graphiquement une image et des antécédents

► Ex. 46 p. 89

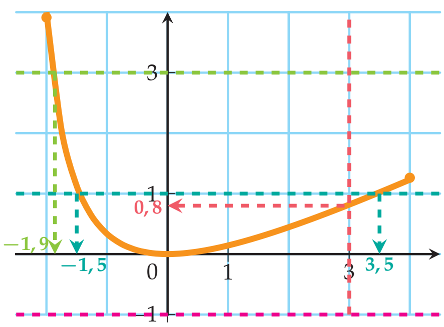
Exercice d'application

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.

1) Quelle est l'image de 3 par f ?
2) Par f, quels sont les antécédents de :
   - -1 ?
   - 1 ?
   - 3 ?



Correction



Par lecture graphique,

1) **l'image de 3** par f est environ 0,8.
2) - **-1 n'a pas d'antécédent** par f.
   - **1 a deux antécédents** par f : environ $-1,5$ et 3,5.
   - **3 a un unique antécédent** par f : environ $-1,9$.

Activités mentales

1 Calculer $f(2)$ pour la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

2 La fonction g est définie par $g(x) = -3x + 7$. Quelle est l'image de deux tiers par g ?

3 h est définie par $h(x) = (2x - 6)(2x + 1)$. Calculer $h(3)$.

4 Voici un tableau de valeurs de la fonction l. Par la fonction l, donner :

1) l'image de -5 ; **2)** un antécédent de -1.

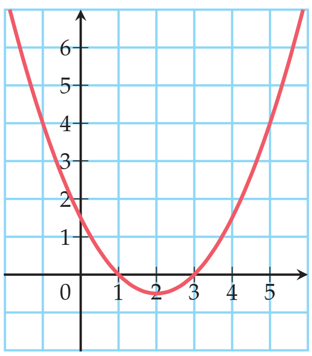
x	2	-5	10	-1
$l(x)$	-1	4	-1	-5

5 Quel est l'antécédent de 5 par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 10x$?

6 La fonction m est définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = 3x - 5$. Quel est l'antécédent de 4 ?

7 Voici la courbe représentative d'une fonction h. Déterminer les images de :

1) 3 **2)** 5 **3)** 0 **4)** -1



8 On donne $l(3) = 5$. Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de la fonction l.

9 Le point $A(-1; 2)$ appartient à la courbe représentative de la fonction k. Compléter : $k(\cdots) = \cdots$

10 Le point $A(2; 1)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction m définie par $m(x) = 3x^2 - 2x + 1$?

11 Dans un repère, quelle est l'ordonnée du point A d'abscisse -2 appartenant à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$?

Définitions

12 On considère le processus qui, à un nombre réel, fait correspondre son carré.

1) Compléter :

$\boxed{2} \longrightarrow \boxed{\text{mise au carré}} \longrightarrow \boxed{\cdots}$

$\boxed{\cdots} \longrightarrow \boxed{\text{mise au carré}} \longrightarrow \boxed{9}$

2) Pour chaque schéma ci-dessus, recopier et compléter les phrases ci-dessous :

- … est l'image de …
- … a pour image …
- … est un antécédent de …
- … a pour antécédent(s) …

13 On considère une fonction d telle que $d(3) = -2$. Traduire cette notation en complétant les phrases de l'exercice précédent.

14 On étudie le processus p qui, à tout entier compris entre 1 et 99, associe son chiffre des dizaines.

1) Donner $p(24)$.

2) Donner le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 2 par p.

3) Trouver, si possible, un réel x tel que :

- $p(x) = 3$
- $p(3) = x$

4) Peut-on exprimer $p(x)$ en fonction de x ?
Si oui, donner cette expression.

15 Si on souhaitait exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une formule ou d'une fonction, quelles seraient les variables qui interviendraient ?

1) le périmètre d'un cercle ;
2) l'aire d'un rectangle ;
3) le temps de chute d'une pièce ;
4) l'intensité d'un circuit électrique ;
5) la vitesse d'un véhicule ;
6) l'état de l'eau (liquide, gazeux, solide).

16 Pour chaque fonction, dire quelle est sa nature.

- $f : x \mapsto 2x + 9$
- $k : x \mapsto \sqrt{x}$
- $h : x \mapsto x^2$
- $l : x \mapsto \dfrac{x}{x^2}$
- $g : x \mapsto (2x - 5)^2 - (2x + 5)^2$

Tableaux de valeurs

17 ► MÉTHODE 1 p. 83

Soit une fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x - 2$ sur $[-3; 3]$. Construire un tableau de valeurs de la fonction f comportant au moins cinq valeurs de x.

18 Avec l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de valeurs de la fonction r définie sur $[-10; 10]$ par $r(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ avec un pas de 1.

19 On définit f par $f(x) = -3x + 5$ sur $\mathbb{R}$. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0		2		-4
$f(x)$		0		2	

20 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{3\sqrt{2x + 1}}$.

1) Dresser le tableau de valeurs de f pour x entre 0 et 10 avec un pas de 1. Arrondir les images à 10^{-2} près.
2) Dresser le tableau de valeurs de f pour x entre 7 et 9 avec un pas de 0,5. Arrondir les images à 10^{-1} près.

21 Déterminer a pour que le tableau ci-dessous soit un tableau de valeurs d'une fonction h définie par $h(x) = x^2 + ax + 9$ sur $\mathbb{R}$ puis compléter le tableau.

x	-1	0	1	
$h(x)$	4		16	36

22 Déterminer a et b pour que le tableau ci-dessous soit un tableau de valeurs d'une fonction h définie par $h(x) = x^2 + ax + b$ sur $\mathbb{R}$.

x	-1	0	1	2
$h(x)$	-9	-7	-3	3

23 En utilisant le tableau ci-dessous, répondre par vrai ou faux aux affirmations.

x	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{7}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{2}{11}$
$h(x)$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{6}{5}$

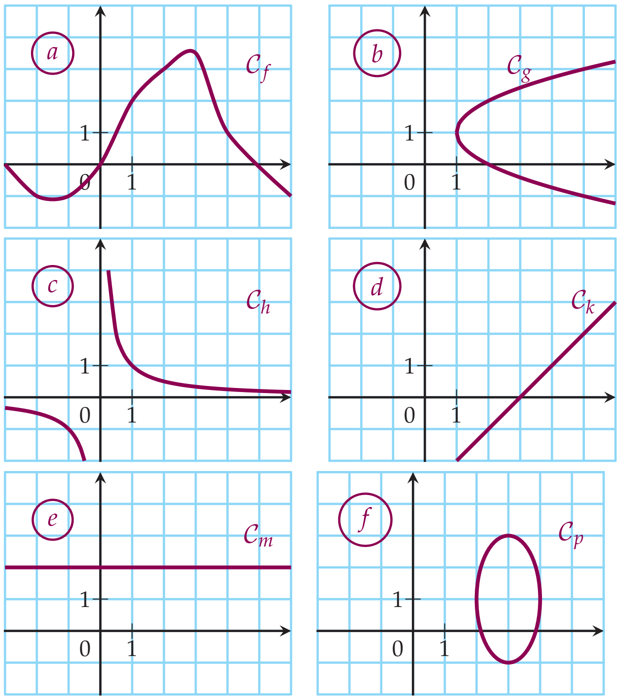
1) $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2}{11}$ ont des images opposées ;

2) $\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{6}{5}$ ont des antécédents inverses.

Représentations graphiques

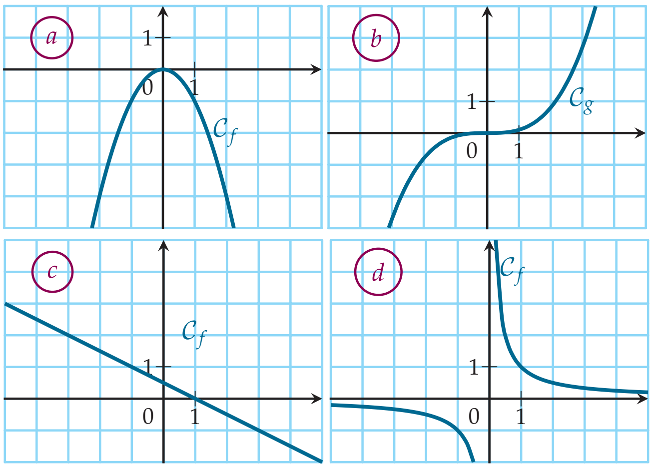
24 **Fonctions ?**

Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?



25 **Fonctions usuelles ?**

Indiquer, si possible, le nom de la courbe et le nom de la famille de fonctions représentée.



26 ► MÉTHODE 2 p. 83

Tracer la courbe représentative de f définie par $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$ pour x entre -4 et 4.

27 **Tracer une ou des courbes ?**

Soit f la fonction définie sur $]0;3]$ par $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2$.

1) Établir un tableau de valeurs avec un pas de 0,25.
2) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

28 **Un ou des tableaux de valeurs ?**

En voulant tracer une courbe, Roméo a obtenu le tableau de valeurs suivant :

x	$-1,6$	$-1,3$	$-1,1$	0,17	0,32	0,89
$f(x)$	$-0,62$	$-0,77$	$-0,91$	5,88	3,12	1,12

En traçant la même courbe, Juliette a obtenu le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$-0,33$	$-0,5$	-1	1	0,5	0,33

Tracer une courbe représentative de la fonction. Donner son nom.

29 **Avec la calculatrice**

Soit f définie sur $[-4;2]$ qui à x associe $\dfrac{2x+2}{x+5}$.

1) Éditer un tableau de valeurs de f avec la calculatrice.
2) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.
3) Vérifier le tracé sur l'écran de la calculatrice.

30 **Feuille changeante** INFO

1) Programmer une feuille de calcul d'un tableur pour obtenir un tableau de valeurs entre -5 et 5 avec un pas de 1 et la courbe représentative associée de n'importe quelle fonction f définie par $f(x) = ax^2 + b$ où l'utilisateur pourra choisir a et b.
2) Utiliser la feuille de calcul pour $a = \dfrac{3}{5}$ et $b = -\sqrt{2}$.

31 **Famille de fonctions**

1) Sur un même graphique, tracer les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies par :
   - $f(x) = x^2$
   - $g(x) = (x+1)^2$
   - $h(x) = x^2 + 1$

On appelle A, B et C les points d'abscisse 2 des courbes respectives $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.

2) Quelle est l'ordonnée de A ?
3) Comment obtenir les ordonnées de B et C ?
4) Construire une courbe représentative de la fonction h définie par $h(x) = (x+2)^2 + 3$ à partir de $\mathcal{C}_f$.

Calculs d'images et d'antécédents

32 Voici un tableau de valeurs de la fonction $\mathcal{P}$, qui, au nombre de photos à imprimer, associe le prix à payer d'après le site `www.jesuisleroidesphotos.com`.

Nombre de photos	50	100	300	500	800
Prix en €	8	14	36	60	64

1) Déterminer $\mathcal{P}(300)$. Interpréter le résultat.
2) Que peut-on dire de $\mathcal{P}(600)$?

33 Voici un tableau de valeurs de la fonction $\mathcal{V}$ qui, à la longueur du rayon d'une sphère, associe son volume.

r en cm	3	6	9
$\mathcal{V}(r)$ en cm^3	36π	288π	972π

1) Quelle est la valeur exacte de $\mathcal{V}(6)$?
2) Quel est le volume d'une sphère de rayon 3 cm ? En déduire l'image de 3 par la fonction $\mathcal{V}$.

34 Voici un tableau de valeurs de la fonction v qui, à x en cm, associe le volume d'une boîte de conserve de hauteur x, arrondi au cm^3 près.

x	2	4	8	10
$v(x)$	50	402	3 217	6 283

1) Déterminer un ou des antécédents de 3 217 par v.
2) Peut-on déterminer un antécédent de 5 000 par v ?

35 Quand le gardien de but d'une équipe de football tire dans le ballon, ce dernier suit une trajectoire dite parabolique. Voici un tableau de valeurs de la fonction h qui, au temps t écoulé en secondes depuis le tir, associe la hauteur du ballon en mètres.

t	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$h(t)$	1,75	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0

1) Déterminer un ou des antécédents de 3 par h.
2) Peut-on déterminer un antécédent de 5 par h ?

36 On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = -7x + 9$. Calculer :

1) $k(10)$ 2) $k(-4)$ 3) $k\left(\dfrac{3}{7}\right)$ 4) $k(\sqrt{5})$

S'entraîner

37 ► MÉTHODE 3 p. 84

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. Calculer les images de :

1) 2 **2)** -3 **3)** 0 **4)** $\sqrt{5}$

38 ► MÉTHODE 4 p. 84

On définit deux fonctions k et l, définies sur $\mathbb{R}$, par :

$$k(x) = 2x + 3 \text{ et } l(x) = x^2.$$

1) Déterminer le(s) antécédent(s) de 2 par la fonction k.

2) Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par la fonction l.

3) Citer un nombre qui n'a pas d'antécédent par l.

39 On considère la fonction d définie sur $\mathbb{R}^*$ par $d(x) = \dfrac{7}{x} - 4$. Par la fonction d, déterminer, si possible, le ou les antécédents de :

1) 3 **2)** 2 **3)** $\dfrac{1}{7}$ **4)** -4

40 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x-7)(3x+1)$.

Calculer le ou les nombres qui ont pour image 0.

41 On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = (x+1)^2$.

Par cette fonction, déterminer, si possible, le (ou les) antécédent(s) de :

1) 4 **2)** -1 **3)** 0 **4)** 5

42 **Une formule** ALGO

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 5$.

1) Déterminer le ou (les) antécédent(s) de -2 ; 7,3 et -4 par la fonction f.

2) L'algorithme ci-dessous détermine le(s) antécédent(s) d'un nombre par la fonction f. Le compléter.

```
Algorithme : Antécédent
Liste des variables utilisées
    a : réel
    b : réel
Entrées
    Demander b
Traitements
    Calculer ...
    Stocker la réponse dans a
Affichage
    Afficher a
Fin de l'algorithme
```

43 On considère le fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{-5}{2x^2 - 3}.$$

1) Par la fonction g, calculer les images de :

a) -1 **b)** 0 **c)** $\dfrac{5}{2}$ **d)** $2\sqrt{3}$

2) Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 2 par g.

3) 0 a-t-il un antécédent par cette fonction ? Pourquoi ?

4) Quels nombres n'ont pas d'image par g ?

44 On considère deux fonctions : f définie sur $[-8;8]$ par $f(x) = x^4 - 3x^2 - 2$ et g définie par : $g(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$.

1) Calculer :

a) $f(0)$ **b)** $g(0,3)$ **c)** $f(\sqrt{2})$ **d)** $g(-4)$

2) Calculer l'image de -5 par f.

3) Calculer l'image de -3 par g.

4) Déterminer le ou (les) éventuel(s) antécédent(s) de 1 par la fonction g.

5) Déterminer le ou (les) éventuel(s) antécédent(s) de -2 par la fonction f.

6) Que se passe-t-il si $x = -2$ pour la fonction g ?

45 **Programme de calcul** ALGO

Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre réel.

- doubler le nombre de départ ;
- ajouter 5 ;
- multiplier par 3 ;
- ajouter le nombre de départ.

1) Donner les images de :

- 0
- 2 012
- 12,7

2) Programmer un algorithme associé à ce programme de calcul et vérifier les réponses trouvées au 1.

3) Donner l'(es) antécédent(s) de 0.

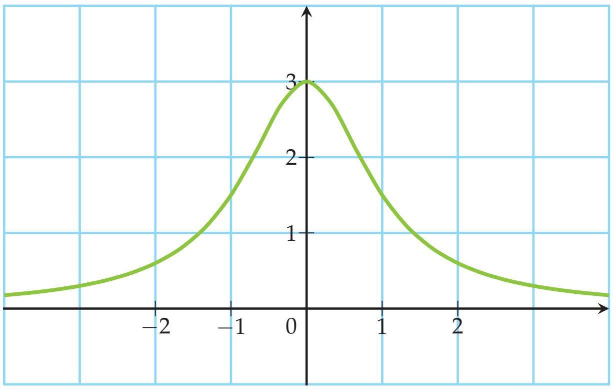
4) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 40,9 ?

5) Écrire un programme de calcul d'au moins 3 étapes qui donne 0 quand le nombre de départ est 5.

Lectures graphiques

46 ► MÉTHODE 5 p. 84

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Par lecture graphique, déterminer :

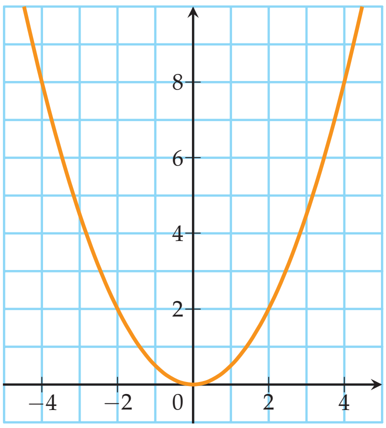
1) l'image de -1 par f ;

2) l'image de 0 par f ;

3) le (ou les) antécédent(s) de 1 par f ;

4) le (ou les) antécédent(s) de 3 par f.

47 Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) Par lecture graphique, compléter les égalités suivantes :

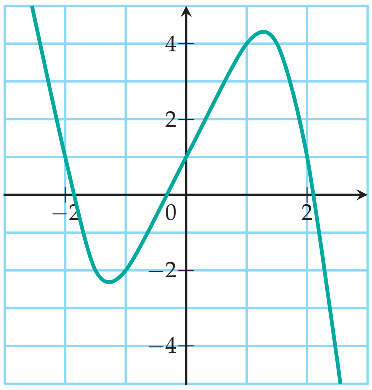
a) $f(...) = 4$ **c)** $f(...) = 0,5$

b) $f(2) = ...$ **d)** $f(0) = ...$

2) Par lecture graphique, compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-3	-1		1		
$f(x)$			2		7	5

48 Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) Par lecture graphique, déterminer :

a) l'image de -1 par f ;

b) $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$;

c) le(s) antécédent(s) de 1 par f ;

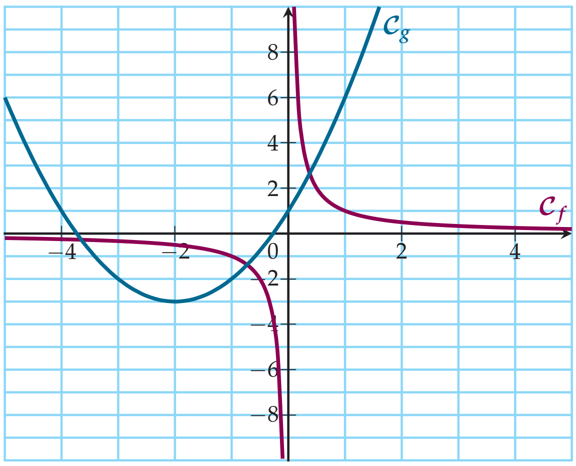
d) les éventuels nombres qui ont 0 pour image.

2) Citer, si possible, un nombre qui a :

a) aucun antécédent ; **c)** 2 antécédents ;

b) 1 antécédent ; **d)** 3 antécédents.

49 Voici les courbes représentatives d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ et d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.



1) Par lecture graphique, déterminer :

a) l'image de 1 par la fonction f puis g ;

b) le (ou les) antécédent(s) de 4 par la fonction g ;

c) le (ou les) antécédent(s) de -6 par la fonction f.

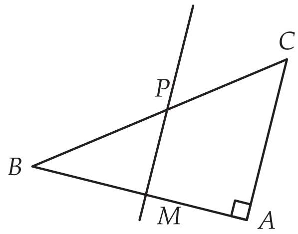
2) Quel nombre a un seul antécédent par la fonction g ?

3) Quel nombre n'a pas d'antécédent par f ?

Approfondir

50 Dans un triangle rectangle ALGO

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$ et M un point appartenant à $[AB]$. La droite perpendiculaire à (AB) passant par M coupe (BC) en P.



On étudie la longueur BP.

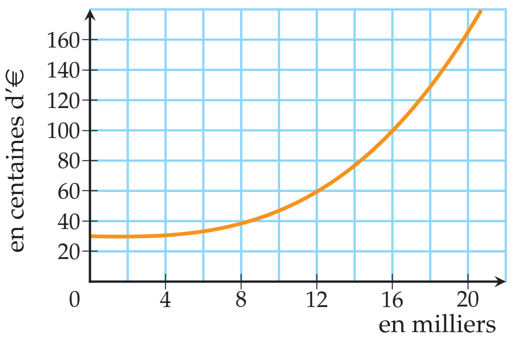
1) Que vaut BP si M est le milieu de $[AB]$?
Si M est confondu avec le point A ? Avec le point B ?

2) On note $AM = x$.
- **a)** Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
- **b)** Exprimer BP en fonction de x.

3) Écrire un algorithme permettant de calculer BP à partir de la longueur AM.

51 En économie INFO

L'entreprise Flora commercialise des vases en porcelaine. Par an, elle confectionne entre 0 et 20 000 vases. Le coût total de production f, exprimé en centaines d'euros, est fonction du nombre de vases fabriqués, en milliers. Le graphique ci-dessous présente la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.

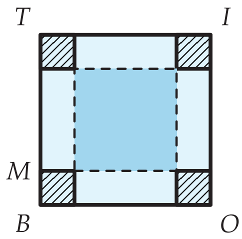


1) **a)** Quel est le coût de production de 10 000 vases ?
- **b)** Quelle quantité maximale d'objets est-il possible de produire pour un coût inférieur à 14 000 € ?

2) Le coût moyen h est donné par $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
- **a)** Estimer $h(5)$.
- **b)** Reproduire la courbe $\mathcal{C}$ puis tracer, dans le même repère, la représentation graphique du coût moyen.
- **c)** Estimer le nombre de vases qu'il faut fabriquer pour obtenir un coût moyen minimal.

52 En boîte !

On considère un carré de côté 15 cm. Dans chaque coin, on découpe un même carré pour obtenir un patron d'une boîte sans couvercle.



Partie A : un patron

1) Construire une boîte en choisissant $BM = 3$ cm.

2) Calculer son volume.

3) Peut-on réaliser une boîte sachant que $BM = 8$ cm ? Expliquer.

Partie B : une fonction

On pose $BM = x$ et on appelle $\mathcal{V}$ la fonction qui à x associe le volume de la boîte sans couvercle.

1) Déterminer une expression de la fonction $\mathcal{V}$.

2) Quel est l'ensemble de définition de $\mathcal{V}$?

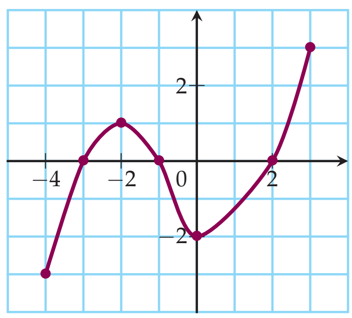
3) À l'aide de votre calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de la fonction $\mathcal{V}$.

4) Pour quelles valeurs de x le volume est-il supérieur ou égal à 100 ?

5) Le volume de cette boîte peut-il dépasser 1 dL ?
Si oui, donner les dimensions d'une boîte vérifiant cette condition. Si non, expliquer pourquoi.

53 Avec un paramètre

On considère une fonction f définie sur $[-4;3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1) Quels sont le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ?

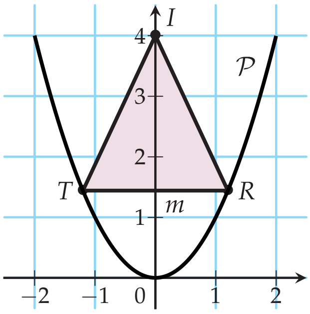
2) Combien d'antécédent(s) possède 2 ?

3) Quel est le nombre d'antécédent(s) de 1 ?

4) Donner un nombre réel m qui n'a qu'un unique antécédent par f.

5) Donner le nombre d'antécédent(s) de t par f, suivant les valeurs de t.

54 INFO On considère $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction carrée, restreinte à l'intervalle $[-2;2]$ et le point I de coordonnées $(0;4)$.



Pour tout nombre réel m de l'intervalle $[0;4]$, on place sur $\mathcal{P}$ les points T et R d'ordonnées m tels que $x_T \leq x_R$.

Le but de l'exercice est de trouver des valeurs de m pour que l'aire du triangle TRI soit égale à deux unités d'aire puis soit maximale et enfin soit minimale.

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure et émettre des conjectures sur chacun des problèmes posés.
2) Par la fonction carrée, citer le(s) antécédent(s) de 2.
3) Quelle est l'aire du triangle TRI pour $m = 2$?
4) On définit la fonction $\mathcal{A}$ qui à m associe l'aire du triangle TRI.
   a) Vérifier que, pour tout réel m de $[0;4]$:
   $\mathcal{A}(m) = (4 - m)\sqrt{m}$.
   b) Tracer la courbe représentative de $\mathcal{A}$ à la calculatrice. À l'aide de la courbe :
      i) donner une valeur approchée du (ou des) antécédent(s) de 2 par la fonction $\mathcal{A}$.
      ii) $\mathcal{A}$ admet-elle un minimum ? un maximum ? S'ils existent, combien valent-ils et pour quelle(s) valeur(s) de m sont-ils atteints ?

55 Le triangle ABC rectangle isocèle en B est tel que $AB = BC = 4\,\text{cm}$. On note M le point de $[AB]$ tel que $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 4$. On place les points P et Q respectivement sur $[BC]$ et sur $[AC]$ tels que le quadrilatère $MBPQ$ soit un rectangle.

Partie A : établir la fonction

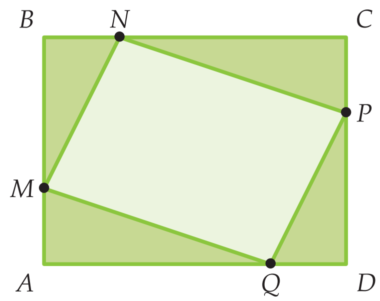
1) Exprimer MB en fonction de x.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de x le rectangle $MBPQ$ est-il un carré ?
3) Montrer que l'aire $S(x)$, en cm^2, du rectangle $MBPQ$ est égale à : $x\,(\,4\;-\;x\,)$.
4) Tracer une représentation graphique de S.

Partie B : utiliser la fonction

1) Donner les dimensions des rectangles $MBPQ$, lorsqu'ils existent, ayant pour aire 2, 4 et 5 cm^2.
2) Vérifier que $x(4 - x) - 3 = (1 - x)(x - 3)$.
3) En déduire les antécédents de 3 par la fonction S. Combien peut-on trouver de rectangles $MBPQ$ ayant une aire de 3 cm^2 ?

56 **Histoire de parallélogrammes**

On considère un rectangle $ABCD$ de dimensions données : $AB = 6\,\text{cm}$ et $BC = 8\,\text{cm}$.
Sur le côté $[AB]$, on place un point M quelconque.
On considère ensuite les points N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$ tels que : $AM = BN = CP = DQ$.



On pose $AM = x$. On appelle f la fonction qui, à x, associe la valeur de l'aire de $MNPQ$.

1) Vérifier que $MNPQ$ est un parallélogramme.
2) AM peut-elle prendre la valeur 7 ?
   Quel est l'ensemble de définition de f ?
3) Quelle peut-être la valeur maximale de $f(x)$?
   Pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?
4) Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 14x + 48$.
5) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de f.
   Ajuster la fenêtre d'affichage.
6) Graphiquement, lire les antécédents de 24 et de 36.
7) Les valeurs trouvées sont-elles exactes ? Conclure.

57 **Vrai ou Faux ? Et pourquoi ?**

1) Tout nombre de l'ensemble de définition d'une fonction f a au moins une image par f.
2) Tout nombre de l'ensemble de définition d'une fonction f est l'antécédent d'au moins un nombre par f.
3) Le processus qui, à un nombre, associe soit 0 s'il est pair, soit 1 s'il est premier est une fonction.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Reconnaître une fonction définie par
- un processus
- une courbe
- un tableau de valeurs

Reconnaître une fonction usuelle
- linéaire ou affine
- carrée
- inverse

Déterminer l'image d'un nombre par une fonction
- connue par une expression littérale
- connue par sa courbe représentative
- connue par un tableau de valeurs

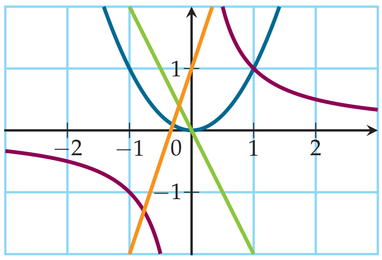
Déterminer un antécédent d'un nombre par une fonction
- connue par une expression littérale
- connue par sa courbe représentative
- connue par un tableau de valeurs

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les questions 58 à 61, on utilise les courbes représentatives de fonctions ci-contre.



58 La courbe verte représente une fonction :
(a) linéaire (b) carrée (c) autre

59 La courbe rouge représente une fonction :
(a) linéaire (b) carrée (c) inverse

60 La courbe bleue représente une fonction :
(a) carrée (b) affine et non linéaire (c) autre

61 La courbe orange représente une fonction :
(a) linéaire (b) affine (c) inverse

Pour les questions 62 et 63, la fonction f est connue par le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	-8	$-6,5$	-5	$-3,5$	-2	$-0,5$	1	2,5	4	5,5	7	8,5	10

62 L'image de 2,5 par la fonction f est :
(a) $-6,5$ (b) 0,5 (c) 8,5

63 Un antécédent de 1 par la fonction f est :
(a) 4 (b) 0 (c) aucune des réponses

64 L'image de 2 par la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ est :

ⓐ -22 ⓑ -3 ⓒ aucune des réponses

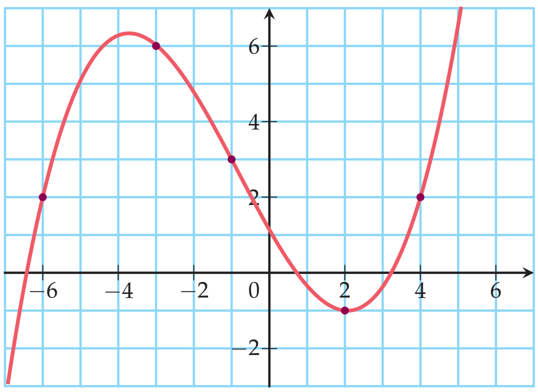
65 Un antécédent de -5 par la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 3$ est :

ⓐ 2 ⓑ $-0,5$ ⓒ 0,5 ⓓ -23 ⓔ aucune des réponses

66 On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$. L'image de 4 par g est :

ⓐ 0,25 ⓑ -2 ⓒ -4 ⓓ $-0,25$ ⓔ aucune des réponses

Pour les questions suivantes, on utilise la fonction f, définie sur $[-7;5]$, représentée graphiquement ci-contre :



67 Par cette fonction, l'image de -2 est :

ⓐ comprise entre -7 et -6 ⓑ 4,5 ⓒ comprise entre 4 et 5 ⓓ on ne peut pas savoir

68 Par cette fonction, 2 est l'image de :

ⓐ -1 ⓑ 4 ⓒ -6 ⓓ on ne peut pas savoir

69 Par cette fonction, le nombre 2 a :

ⓐ exactement deux antécédents ⓑ exactement 3 antécédents ⓒ au moins trois antécédents ⓓ aucune de ces réponses

70 $f(0)$ est environ égal à :

ⓐ 1 ⓑ 0,8 ⓒ 1,15 ⓓ 1,2 ⓔ 0,75 ⓕ aucune de ces valeurs

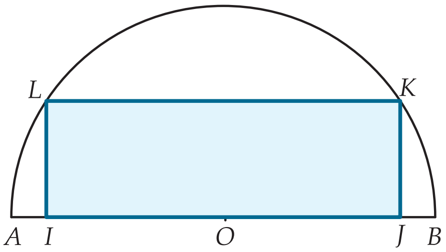
71 La (ou les) valeur(s) éventuelle(s) du réel x pour lesquelles $f(x) = -1$ sont :

ⓐ environ $-6,6$ et 2 ⓑ exactement 3 ⓒ seulement 2 ⓓ aucune de ces réponses

Travaux pratiques

TP 1 Demande à ta machine

Monsieur Sphéro, architecte, souhaite répondre à un appel d'offre pour construire une salle de spectacle. Il propose une salle sphérique et voudrait une approximation de la taille maximale possible d'un écran de cinéma dans ce type de salle. Voici le schéma qu'il fournit à Mathéo son assistant.



- $[AB]$ est un segment tel que $AB = 10\,\text{m}$;
- O est le milieu de $[AB]$, I un point mobile sur $[OA]$;
- $IJKL$ est un rectangle tel que $OJ = OI$ et que K et L soient sur le cercle de diamètre $[AB]$.

On pose $x = OI$ et on appelle $f(x)$ l'aire du rectangle $IJKL$.

1 Une première estimation

1) Expliquer pourquoi x varie dans $[0;5]$.

2) Déterminer, en fonction de x, la longueur IL.

3) En déduire l'aire du rectangle $IJKL$ en fonction de x.

4) En utilisant la table de votre calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

5) En utilisant le tableau, pour quelle valeur de x l'aire semble-t-elle être maximale ?

2 Affinage graphique

1) Faire afficher sur votre calculatrice la courbe représentative de cette fonction.
Hélas, la représentation n'est peut-être pas complète !

2) Régler les paramètres de la fenêtre graphique afin de voir toutes les variations de la fonction sur la calculatrice.
Pour cela, il faut choisir :
- `Xmin` *et* `Xmax` *en se rappelant que x varie dans $[0;5]$;*
- `Ymin` *et* `Ymax` *en utilisant les valeurs trouvées dans le tableau.*

3) Lorsque la courbe est correctement affichée par la calculatrice, utiliser le mode `Trace` pour déplacer un point en forme de croix sur la courbe.

4) Grâce au déplacement de ce point, donner une valeur approchée au dixième de l'aire maximale ainsi que la valeur de x pour laquelle cette aire semble être maximale.
Les coordonnées de ce point sont affichées au bord de l'écran.

3 Affinage numérique

Pour être plus précis, il vaut mieux utiliser la table en fixant la valeur initiale de x ainsi que son pas d'avancement.

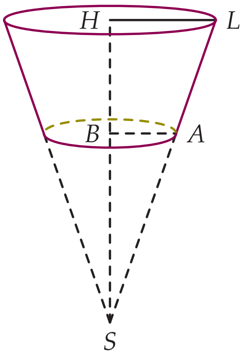
1) En utilisant la table, dresser un nouveau tableau qui doit permettre de donner une valeur approchée au centimètre près de la valeur de x pour laquelle l'aire semble être maximale.

2) Donner cette valeur ainsi que celle de l'aire correspondante.

TP 2 Histoire de seaux

Ce TP fait suite à l'activité d'approche 2 tout en étant indépendant.

1 Volume total du seau



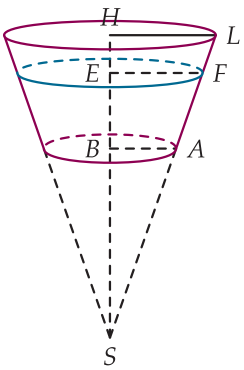
Ci-contre, on a représenté le tronc de cône qui modélise le seau ainsi qu'une coupe « verticale » du seau.
B est le centre du disque de base et H celui du disque supérieur.
On a complété la figure afin de faire apparaître le cône complet.
On rappelle que :

- $BA = 1$ dm (car le diamètre inférieur est 2 dm) ;
- $HL = 1{,}5$ dm ;
- $HB = 2{,}8$ dm.

On pose (en dm) : $r = BA = 1$; $R = HL = 1,5$ et $h = HB = 2,8$.

1) Calculer HS.
2) En déduire le volume du cône complet de sommet S, de base le cercle de centre H et de rayon R.
3) Calculer BS.
4) En déduire le volume du cône ôté (de sommet S, de base le cercle de centre B et de rayon r).
5) En déduire le volume du tronc de cône qui modélise le seau. C'est la capacité totale du seau.

2 Volume d'eau dans le seau



Ci-contre, on a représenté le modèle du seau contenant de l'eau. On retrouve les éléments précédents auxquels s'ajoute le point E qui est le centre du disque supérieur de l'eau présente dans le seau. Ce disque a pour rayon EF.
On note $x = BE$ (en dm).

1) Exprimer SE en fonction de x.
2) Exprimer EF en fonction de x.
3) En déduire le volume du cône de sommet S, de base le cercle de centre E et de rayon EF.
4) Exprimer le volume d'eau dans le seau à l'aide de x en définissant ainsi $V(x)$.
5) Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau. (Arrondir les valeurs à 10^{-1} près.)

Hauteur en dm	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Volume d'eau en litres						

6) Utiliser l'expression de $V(x)$ afin de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la hauteur d'eau pour laquelle le volume d'eau est de :
a) 1 L **b)** 2 L **c)** 5 L
7) En comparant les résultats obtenus à la question **6**, les graduations d'une jauge pour mesurer le volume d'eau présent dans le seau sont-elles régulières ?

Travaux pratiques

TP 3 Introduction à Algobox

INFO

1 Algorithme

Pour commencer, voici un algorithme.

1) Ouvrir le logiciel Algobox et programmer l'algorithme ci-contre.

2) Expliciter chaque ligne de ce programme. (Ne pas hésiter à utiliser le mode pas à pas).

3) Comment faire calculer pow(5.7) ?

4) Déterminer ce que fait ce programme.

5) Ajouter « Tracer point (x,c)". » à l'algorithme. À quoi sert cette nouvelle ligne ?

```
Liste des variables utilisées
   a : nombre
   b : nombre
   c : nombre
   x : nombre
Entrées
   Demander b
   Demander x
Traitements
   Donner à a la valeur de pow(x,2)
   Donner à c la valeur de a-b+4
Affichage
   Afficher c
Fin de l'algorithme
```

2 Programme de calcul

Le programme de calcul ci-dessous peut s'appliquer à n'importe quel nombre.
Le programmer sur Algobox.

1) doubler le nombre de départ ;
2) ajouter 5 ;
3) multiplier par 3 ;
4) ajouter le nombre de départ.

Récréation, énigmes

Ils ont dit, ils ont fait ...

Associer chaque proposition au mathématicien qui l'a découverte ou dite et la situer dans le temps.

- LEIBNIZ Gottfried
- DESCARTES René
- EULER Leonhard
- BERNOULLI Jean
- GREGORY James
- ORESME Nicolas

- 1673
- 1667
- 1748
- XVII^{e} s
- XIV^{e} s

1) Introduction du terme de fonction

2) Notation des fonctions

3) Définitions

a) Relation qui permet de faire correspondre à une longueur donnée, une autre longueur déduite de la première par un nombre fini d'opérations algébriques.

b) Une fonction est définie comme une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable.

c) On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes.

d) Une fonction est une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes.

e) Chaque chose mesurable, à l'exception des nombres, est imaginée comme une quantité continue.

FONCTIONS

2

Résoudre une (in)équation... ou pas !

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation
- Vérifier qu'un nombre est solution d'une inéquation
- Résoudre des équations simples
- Résoudre des inéquations simples

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 5 est-il solution des égalités suivantes ?

1) $-16+3x=-2x+9$

2) $x^2+5=0$

3) $(x-5)(x+7)=0$

4) $-2x^2+5x+25=0$

2 -2 est-il solution des inégalités suivantes ?

1) $9x-7<0$

2) $-5+x>-16$

3) $-2x+8<9x-3$

3 Résoudre les équations suivantes.

1) $-3x+5=9-5x$

2) $x^2-3=6$

3) $(2x-5)(x+3)=0$

4) $\frac{2}{3}x=5$

4 Résoudre les inéquations suivantes.

1) $-5x \geqslant 4$

2) $x-7<9$

3) $18<-x$

Voir solutions p. 259

Activités d'approche

DÉBAT 1 Kader et Sophie

1) Le professeur donne des programmes de calculs à étudier à ses élèves puis leur demande de tester des nombres mais Kader et Sophie n'en font qu'à leur tête !

Pour Kader :	Pour Sophie :
a) choisir un nombre ;	**a)** choisir un nombre ;
b) calculer son double ;	**b)** calculer son triple ;
c) additionner 4.	**c)** soustraire 7.

a) Ils veulent choisir des nombres opposés mais obtenir le même résultat.
Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

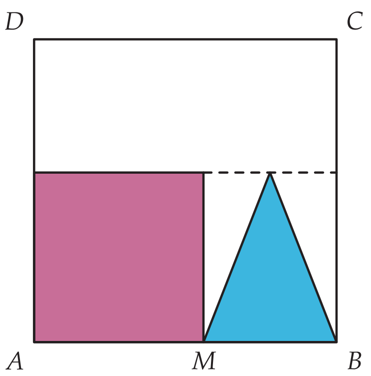
b) Ils veulent choisir le même nombre et que le produit de leurs résultats soit nul.
Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

c) Ils veulent choisir le même nombre et que les résultats de leurs programmes aient le même carré. Quels nombres peuvent-ils choisir ?

2) Kader veut offrir un pendentif en forme de cœur à Sophie. Le prix affiché est de 125 € mais Kader n'a que 80 €. Les soldes débutent mercredi prochain.
À partir de quelle réduction en pourcentage Kader pourra-t-il acheter le bijou ?

3) Au premier contrôle de Mathématiques, Kader a obtenu 12 et Sophie 13. Il n'y a que deux notes ce trimestre. Quelles notes devront-ils avoir au prochain contrôle pour avoir la même moyenne trimestrielle ? Y a-t-il plusieurs possibilités ?

DÉBAT 2 Le carré et le triangle



Le carré $ABCD$, ci-contre, a un côté de longueur 8 cm. M est un point, placé au hasard sur le segment $[AB]$.
Dans le carré $ABCD$, on construit :

- un **carré de côté** $[AM]$;
- un **triangle isocèle de base** $[MB]$ et dont la hauteur a même mesure que le côté $[AM]$ du carré.

On s'intéresse aux aires du **carré**, du **triangle**, au **motif** constitué par le carré et le triangle.

Répondre à chacune des questions suivantes en précisant la position du point M pour lequel ce serait possible.
Préparer un exposé oral pour expliquer le raisonnement et en justifiant la technique utilisée.

1) Est-il possible que l'aire du **triangle** soit égale à l'aire du **carré** ?
2) Est-il possible que l'aire du **triangle** soit supérieure à 5 cm^2 ?
3) Est-il possible que l'aire du **triangle** soit supérieure à l'aire du **carré** ?
4) Est-il possible que l'aire du **motif** soit égale à la moitié de l'aire du carré $ABCD$?

1. Résolution exacte d'(in)équations

La **résolution algébrique** d'une (in)équation permet de trouver la valeur exacte de chacune des solutions.

A. (In)équation du 1er degré

PROPRIÉTÉ : Opérations sur les équations

Les opérations suivantes ne changent pas l'ensemble des solutions d'une **équation** :
- additionner un même nombre aux deux membres d'une équation ;
- multiplier par un même nombre non nul les deux membres d'une équation.

PROPRIÉTÉ : Opérations sur les inéquations

Les opérations suivantes ne changent pas l'ensemble des solutions d'une **inéquation** :
- additionner un même nombre aux deux membres d'une inéquation ;
- multiplier par un **même nombre positif non nul** les deux membres d'une inéquation ;
- multiplier par un **même nombre négatif non nul** les deux membres d'une inéquation *à condition d'inverser le sens de l'inégalité*.

MÉTHODE 1 Résoudre un problème algébriquement

► Ex. 44 p. 106

1) On **détermine** et **dénomme** l'inconnue.
2) On **interprète** les informations sous forme d'une (in)équation.
3) On **résout** l'(in)équation en utilisant les règles précédentes :
   - on regroupe les termes contenant l'inconnue dans le même membre de l'(in)équation ;
   - si nécessaire, on réduit les expressions des deux membres ;
   - on isole l'inconnue dans l'ordre inverse des priorités de calcul.
4) On **répond** au problème posé par une phrase. La résolution de l'(in)équation peut faire apparaître des solutions correctes mathématiquement, mais incohérentes avec le problème.

Exercice d'application

Le cinéma d'art et d'essai de Mathyville propose une carte d'abonnement annuelle à 15 € et la séance coûte alors 6,40 € au lieu de 9 €. Rania hésite à s'abonner.
À combien de séances dans l'année doit-elle assister au minimum pour que l'abonnement devienne intéressant ?

Correction

1) On désigne par x le nombre de séances de cinéma auxquelles Rania ira cette année.
2) Avec l'abonnement cela coûterait : $15 + 6,4x$.
   Sans l'abonnement cela coûterait : $9x$. Pour que l'abonnement soit intéressant, il suffit que
   $15 + 6,4x < 9x$.
3) Lors de la résolution qui suit, chaque étape est équivalente à la précédente.
$$15 + 6,4x - 6,4x < 9x - 6,4x$$
$$15 < 2,6x$$
$$\frac{15}{2,6} < \frac{2,6x}{2,6}$$
$$\frac{15}{2,6} < x$$
   Les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'intervalle $\left]\frac{15}{2,6};+\infty\right[$.
4) Or, $\frac{15}{2,6} \approx 5,8$. Les solutions du problème sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 6. Donc il suffit que Rania aille au cinéma au moins 6 fois dans l'année pour que l'abonnement soit intéressant.

B. Équations-produits

PROPRIÉTÉ

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

MÉTHODE 2 Obtenir et résoudre une équation-produit

► Ex. 21 p. 103

Pour résoudre une équation plus complexe, on obtient puis résout une équation-produit.
1) On se ramène à une équation ayant un membre nul.
2) On factorise l'expression littérale.
3) On résout l'équation produit obtenue.

Exercice d'application

Dans un repère, on représente f définie par $f(x) = 3(x-7)^2 - 12$ pour $x \in [-6;6]$.
Combien de fois la courbe coupera-t-elle l'axe des abscisses ?
S'il(s) existe(nt), préciser les coordonnées de ce(s) point(s).

Correction

Les points d'intersection d'une courbe avec l'axe des abscisses sont les points de la courbe d'ordonnée nulle. On note x l'abscisse des points d'intersection. Ce sont donc les antécédents de 0 et il suffit de résoudre l'équation $3(x-7)^2 - 12 = 0$ dans $[-6;6]$ pour les trouver.
Lors de la résolution, chaque étape est équivalente à la précédente.

1) *On obtient et on simplifie une équation ayant un membre nul.*
$3(x-7)^2 - 12 = 0$
$(x-7)^2 - 4 = 0$
2) *On factorise en reconnaissant l'identité remarquable :* $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
$(x-7)^2 - 2^2 = 0$
$(x-7+2)(x-7-2) = 0$
$(x-5)(x-9) = 0$
3) *On résout l'équation produit obtenu.*
$x - 5 = 0$ ou $x - 9 = 0$
$x = 5$ ou $x = 9$
4) *On répond au problème posé.*
Cette équation a deux solutions : 5 et 9.
Or, $9 \notin [-6;6]$. La courbe représentative de la fonction f dans un repère pour $x \in [-6;6]$, coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(5;0)$.

Remarques :

- Certaines équations ne se factorisent pas dans $\mathbb{R}$.
  Par exemple $x^2 + 3 = 0$ n'admet pas de solution réelle.
- Des logiciels de calculs formels peuvent aider à la résolution d'équation.

2. Résolution approchée d'(in)équations

Quand la résolution algébrique d'une (in)équation n'est pas possible, on peut cependant **localiser et estimer des valeurs approchées**.

MÉTHODE 3 Estimer graphiquement une solution

► Ex. 29 p. 104

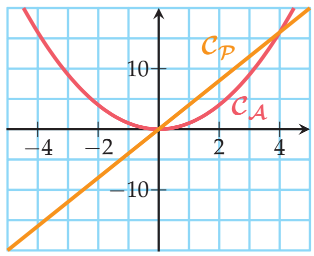
1) On trouve deux fonctions f et g telles que l'(in)équation puisse s'écrire sous la forme $f(x) = g(x)$ ou $f(x) < g(x)$.
2) On trace les courbes représentatives de f et g dans un même repère.
3) On cherche les abscisses
   - des points d'intersection des deux courbes pour résoudre $f(x) = g(x)$;
   - des points de $\mathcal{C}_f$ au-dessous (au-dessus) de $\mathcal{C}_g$ pour $f(x) < g(x)$ $(f(x) > g(x))$.

Exercice d'application

Jacques a dit que le périmètre d'un carré est toujours inférieur à son aire. A-t-il raison ?

Correction

1) On note x le côté d'un carré. Le périmètre est définie par $\mathcal{P}(x) = 4x$ et l'aire par $\mathcal{A}(x) = x^2$. Répondre à la question revient à étudier l'inéquation $\mathcal{P}(x) \leqslant \mathcal{A}(x)$.
2) On trace leur courbe représentative $\mathcal{C}_\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_\mathcal{A}$ dans un même repère.
3) Le graphique indique deux zones disjointes pour lesquelles $\mathcal{P}(x) \leqslant \mathcal{A}(x)$: $]-\infty;0]$ et $[4;+\infty[$. Donc, pour des valeurs entre 0 et 4 unités, le périmètre d'un carré est supérieur à son aire. Jacques a tort !



NOTATION : Les solutions de l'inéquation $\mathcal{P}(x) \leqslant \mathcal{A}(x)$ sont dans $]-\infty;0] \cup [4;+\infty[$.
Le symbole $\cup$ désigne la réunion des deux intervalles ; il indique qu'un nombre dans l'un ou l'autre des deux intervalles est solution de cette inéquation.

MÉTHODE 4 Affiner une solution

► Ex. 39 p. 105

Exercice d'application Voici le graphique obtenu lors de la résolution de $x^2 + (9-x)^2 + 32 = 81$. Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près des solutions.

Correction Le graphique met en évidence deux solutions proches l'une de 2,5 et l'autre de 6,5.

On pose $f(x) = x^2 + (9-x)^2 + 32$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2,41	81,24	6,51	80,58
2,42	81,15	6,52	80,66
2,43	81,07	6,53	80,74
2,44	80,99	6,54	80,82
2,45	80,91	6,55	80,91
2,46	80,82	6,56	80,99
2,47	80,74	6,57	81,07
2,48	80,66	6,58	81,15
2,49	80,58	6,59	80,24

Les deux solutions sont environ 2,44 cm et 6,56 cm.

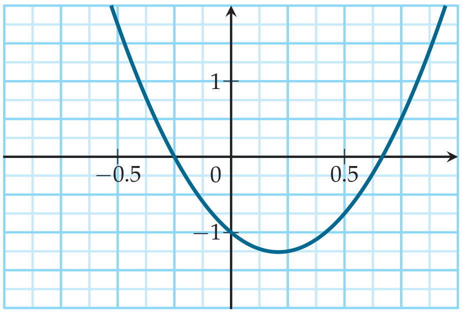
S'entraîner

Activités mentales

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $5 - 2x = 0$
2) $10x + 1 = 19 + x$
3) $(x-3)(x+2) = 0$
4) $(x-3)(x-4) = 0$
5) $(2x+3)(1-x) = 0$
6) $x^2 = 9$
7) $x^2 - 16 = 0$
8) $x^2 + 4 = 0$
9) $12 - 3x^2 = 0$

2 On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5(3x-2)(4x+1)$.
Estimer graphiquement les solutions de l'équation $0,5(3x-2)(4x+1) = 0$.



3 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $f(x) = 5$ si f est la fonction carrée.
2) $g(x) = 1,5$ si g est la fonction inverse.

4 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - 6$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $h(x) = 3$.

5 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 5$.
Résoudre $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} - 4$.
Calculer l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \frac{8}{x}$.
Calculer les abscisses des points d'intersection des courbes représentant f et h.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 4$.
Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses puis avec l'axe des ordonnées.

Intervalles de $\mathbb{R}$

9 Représenter sur une droite graduée et décrire, à l'aide d'intervalles, chacun des ensembles de nombres réels x tels que :

1) $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$
2) $-2 < x < -1$
3) $x \geqslant \frac{7}{3}$
4) $x > -3,5$

10 Recopier et compléter par $\in$ et $\notin$:

1) $1,4 \ldots \left[0; \sqrt{2}\right]$
2) $-\pi \ldots]-3;-1[$
3) $6 \ldots \left[\frac{7}{3}; +\infty\right[$
4) $-3 \ldots]-\infty; -3,5[$

11 Utiliser les intervalles pour décrire les ensembles de nombres x tels que :

1) $x < 1$ et $x \geqslant -3$
2) $x \leqslant -2$ ou $x > 1$
3) $x \leqslant 3,5$ ou $x < -1$
4) $x \geqslant \pi$ et $x \leqslant 3$

12 Simplifier, lorsque c'est possible, l'écriture des ensembles ci-dessous.

1) $[-1; 3,5] \cap \left[\sqrt{3}; 7\right]$
2) $]-\infty; -\pi] \cup [-3\pi; \pi[$
3) $[-7,1; 2] \cap [2; +\infty[$
4) $[-5; 0] \cup [3; +\infty[$

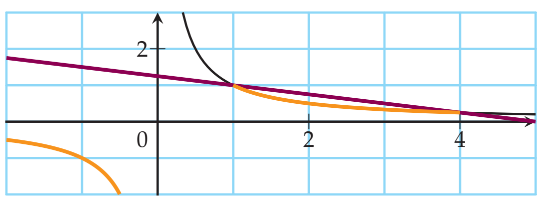
13 Les propositions conditionnelles ci-dessous sont-elle vraies ?

1) **Si** $\frac{1}{4} < x$ **alors** $0,2 < x$
2) **Si** $x < \sqrt{2}$ **alors** $x < 1,4$
3) **Si** $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$ **alors** $x \in [0,7; 1]$
4) **Si** $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ **alors** $x \in [0; 1]$

14 **Portion d'hyperbole**

Ci-dessous est représentée la fonction inverse ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

1) Décrire, en notation mathématique, l'ensemble des abscisses des points oranges de la courbe.
2) De quelle inéquation cet ensemble semble-t-il être la solution ?



Résolution algébrique

15 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $x-7=4$ 2) $2x=13$ 3) $9-x=5$ 4) $\dfrac{4}{x}=\dfrac{9}{5}$

16 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $3x+5=4x-7$
2) $2x-9=8x+3$
3) $-2x+3=3x-1$
4) $1+\dfrac{4}{3}x=4-\dfrac{2}{5}x$

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $4x-5=9x+4$
2) $\dfrac{5x}{4}=\dfrac{21}{9}$
3) $3-x=10x-7$
4) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{4}x=\dfrac{8}{9}-\dfrac{6}{7}x$
5) $(x-7)^2=(x+4)^2$
6) $\sqrt{5}x(\sqrt{6}x-4)=-2x$

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $x-6>8$
2) $2x<7$
3) $8-x\leqslant 3$
4) $-2x\geqslant 24$

19 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $4x-7\leqslant 10x+8$
2) $8x+11<3x-4$
3) $2x+9\geqslant 3x-2$
4) $-2x-5<-7x-15$

20 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $5x+13<8x-2$
2) $9-3x\geqslant -2$
3) $3x^5+2x-7<3x^5-8x-10$
4) $-2x+4>3x-5$

21 ► MÉTHODE 2 p. 100

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $(x+4)(x-7)=0$
2) $(2x+3)(4x-5)=0$
3) $-x(5-4x)=0$
4) $(-15x+3)(3x+9)=0$

22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $x^2+4x+4=0$
2) $36x^2-12x+22=21$
3) $5(6x-7)^2=20$
4) $5x^2=8x$

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $(x-2)^2-(x+6)^2=6$
2) $5x+8=9x-7$
3) $(2x+1)(x+4)+(x+4)(3-5x)=0$
4) $(x-7)(3x-5)-(9x-4)(x-7)=0$
5) $(4x-7)(9x+5)=(8x-3)(4x-7)$

24 **La bonne expression**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+x-2$.
À l'aide de **Xcas**, on a factorisé $f(x)$. En utilisant la bonne expression, résoudre les équations suivantes.

1) $f(x)=0$
2) $f(x)=-2$

$factoriser(x^\wedge 2+x-2)$
$(x-1)^*(x+2)$

25 **Avec deux fonctions**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x^2+x+1$ et $g(x)=(x+1)^3$.
En utilisant les expressions obtenues à l'aide d'**Xcas**, résoudre les équations ci-dessous.

$factoriser(x^\wedge 3+x^\wedge 2+x+1)$
$(x+1)*(x^2+1)$
$developper((x+1)^\wedge 3))$
x^3+3x^2+3x+1

1) $f(x)=x+1$
2) $f(x)=0$
3) $f(x)=g(x)$

26 **En autonomie** INFO

À l'aide de **Xcas**, résoudre les équations suivantes.

1) $x^2+2x-3=0$ 2) $(x+3)^3-4x-12=0$

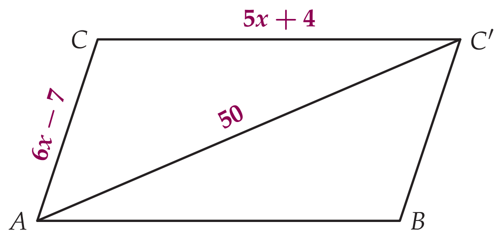
27 Voici un programme de calcul.

- choisir un nombre ;
- calculer son carré ;
- prendre le quadruple du résultat ;
- ajouter -7 au résultat.

1) Vérifier que ce programme donne 9 si le nombre choisi au départ est 2.
2) Quel nombre doit-on choisir pour obtenir 2 ?

28 **Suis-je un rectangle ?**

Pour quelle(s) valeur(s) de x ce parallélogramme est-il un rectangle ?



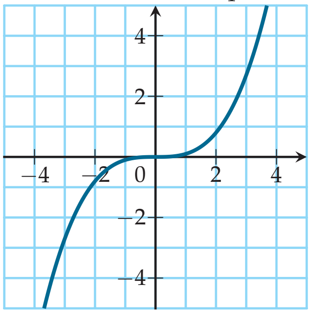
S'entraîner

Estimation graphique

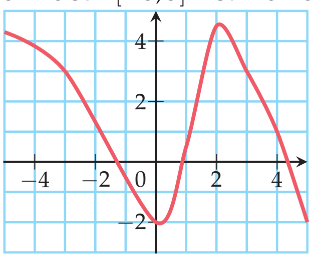
29 ► MÉTHODE 3 p. 101

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5;5]$. Estimer les solutions des équations.

1) $f(x) = 2$
2) $f(x) = -3$
3) $f(x) = 4$
4) $f(x) = -1$



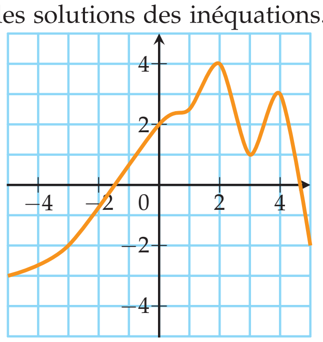
30 Voici la courbe représentative d'une fonction g définie sur $[-5;5]$. Estimer les solutions des équations.



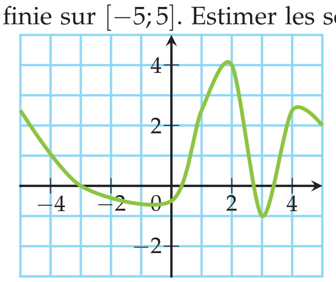
1) $g(x) = 2$
2) $g(x) = -3$
3) $g(x) = 4$
4) $g(x) = -1$

31 Voici la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[-5;5]$. Estimer les solutions des inéquations.

1) $h(x) \geqslant 0$
2) $h(x) < -4$
3) $h(x) < -2$
4) $h(x) > 3$



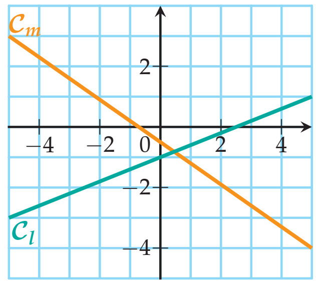
32 Voici la courbe représentative d'une fonction k définie sur $[-5;5]$. Estimer les solutions des inéquations.



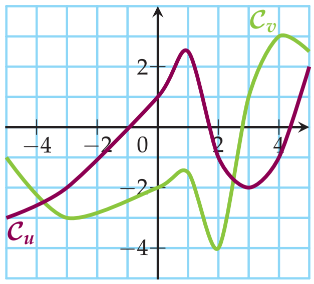
1) $k(x) \geqslant 3$
2) $k(x) \leqslant 1$
3) $k(x) > 0$
4) $k(x) < -1$

33 Voici les courbes représentatives sur $[-5;5]$ de deux fonctions affines l et m. Estimer les solutions des (in)équations ci-dessous.

1) $l(x) = -1$
2) $m(x) > 0$
3) $l(x) = m(x)$
4) $l(x) < m(x)$



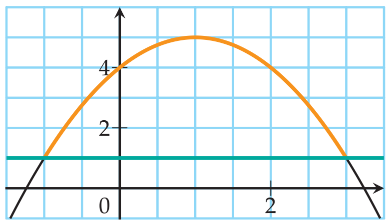
34 Voici les courbes représentatives de deux fonctions u et v définies sur $[-5;5]$. Estimer les solutions des (in)équations ci-dessous.



1) $u(x) = v(x)$
2) $u(x) \leqslant v(x)$

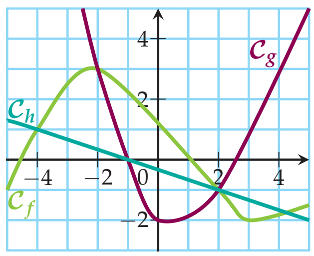
35 Ci-dessous est représentée la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$.

1) Décrire, en notation mathématique, l'ensemble des abscisses des points orange de la courbe.
2) De quelle inéquation cet ensemble semble-t-il être la solution ?



36 On a représenté trois fonctions f, g et h. Indiquer à quelles (in)équations les solutions correspondent.

1) 2
2) -4
3) $[-2;2]$
4) $-4 < x < -2$



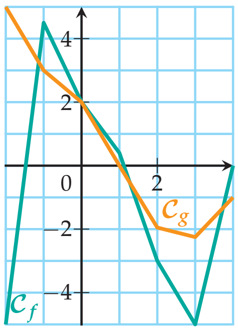
Approximation numérique

37 **Table et graphique (1)**

Voici une table de valeurs et les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-2;4]$.
Donner une approximation des solutions des équations suivantes ainsi que la précision de cette approximation.

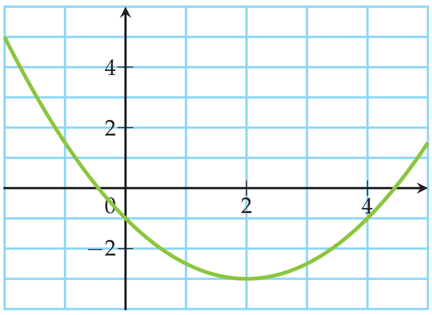
1) $f(x) = 4$
2) $g(x) = -2$
3) $f(x) = g(x)$
4) $f(x) = g(x) - 2$

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	-5	5
-1	4,5	3
0	2	2
1	0,4	0
2	-3	$-1,95$
3	-5	$-2,25$
4	0	-1



38 **Table et graphique (2)** INFO

Ci-dessous est représentée la fonction f, définie sur $[-2;5]$, par $f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1$.



1) Estimer graphiquement les deux solutions de l'équation $f(x) = 1$.

2) Voici une table de valeurs de la fonction f.

x	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
$f(x)$	$0,13$	0,38	0,645	0,92	1,21	1,5

a) Donner une approximation d'une des solutions de l'équation $f(x) = 1$.

b) Quelle est la précision de cette approximation ?

3) À l'aide de votre calculatrice, donner une approximation au dixième près de l'autre solution.

39 ► MÉTHODE 4 p. 101

1) Dresser un tableau de valeurs, entre 0 et 5, avec un pas de $0,25$, de la fonction k définie par $k(x) = (3x+5)^3$.

2) Donner une approximation des solutions sur $[0;5]$ de l'équation $(3x+5)^3 = 5\,000$ au dixième.

40 Dresser un tableau de valeurs afin de donner une approximation au centième des solutions de $\left(\dfrac{x}{1000} + 5\right)^2 < 25 + \dfrac{1}{x+6}$.

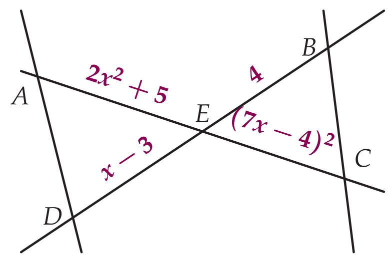
41 **Vers la valeur exacte...**

On considère l'équation $-2x^3 + 5x^2 - 1 = 0$.

1) Donner une approximation de ses solutions au millième.

2) Quelle semble être leur valeur exacte ?

42 Donner une approximation des valeurs de x pour lesquelles les droites (AD) et (BC) sont parallèles.



43 **Exacte ou approchée ?**

On appelle respectivement $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 16$ et $g(x) = -x + 7$.

1) Quelle équation résoudre pour déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$?

2) Estimer les solutions de l'équation du 1.

3) Renée s'aide de **Xcas** pour trouver les valeurs exactes des solutions de l'équation. Elle écrit :

$$factoriser(-2x^2 + 4x + 16)$$
$$-2 * (x+2)^*(x-4)$$

Le calcul proposé par Renée est-il vraiment utile ? Si non, modifier l'instruction pour répondre au problème posé.

S'entraîner

Problèmes

Pour les problèmes 44 et 49, choisir parmi les trois méthodes étudiées dans ce chapitre, celle qui s'adapte le mieux.

44 ► MÉTHODE 1 p. 99
Les légionnaires romains, sur le champ de bataille, se disposaient en carré pour une plus grande efficacité. La compagnie de Brutus était telle que si elle avait comporté 36 hommes de plus, le carré ainsi formé aurait eu 2 rangées de plus. Combien d'hommes comporte cette compagnie ?

45 Donner l'ensemble de définition de ces fonctions.

1) $f(x) = \dfrac{8x-1}{4x+9}$ **2)** $g(x) = \sqrt{-2x+3}$

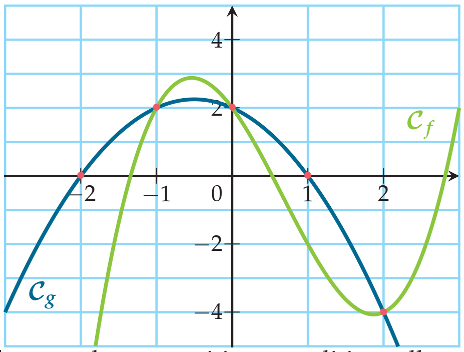
46 Catherine fabrique des cartes d'anniversaire avec la technique du scrapbooking.

Les perforatrices et les tampons-encreurs pour les papillons et le motif joyeux anniversaire ont coûté 46,70 €. Pour chaque carte, Catherine dépense 1,54 € pour le papier cartonné, les rubans... En supposant qu'elle les vende 4 € pièce, à partir de combien de cartes vendues Catherine dégagera-t-elle un bénéfice ?

47 **Taximètre**
Ci-dessous sont donnés les tarifs, en euros, des taxis de trois capitales européennes. On supposera que la course se fera sans embouteillage. Comparer les trois tarifs.

	Prise en charge	Prix au km
Paris	3,65	1,00
Madrid	2,30	1,05
Londres	2,80	1,85

48 **Logique**
Voici les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[-3;3]$.



Pour chacune des propositions conditionnelles ci-dessous, dire si elle est vraie puis énoncer sa réciproque et dire si cette dernière est vraie.

1) Si $x \in]0;2[$ alors $f(x) < g(x)$.
2) Si $x = -2$ alors $g(x) = 0$.
3) Si $x \in [1;2]$ alors $f(x) \times g(x) < 0$.

49 **Tout est-il possible ?** ALGO
Voici un algorithme.

1. *Algorithme :* Programme de calcul
2. *Liste des variables utilisées*
3. `a,b,c,d` : *réels*
4. *Entrées*
5. Demander `a`
6. *Traitements*
7. Donner à `b` la valeur de `3*a+5`
8. Donner à `c` la valeur de `2*a-7`
9. Donner à `d` la valeur de `b*c`
10. *Affichage*
11. Afficher d
12. *Fin de l'algorithme*

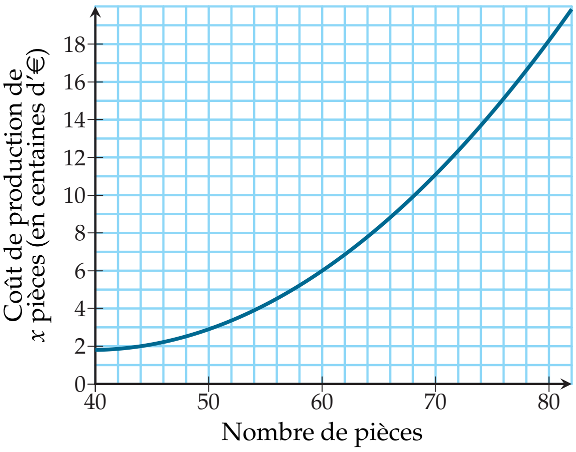
1) Quelle est la valeur fournie en sortie par l'algorithme si la valeur entrée pour a est :
a) 5 ? **b)** -2 ? **c)** 3,5 ? **d)** $\dfrac{2}{3}$?
2) Quelle est l'expression calculée ?
3) Modifier la ligne 9 pour que l'algorithme calcule b/c.
- Ce nouvel algorithme fonctionne-t-il avec toute valeur de a en entrée ?
- Si besoin, le modifier pour qu'il ne calcule rien pour les valeurs "interdites" mais renvoie un message d'erreur.

50 Étude du bénéfice

Une entreprise fabrique des pièces détachées pour automobile.

On note x le nombre de pièces fabriquées au cours d'une journée. Le coût de production, en euros, de x pièces est noté $C(x)$. Ci-dessous est représentée la courbe de la fonction C sur l'intervalle $[40; 80]$.

À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.



1) Quel est le coût de production de 50 pièces ?
2) Pour un coût de production de 1 400 €, combien l'entreprise va-t-elle fabriquer de pièces ?

On suppose que, sur l'intervalle $[40; 80]$, la fonction C est définie par $C(x) = x^2 - 79x + 1740$.

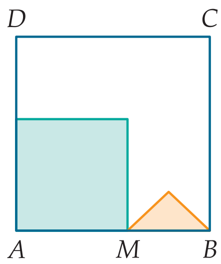
3) Chaque pièce est vendue 20 €. Déterminer la recette $R(x)$ de l'entreprise pour x pièces fabriquées.
4) Représenter graphiquement la fonction R et la fonction C dans un même repère.
5) Le bénéfice réalisé par l'entreprise, en fonction du nombre x de pièces vendues, est la différence entre la recette et le coût de production.
   Quels nombres de pièces l'entreprise doit-elle fabriquer pour réaliser un bénéfice positif ?
6) Combien l'entreprise doit-elle fabriquer de pièces pour avoir un bénéfice maximal ?

51 Carré parfait

Un nombre est un carré parfait s'il est le carré d'un nombre entier.

1) Quels sont les 10 premiers carrés parfaits ?
2) Déterminer cinq entiers naturels n tel que $n^2 + 84n$ soit un carré parfait.

52 Un petit problème



Le carré $ABCD$, ci-contre a un côté de longueur 8 cm. M est un point pris au hasard sur le segment $[AB]$. On construit, à l'intérieur du carré $ABCD$, le carré de côté $[AM]$ et le triangle rectangle isocèle d'hypoténuse $[MB]$.

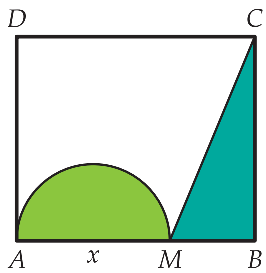
On s'intéresse aux aires du petit carré, du triangle et du motif constitué par le carré et le triangle.

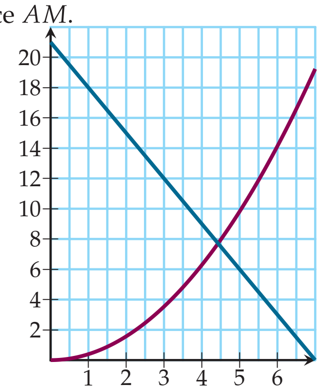
On pose $x = AM$.

1) Donner l'aire $\mathcal{A}_c$ du carré en fonction de x.
2) Montrer que l'aire $\mathcal{A}_t$ du triangle en fonction de x est $\left(4 - \dfrac{x}{2}\right)^2$.
3) Donner l'aire $\mathcal{A}_m$ du motif en fonction de x.
4) Est-il possible de faire en sorte que
   a) l'aire du motif soit de 40 cm^2 ?
   b) L'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?
   c) L'aire du motif soit la plus petite possible ?
5) Donner les solutions exactes (ou à défaut une approximation) de chacun de ces trois problèmes.

53 Dimensions perdues

Soit $ABCD$ un rectangle. On place un point M libre sur le segment $[AB]$. Comme sur la figure ci-dessous, on trace un demi-cercle de diamètre $[AM]$ et le triangle MBC. On note x la distance AM.





Le graphique représente les aires $f(x)$ et $g(x)$ du demi-disque et du triangle.

1) Identifier les courbes de f et de g. Justifier.
2) Retrouver les dimensions du rectangle $ABCD$.
3) Estimer graphiquement la valeur de x pour que le demi-disque et le triangle aient la même aire. Puis, en donner une valeur approchée au centième.

Approfondir

54 Méthode de résolution

INFO ALGO

On veut résoudre l'équation $1,25x^2 - 4x + 16 = 40$ (*)

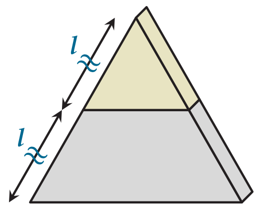
1) Compléter l'algorithme pour qu'il indique si un nombre proposé est solution de l'équation (*).

```
Liste des variables utilisées
   x, calculg : nombre
Entrées
   Demander x
Traitements et affichage
   Donner à calculg la valeur de ...
   Si calculg=... Alors
      Afficher 'oui'
   Sinon
      Afficher 'non'
   Fin Si
Fin de l'algorithme
```

2) À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, estimer les éventuelles solutions de l'équation (*).

3) Résoudre à l'aide d'un calculateur formel l'équation (*).

55 Le bon prix



Un orfèvre fabrique des boucles d'oreilles en forme de triangle équilatéral d'épaisseur 2 mm. La partie du haut est un triangle équilatéral en or de côté l. La partie du bas est en argent.

- masse volumique de l'or : 19,3 g/cm^3 ;
- masse volumique de l'argent : 10,5 g/cm^3 ;
- prix de l'or : 40 000 € le kilo ;
- prix de l'argent : 700 € le kilo.

1) Exprimer le volume de chaque métal nécessaire à la fabrication de la boucle d'oreille en fonction de l.

2) Estimer la masse de chaque métal nécessaire à la fabrication de la boucle d'oreilles en fonction de l.

3) Estimer le prix de chaque métal nécessaire à la fabrication de la boucle d'oreilles en fonction de l.

4) Quelles valeurs de l choisir pour que le prix des matériaux nécessaires à la fabrication de la paire de boucles d'oreilles ne dépasse pas 30 € ?

56 Logique : négation

Énoncer la négation des propositions ci-dessous.

1) Tous les élèves de la classe vont au Club de Maths.

2) Le nombre a est inférieur ou égal à 2.

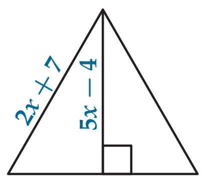
3) Pour tous les nombres x de $[0;3]$, $f(x) < 0$.

4) Il existe une valeur x_0 telle que $f(x_0) \geqslant 0$.

5) n est un nombre pair et supérieur à 100.

57

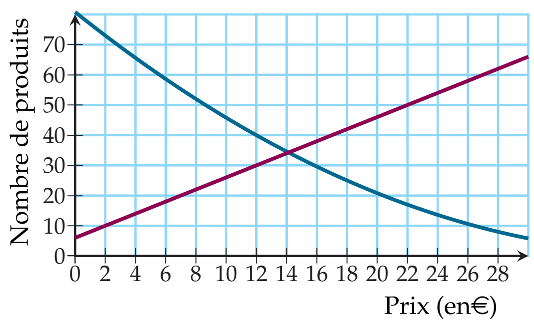
Trouver les valeurs de x pour lesquelles le triangle ci-dessous est équilatéral.



58 Prix d'équilibre

Une étude de marché s'intéresse à l'évolution de l'offre et de la demande d'un produit en fonction de son prix unitaire, exprimé en euros.

Pour un prix unitaire de x €, compris entre 2 et 30, le nombre de produits demandés est modélisé par : $f(x) = 0,05x^2 - 4x + 80,8$. Le nombre de produits offerts est modélisé par la fonction : $g(x) = 2x + 6$.



Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes des fonctions f et g.

1) Attribuer les courbes aux fonctions f et g.

2) Déterminer le nombre de produits offerts et le nombre de produits demandés lorsque le prix du produit est de 18 €.

On appelle prix d'équilibre d'un produit, le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.

3) Estimer, au centime près, le prix d'équilibre.

4) Quel est alors le nombre de produits demandés (et donc aussi offerts) ?

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Résoudre algébriquement
- une équation du premier degré à une inconnue
- une inéquation du premier degré à une inconnue
- une équation-produit

À partir de la représentation graphique d'une fonction,
- estimer des valeurs approchées d'une équation
- estimer des valeurs approchées d'une inéquation

À partir d'un tableau de valeur d'une fonction,
- déterminer des valeurs approchées d'une équation
- déterminer des valeurs approchées d'une inéquation

Noter les solutions d'une inéquation sous la forme
- d'un intervalle
- de la réunion de plusieurs intervalles

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net @

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

59 Lorsque l'on tape « Résoudre[2x-3=-3x+7] » dans la barre de saisie d'un logiciel de calcul formel, que nous renvoie le logiciel ?

ⓐ -4 ⓑ 4 ⓒ 2 ⓓ -2

60 Lorsque l'on tape « Résoudre[(2x-7)*(-3x+6)=0] » dans la barre de saisie d'un logiciel de calcul formel, que nous renvoie le logiciel ?

ⓐ 0 ⓑ pas de solutions ⓒ -6 et 7 ⓓ $\dfrac{7}{2}$ et 2

Pour les trois questions suivantes, on modélise la Terre par une sphère de rayon 6 400 km.

61 Si on entourait la Terre par un câble au niveau de l'équateur, quelle serait la longueur de ce câble ?

ⓐ $\approx 40\,212{,}385\,97$ km ⓑ $1{,}28 \times 10^4 \times \pi$ km ⓒ $12\,800\pi$ km

62 On décide maintenant de placer un deuxième câble qui entourerait la Terre, mais à 1 m au dessus du sol. On note a l'augmentation de la longueur du câble en km. Quelle équation vérifierait a ?

ⓐ $2\pi \times a = 6400 + 1$ ⓒ $2\pi \times (6400 + 1) = 12800\pi + a$

ⓑ $2\pi \times (6400 + 0,001) = a$ ⓓ $2\pi \times (6400 + 0,001) = 12800\pi + a$

63 La solution de l'équation précédente est d'environ

ⓐ 6,28 m ⓑ 6 400 km ⓒ pas de solution ⓓ 1 m

64 On considère l'équation $\sqrt{3}(x^2 - x) - 3(x + 1) = 0$. Une solution est :

ⓐ un entier ⓑ un nombre négatif ⓒ environ 1,75

On a mesuré, en continu pendant quatre heures, la concentration $\mathcal{C}$ d'un médicament dans le sang d'un patient. La fonction $\mathcal{C}$ est représentée ci-dessous.

65 Quelle est la concentration du médicament dans le sang au bout de 2 h ?

(a) environ 0,5 (b) environ 1 (c) environ 1,5 (d) environ 0,9

66 Laquelle (lesquelles) de(s) (in)équations ci-dessous a pour solution l'intervalle de temps où la concentration du médicament est au plus égale à 1 ?

(a) $\mathcal{C}(h) > 1$ (c) $\mathcal{C}(h) < 1$

(b) $\mathcal{C}(h) = 1$ (d) $\mathcal{C}(h) \leqslant 1$

67 À quel moment la concentration dans le sang est-elle de 0,5 mg/L ?

(a) ≈40 min (b) ≈2 h 20 min (c) ≈0,667 h

68 Ce médicament est jugé efficace quand la concentration dans le sang dépasse 0,75 mg/L. Quelle est donc sa période d'efficacité ? (On arrondira grossièrement.)

(a) jusqu'à 2 h (b) jusqu'à 4 h (c) dès 45 min (d) entre 0,75 et 2 h

69 Au bout de combien de temps le médicament est-il le plus concentré ?

(a) ≈1 h (b) ≈1 h 30 min (c) ≈1 h 50 min (d) ≈6 h

70 Quelle est alors la concentration du médicament dans le sang en mg/L ?

(a) ≈1 (b) ≈1,2 (c) ≈1,25 (d) ≈5,8

71 Déterminer la (ou les) solution(s) de l'inéquation $5x + 3 < 3x + 8$.

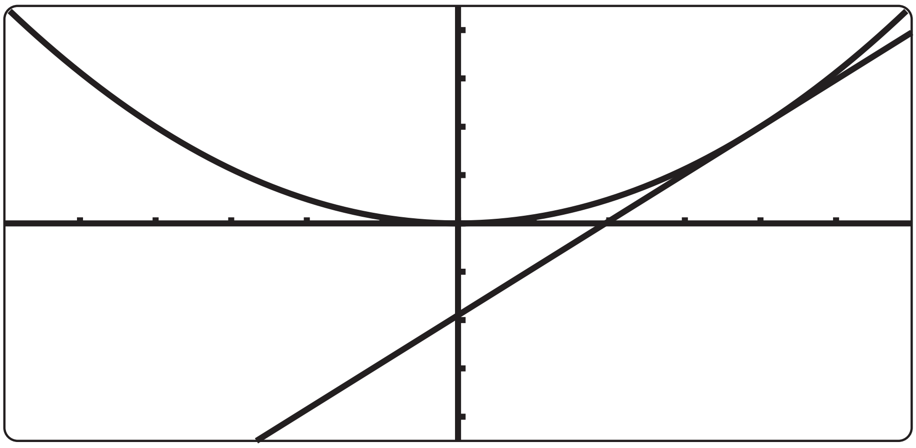
(a) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ (b) $S = \left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$ (c) $S = \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$ (d) $S = \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$

72 Déterminer les solutions de l'inéquation $4x - 5 < 3x + 8$.

(a) $S =]-\infty; 13[$ (b) $S =]-\infty; 13]$ (c) $S =]13; +\infty[$ (d) $S = [13; +\infty[$

TP 1 Pixellisation

M. Dirichlet, professeur au Lycée Lejeune, demande à ces élèves de 2eZ de résoudre l'équation suivante : $x^2 = 3,9x - 3,8$.
Enzo, qui dégaine sa calculatrice plus vite que son ombre, fait représenter graphiquement les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3,9x - 3,8$.
Une capture d'écran de la calculatrice est donnée ci-dessous.
Enzo en conclut que les solutions de cette équation sont les nombres de l'intervalle $]3,5;4,5[$.
Enzo-t-il raison ? Justifier.



TP 2 Le tennis du futur

Le joueur de tennis Yannick Nada travaille son service contre un mur de briques intelligentes issues de la nano-technologie.
Les briques s'allument en vert quand la vitesse de la balle est suffisante, c'est à dire si l'énergie cinétique de la balle, de vitesse v, est supérieure à $4,6v + 34,2$. Sinon, les briques deviennent rouges.
L'énergie cinétique, en fonction de la vitesse v et de la masse m, est donnée par la formule $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.
La masse d'une balle de tennis est de 0,058 kg.

1) Yannick effectue un premier service à 35 $m.s^{-1}$. Quelle est la couleur du mur ?
2) Après s'être bien échauffé, il effectue un second service à 45 $m.s^{-1}$. Quelle est la couleur du mur ?
3) Quelle inéquation résoudre pour trouver les vitesses pour lesquelles le mur devient vert ?
4) À l'aide du traceur de courbe de votre calculatrice, résoudre cette inéquation.
5) Parmi toutes les vitesses possibles trouvées à la question précédente, laquelle est minimale ? Exprimer le résultat en $m.s^{-1}$ puis en $km.h^{-1}$.

Travaux pratiques

TP 3 Solutions approchées, une nouvelle méthode

INFO ALGO

1 Jouons...

Ouvrir la séance Labomep préparée qui contient deux exercices.

1) Dans le premier exercice, il s'agit de trouver un nombre choisi par l'ordinateur entre 1 et 1 000. Jouer plusieurs fois de manière à affiner une stratégie pour trouver le nombre le plus rapidement possible.

2) Au bout du temps imparti par le professeur, se regrouper par 2 ou 3 élèves pour confronter vos stratégies.

- **a)** Tester vos stratégies sur l'exercice 2 qui propose de résoudre des équations dans un intervalle donné avec une précision donnée. Garder une trace des essais : noter, à chaque fois, l'intervalle et la précision attendue ainsi que le nombre de coups utilisés.
- **b)** Comparer le nombre de coups utilisés avec le nombre de valeurs nécessaires pour dresser une table de valeurs complète sur l'intervalle donnée avec la précision donnée.
- **c)** Préparer une description pour exposer votre méthode à la classe.

2 Dichotomie

L'algorithme de la dichotomie est utilisé lors de la recherche de solutions d'équation de type $f(x) = k$.

Son principe est le suivant : au lieu d'établir un tableau de valeurs avec un pas fixe sur un intervalle $[a; b]$ qui contient la solution, il s'agit de partager l'intervalle en deux intervalles de moindre amplitude : $[a; c]$ et $[c; b]$, de repérer celui des deux qui contient la solution et d'éliminer l'autre.

L'algorithme est donné ci-contre. Le compléter à chaque question, en fonction de votre expérience acquise dans la partie 1.

1) Comment se calcule le nombre c qui sépare l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles de même amplitude ?
Compléter la ligne 10.

2) Comment choisit-on entre $[a; c]$ et $[c; b]$?
Compléter les lignes 12, 13 et 15.

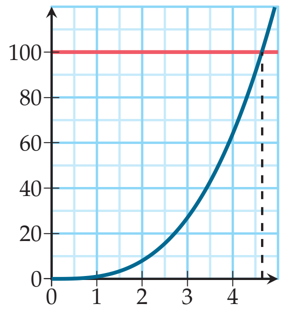
3) Quand arrête-t-on le processus itératif ?
Compléter la ligne 9.

4) Quelle est alors la solution ?
Compléter la ligne 18.

```
1.  Algorithme : Dichotomie
2.  Liste des variables utilisées
3.    a, b, k, pas : réels
4.    f : fonction
5.    s, c : réels
6.  Entrées
7.    Demander a, b, f, k, pas
8.  Traitements
9.    Tant que (...) faire
10.     Calculer ...
11.     Stocker la réponse dans c
12.     Si ... Alors
13.       Donner à ... la valeur de c
14.     Sinon
15.       Donner à ... la valeur de c
16.     Fin Si
17.   Fin Tant que
18.   Calculer ...
19.   Stocker la réponse dans s
20. Affichage
21.   Afficher s
22. Fin de l'algorithme
```

TP 4 À quelle vitesse ?

L'objectif de ce TP est de comparer les deux méthodes de recherche de solutions approchées :
la méthode de balayage et la méthode de dichotomie.
Dans les parties 1 et 2, on cherche une valeur approchée de la solution à l'équation $x^3 = 100$ **(E)**. On admettra que l'unique solution α de l'équation **(E)** se trouve dans l'intervalle $[4;5]$.



1 Méthode par balayage

1) Du tableau de valeurs ci-dessous, quel encadrement déduit-on pour α ?
Quelle est la précision obtenue ?

x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
x^3	64	68,92	74,09	79,51	85,18	91,13	97,34	103,82	110,59	117,64	125

2) Réaliser un tableau de valeurs de x^3 sur l'intervalle trouvé au **1** avec un pas de $0,01$.
Quel encadrement de α trouve-t-on ? Quelle est la précision obtenue ?

3) Poursuivre la méthode pour donner un encadrement à 10^{-3} près de α.
Au total, combien de calculs d'images ont-ils été nécessaires ?

2 Méthode par dichotomie

1) On considère l'algorithme de dichotomie ci-contre. Choisir $p = 3$. Faire fonctionner l'algorithme pas à pas et compléter le tableau d'états des variables ci-dessous.

Etape n°	0	1	2	3
a	4	4,5	...	...
b	5	5	...	...
$b - a$	1	0,5	...	...
$\frac{a+b}{2}$	4,5	4,75	...	...
$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$	91,125	...	...	...

2) En combien d'étapes a-t-on obtenu un encadrement à 10^{-3} près de α ?

3) Programmer cet algorithme et l'utiliser pour obtenir une valeur approchée de l'équation **(E)** à 10^{-6} près.

```
Liste des variables utilisées
  a, b, p : réels
Entrées
  Demander p
  Donner à a la valeur de 4
  Donner à b la valeur de 5
Traitements
  Tant que (b − a > 10^(−p)) faire
    Si ((a + b)/2)^3 > 100 Alors
      Donner à b la valeur de (a + b)/2
    Sinon
      Donner à a la valeur de (a + b)/2
    Fin Si
  Fin Tant que
Affichage
  Afficher (a,'< α <',b)
```

3 Résolution de l'équation $x^3 + 2x = 30$

1) Localiser graphiquement sa solution en donnant un intervalle d'amplitude 1 la contenant.

2) Utiliser la méthode par balayage pour en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

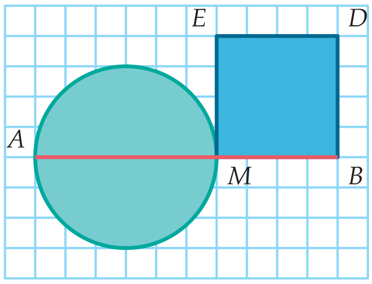
3) En utilisant la méthode par dichotomie, donner une solution approchée à 10^{-6} près de la solution en modifiant le programme précédent.

4) Comparer les deux méthodes.

TP 5 La quadrature du cercle

INFO

L'objet de ce TP est de comparer l'aire d'un disque et celle d'un carré.
On considère la figure ci-contre où $AB = 4$ cm.
M est un point libre sur le segment $[AB]$.
Le diamètre du disque est $[AM]$ et $MBDE$ est un carré.
On notera x la longueur AM.



1 Faire des simulations

1) Reproduire la figure sur un logiciel de géométrie dynamique et la présenter au professeur.
2) En déplaçant le point M, expliquer comment varient l'aire du disque et l'aire du carré suivant la position de M.
3) Existe-t-il une valeur de x_0 de x pour laquelle ces deux aires sont égales ? Si oui, en donner une valeur approchée.

2 Obtenir une valeur approchée

1) Déterminer, en fonction de x, l'aire $d(x)$ du disque et l'aire $c(x)$ du carré.
Préciser leur ensemble de définition.
2) Tracer les représentations graphiques de ces deux fonctions.
3) Retrouver une valeur approchée de x_0 et en déterminer un encadrement à 0,001 près.

3 La valeur exacte

1) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, résoudre l'équation $d(x) = c(x)$.
2) Déterminer la valeur exacte de x_0.
Vérifier que sa valeur soit cohérente avec l'encadrement trouvé au 2 3.

Récréation, énigmes

Al Khwarizmi

Ce mathématicien perse est né en 789 dans la région du Khwarezm (située dans l'actuel Ouzbekistan) et mort en 850 à Bagdad. Dans un traité, « *Kitâb al-jabr wa al-muqâbala* », il donne des méthodes de résolution d'équations du premier et du deuxième degré. Al-jabr donnera le mot **algèbre**, et le nom de ce mathématicien sera à l'origine du mot algorithme.

Quadrature du cercle

La quadrature du cercle (la construction d'un carré de même aire qu'un disque donné), la duplication du cube et la trisection de l'angle uniquement à l'aide d'une règle (non graduée) et d'un compas, sont trois grands problèmes antiques (environ V^e siècle avant J.C.).

Il a été prouvé que ces problèmes sont impossibles à résoudre grâce aux travaux successifs de Descartes, Wantzel et enfin Lindemann en 1882.

La quadrature du cercle, objet du TP 5, a même donné une expression, certes peu utilisée par le grand public, pour indiquer qu'un problème est insoluble.

FONCTIONS

3

Variations et extrema

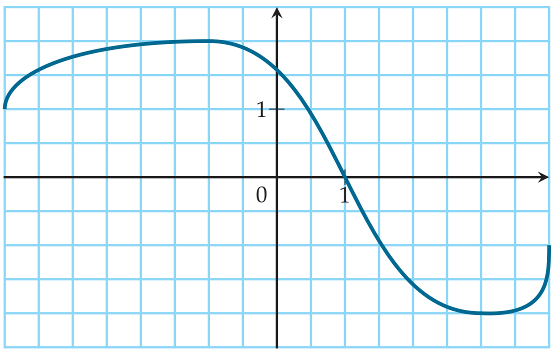
Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Calculer l'image d'un nombre par une fonction
- Lire une image par une fonction sur un graphique
- Reconnaître une fonction affine
- Connaître les effets des opérations sur l'ordre des nombres

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 La représentation graphique d'une fonction f est donnée ci-dessous.



1) Sur quel axe lit-on les images de nombres par la fonction f ?

2) Lire :

a) $f(-4)$ **c)** $f(3)$

b) $f(-1)$ **d)** $f(4)$

2 La fonction g est définie par $g(x) = 3x - 4$.
Par la fonction g, quelle est l'image de :

1) 0 ? **2)** $\dfrac{2}{3}$?

3 Déterminer les fonctions affines.

1) $f(x) = 2x$ **3)** $h(x) = (4x - 1)^2$

2) $g(x) = \dfrac{5x - 7}{4}$ **4)** $m(x) = (x + 5)^2 - x^2$

4 a est un nombre tel que $a \leqslant 8$.
Que peut-on dire de :

1) $a + 4$? **4)** $a \times (-4)$?

2) $a - 4$? **5)** $a \div 4$?

3) $a \times 4$? **6)** $a \div (-4)$?

5 Soit a et b deux nombres tels que $a < b < -2$.
Que peut-on dire de :

1) $a + b$? **3)** $\dfrac{a}{b}$?

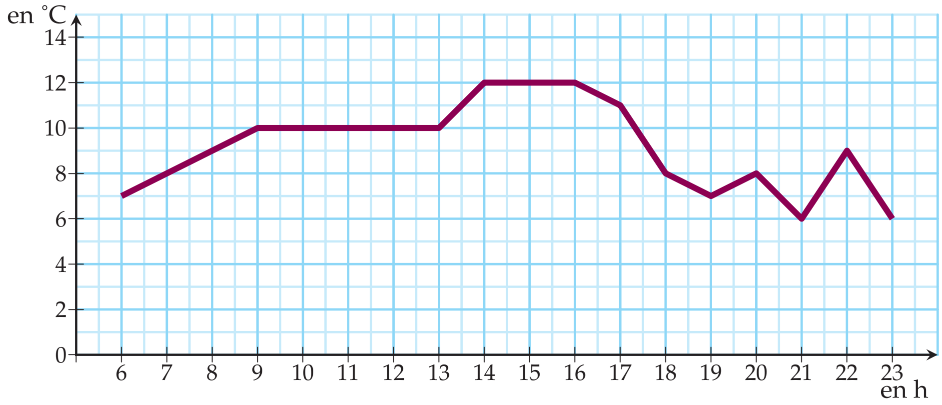
2) $a - b$? **4)** ab ?

Voir solutions p. 259

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 En Bretagne, il fait beau... plusieurs fois par jour !

Aurore a un capteur qui relève les températures en continu.
Voici ce qu'elle a obtenu dans son jardin de Saint-Brieuc le lundi 30 décembre 2013.



1) Donner la température à 9 h et à 17 h.

2) À quelle(s) heure(s) atteint-on
   a) la température de 8°C ?
   b) La température minimale ?
   c) La température maximale ?

3) Sur quelle(s) tranche(s) horaire(s)
   a) la température croît-elle ? Décroît-elle ?
   b) La température reste-t-elle constante ?

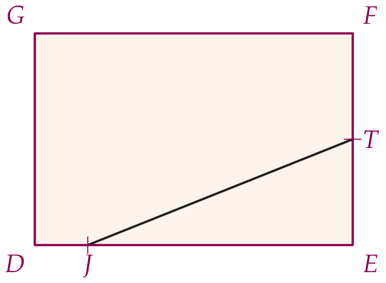
4) Décrire les variations de la température en fonction du temps.

ACTIVITÉ 2 Dans la cour de l'école

À Mathyville, les enfants aiment bien les jeux de réflexion. Ils ont inventé le jeu suivant :

> Un élève dit « le pirate » cache un « Trésor » dans la cour rectangulaire de l'école.
> Ensuite, il donne au joueur une carte au trésor qui indique comment évolue la distance du joueur au trésor lorsque le joueur fait le tour de la cour en restant sur son bord.
> Le joueur doit utiliser ce message pour trouver le Trésor. Le joueur ne peut faire le déplacement à l'intérieur de la cour et doit utiliser seulement ses capacités de réflexion.

Voici un exemple : sur le schéma ci-dessous, le rectangle $DEFG$ représente la cour de largeur 40 pas et de longueur 60 pas et le trésor (T) est placé au milieu de $[EF]$.



Le déplacement imaginaire du joueur (J) se fait sur le bord de ce rectangle, en partant de (D), dans le sens inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre.
Voici les phrases du message qui permet de repérer le Trésor :

> Entre 0 et 80 pas :
> ta distance au trésor T diminue.
> Puis jusqu'à 160 pas :
> ta distance au trésor T augmente.
> Ensuite, jusqu'à 180 pas :
> ta distance au trésor T diminue.
> Enfin, cette distance augmente.

1) Créer le message qui correspond à un Trésor placé en F.

2) Créer le message qui correspond à un Trésor placé au milieu de $[FG]$.

3) Retrouver la position du Trésor indiquée grâce au message suivant :

> Ta distance au trésor T
> - diminue jusqu'à 40 pas,
> - augmente jusqu'à 60 pas,
> - diminue jusqu'à 90 pas,
> - augmente jusqu'à 100 pas,
> - diminue jusqu'à 120 pas,
> - augmente jusqu'à 160 pas,
> - diminue jusqu'à 170 pas,
> - augmente jusqu'à 200 pas.
>
> Où est le Trésor ?

4) Les enfants trouvent que cela fait beaucoup de phrases !
Ils décident de mettre en place un codage qui évite de faire autant de phrases. Voici le codage adopté pour le premier exemple ci-dessus (le Trésor étant situé au milieu de $[EF]$).

Compteur de pas	0		80		160		180		200
Variations de la distance JT		↘		↗		↘		↗	

Proposer, avec ce codage, le message correspondant au second message ci-dessus.

5) Proposer, avec ce codage, le message permettant de trouver le Trésor placé en G.

6) En utilisant le message codé ci-dessous, retrouver la position du Trésor.

Compteur de pas	0		30		60		130		200
Variations de la distance JT		↘		↗		↘		↗	

7) Le professeur de mathématiques, qui passe dans la cour, aperçoit les enfants jouant à ce jeu. Après avoir vu le message ci-dessus, il décide, en lien avec la leçon en cours sur les fonctions, de proposer aux élèves quelques évolutions du message codé et donne en exemple celui de la question 3. Tout d'abord afin de limiter les écritures, il appelle :
- x la valeur indiquée par le compteur de pas ;
- $f(x)$ la distance JT correspondant à une valeur de x
  en faisant remarquer que cette distance est fonction de x.

Ensuite, il propose de compléter le message en portant certaines distances importantes comme ci-dessous (message de la question **3**).
Il prétend que ce sera une aide pour trouver le Trésor : est-ce vrai ?

x	0		40		60		90		100		120		160		170		200
Variations de $f(x)$	50	↘	30	↗	$10\sqrt{13}$	↘	20	↗	$10\sqrt{5}$	↘	10	↗	$10\sqrt{10}$	↘	40	↗	50

8) Recopier, modifier et compléter, en utilisant la méthode du professeur de mathématiques, les deux messages codés des questions 4 et 6.

Cours - Méthodes

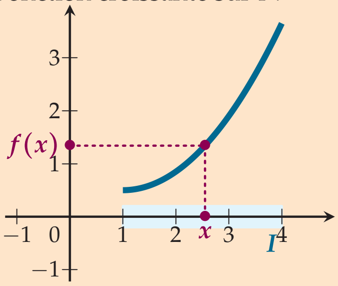
1. D'un point de vue graphique

A. Fonction croissante, décroissante, constante

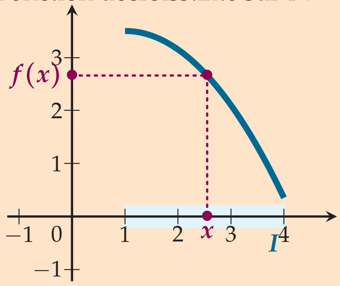
DÉFINITION : Intuitive

- On dit que f est **croissante** sur un intervalle I lorsque :
  si x augmente sur I alors $f(x)$ augmente.
- On dit que f est **décroissante** sur un intervalle I lorsque :
  si x augmente sur I alors $f(x)$ diminue.

Fonction croissante sur I :

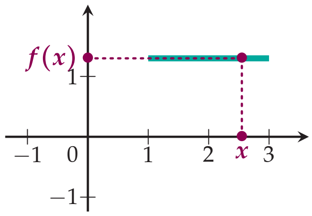


Fonction décroissante sur I :



Remarques : Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On voit sur un graphique que :

- f est croissante sur I lorsque $\mathcal{C}_f$ **« monte »** sur I ;
- f est décroissante sur I lorsque $\mathcal{C}_f$ **« descend »** sur I.
- Lorsque sur un intervalle, la courbe est **horizontale**, on dit que la fonction est **constante**. On considère qu'elle est à la fois croissante et décroissante.
- Une fonction **qui ne change pas de sens de variations** sur un intervalle est dite **monotone** sur cet intervalle.



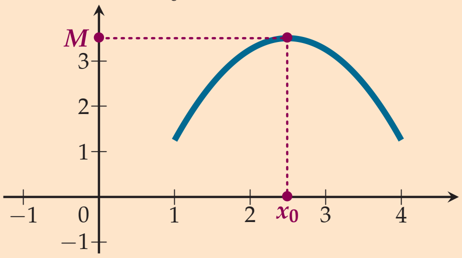
B. Maximum et minimum d'une fonction

DÉFINITION : Intuitive

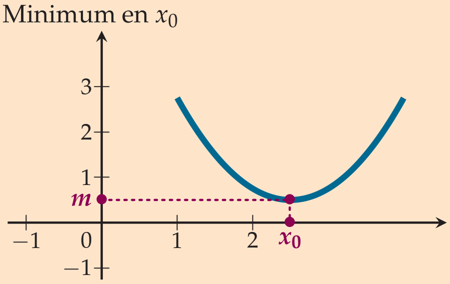
Sur un intervalle I,

- le **maximum** d'une fonction f est la plus grande des valeurs prises par $f(x)$;
- le **minimum** d'une fonction f est la plus petite des valeurs prises par $f(x)$.

Maximum en x_0



Minimum en x_0



DÉFINITION : Tableau de variations

Un **tableau de variations** regroupe toutes les informations concernant les variations d'une fonction sur son domaine de définition.

MÉTHODE 1 Dresser un tableau de variations

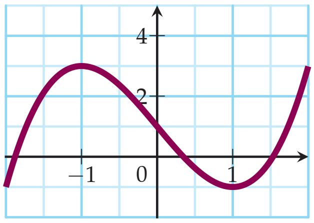
► Ex. 6 p. 121

Un tableau de variations comporte deux lignes.

- Aux extrémités de la 1e ligne, on trouve les **bornes** du domaine de définition de la fonction. Entre les bornes, on place d'**éventuelles** valeurs particulières.
- Le sens de variation de la fonction est indiqué sur la 2e ligne par **une ou plusieurs flèches** sur les intervalles où elle est monotone : ↗ pour croissante et ↘ pour décroissante.
- Les valeurs pour lesquelles la fonction **n'est pas définie** sont indiquées par une double barre verticale sur la deuxième ligne.
- On indique **au bout des flèches** les images des valeurs de la 1re ligne.

Exercice d'application

Dresser le tableau de variations de la fonction définie sur $[-2;2]$ par la courbe ci-dessous.



Correction

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	↗	3 ↘	-1 ↗	

2. D'un point de vue algébrique

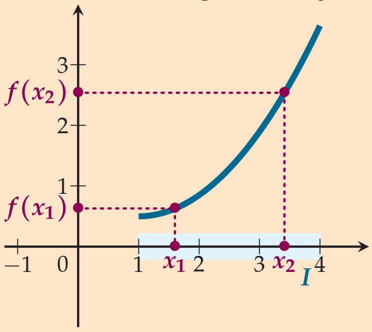
A. Variations d'une fonction

DÉFINITION : Croissance, décroissance sur un intervalle

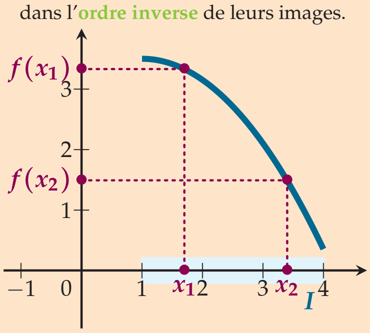
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_1 et x_2 deux nombres de I.

- Si $x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ alors f est dite **croissante** sur I.
- Si $x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ alors f est dite **décroissante** sur I.

f est croissante sur I :
deux nombres de I sont rangés
dans le même ordre que leurs images.



f est décroissante sur I :
deux nombres de I sont rangés
dans l'ordre inverse de leurs images.



PROPRIÉTÉ : Tableau de variations des fonctions affines et de la fonction inverse

Le sens de variation de la fonction affine dépend du signe de a.

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$ avec $a>0$	↗	

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$ avec $a<0$	↘	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

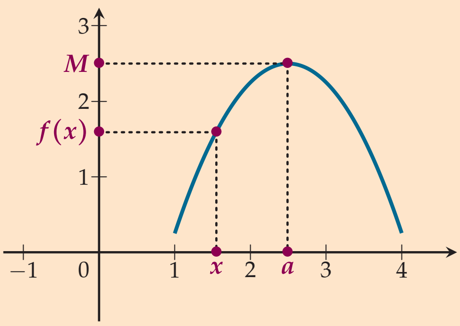
PREUVE

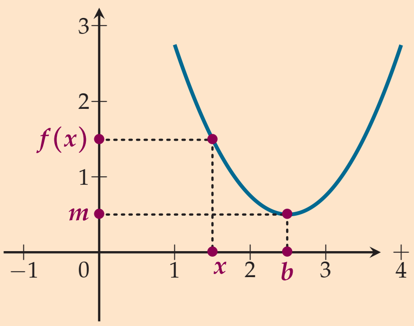
- On considère une fonction f tel que $f(x) = ax+b$ et deux nombres tels que $x_1 < x_2$.
  Si $a < 0$, $ax_1 > ax_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
  Si $a > 0$, $ax_1 < ax_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
- La preuve du sens de variation de la fonction inverse est l'objet de l'exercice 32.

B. Maximum et minimum d'une fonction

DÉFINITION : Maximum, minimum et extremum d'une fonction

- Dire que f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I signifie que :
  Il existe un réel M tel que pour tout x dans I : $f(x) \leqslant M$ et $M = f(a)$.
- Dire que f admet un **minimum** en b sur l'intervalle I signifie que :
  Il existe un réel m tel que pour tout x dans I : $f(x) \geqslant m$ et $m = f(b)$
- Un **extremum** est le terme générique pour désigner un maximum ou un minimum.





PROPRIÉTÉ : Tableau de variations de la fonction carrée

- La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Elle admet, sur $\mathbb{R}$, un minimum en 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

PREUVE La preuve est l'objet de l'exercice 31.

Activités mentales

1 Sans utiliser de calculatrice, comparer :

1) $(-4,5)^2$ et $(-2,5)^2$ **3)** $\dfrac{1}{5^2}$ et $\dfrac{1}{3^2}$

2) $(\sqrt{5})^2$ et $(1,7)^2$ **4)** $(-5)^2$ et $(3,5)^2$

2 Sans utiliser de calculatrice, comparer :

1) $\dfrac{1}{25}$ et $\dfrac{1}{35}$ **3)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) $-\dfrac{1}{41}$ et $-\dfrac{1}{92}$ **4)** $-\dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{1}{3}$

3 Déterminer le sens de variations de chacune des fonctions affines définies ci-dessous :

1) $f_1(x) = -3x + 10$ **3)** $f_3(x) = -3 + 2x$

2) $f_2(x) = \dfrac{x}{2} - 4$ **4)** $f_4(x) = -\dfrac{2x}{7} + \dfrac{3}{5}$

4 Une fonction f possède les propriétés ci-dessous :

- elle est définie sur $[-3;5]$;
- elle est croissante sur $[-3;-1]$;
- elle est décroissante sur $[-1;4]$;
- elle est croissante sur $[4;5]$;
- sur l'intervalle $[-3;4]$, son maximum vaut 6 ;
- sur l'intervalle $[-1;5]$, son minimum vaut -3 ;
- l'image de -3 est 1 ;
- 5 est un antécédent de 7.

Dresser le tableau de variations de cette fonction

5 Une fonction g possède les propriétés ci-dessous :

- elle est définie sur $[-7;4]$;
- elle est décroissante sur $[-7;-3]$;
- elle est croissante sur $[-3;0]$;
- elle est décroissante sur $[0;2]$;
- elle est croissante sur $[2;4]$;
- sur l'intervalle $[-7;0]$, son minimum vaut -5 ;
- sur l'intervalle $[-3;2]$, son maximum vaut 8 ;
- sur l'intervalle $[0;4]$, son minimum vaut -1 ;
- l'image de -7 est 1 ;
- 4 est un antécédent de 6.

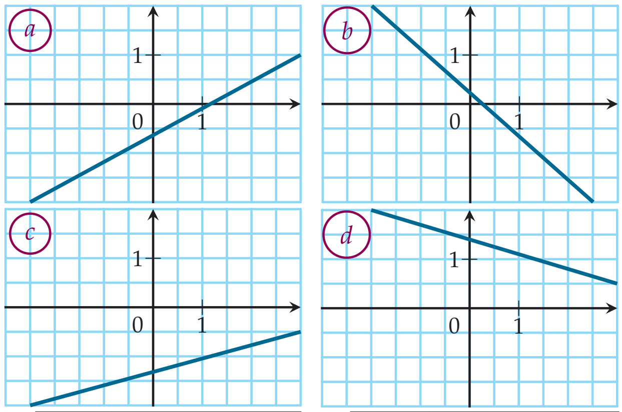
Trouver les erreurs qui se sont glissées dans le tableau de variations de cette fonction :

x	-7		-3		0		2		6
$g(x)$	2	↘	-5	↗	8	↘	-3	↗	4

Point de vue graphique

6 ► MÉTHODE 1 p. 119

Associer chaque courbe à son tableau de variations.



1)

x	-2		3
$f(x)$	2	↘	$0,5$

3)

x	$-2,5$		3
$f(x)$	-2	↗	1

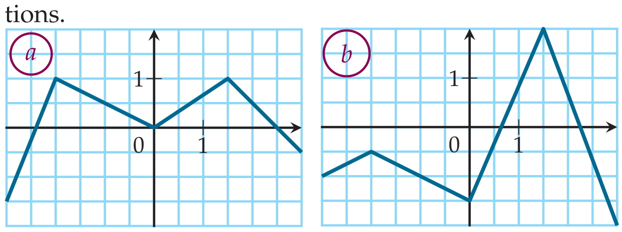
2)

x	$-2,5$		3
$f(x)$	-2	↗	$-0,5$

4)

x	-2		$2,5$
$f(x)$	2	↘	-2

7 Associer chaque courbe à son tableau de variations.



1)

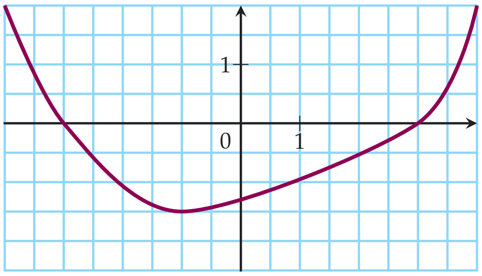
x	-3		-2		0		$1,5$		3
$f(x)$	-1	↗	$-0,5$	↘	$-1,5$	↗	2	↘	-2

2)

x	-3		-2		0		$1,5$		3
$f(x)$	$-1,5$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$-0,5$

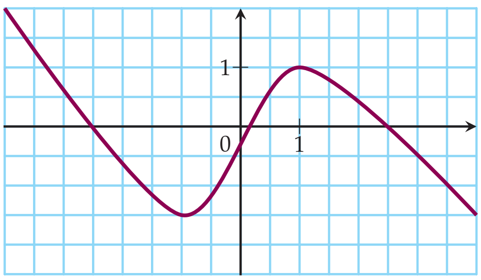
8 Compléter le tableau de variations proposé à partir de représentation graphique ci-dessous.

x	-4		4
$f(x)$	2		2



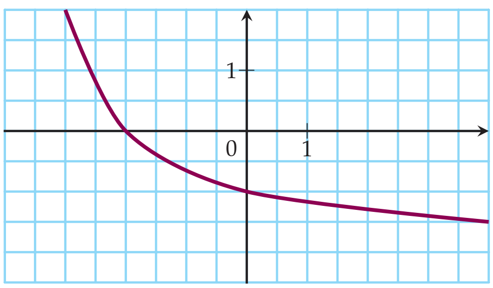
9 Même consigne que l’exercice **8**.

x	-4	$\dots$		$\dots$	$\dots$
$f(x)$	$\dots$	0	$\dots$	1	$-1{,}5$



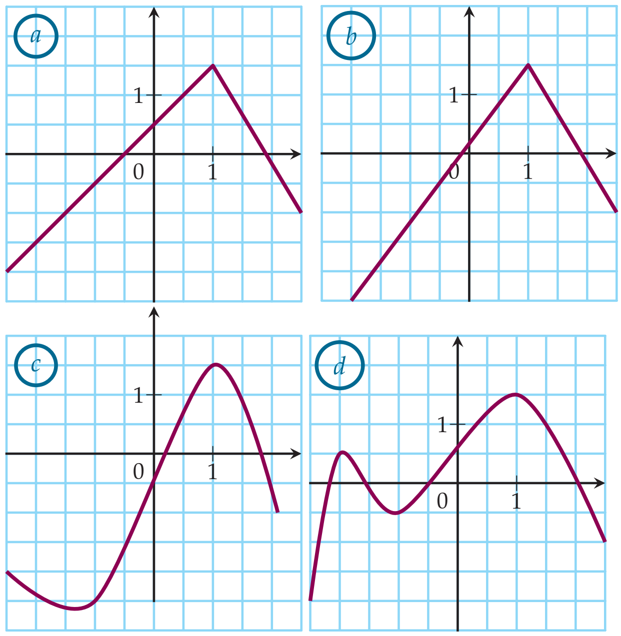
10 Même consigne que l’exercice **8**.

x	-3	$\dots$
$f(x)$		

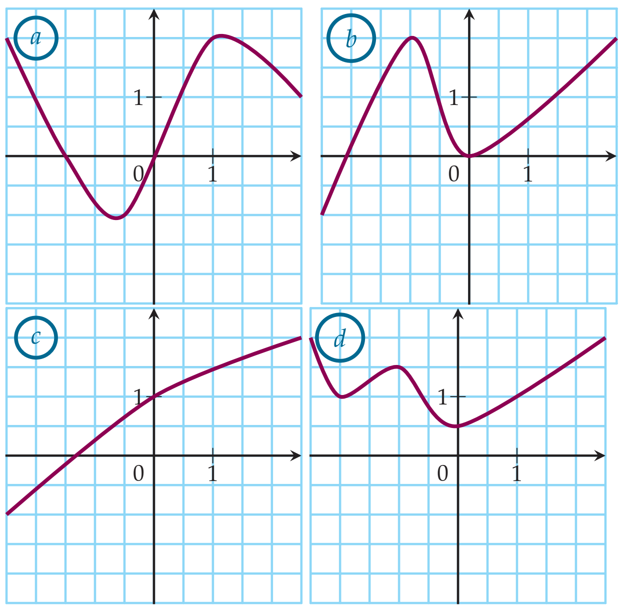


11 Voici le tableau de variations d’une fonction f. Choisir la courbe correspondante à ce tableau.

x	$-2{,}5$	1	$2{,}5$
$f(x)$	-2	$1{,}5$	-1



12 Pour chacune des courbes suivantes, établir le tableau de variations des fonctions représentées.



13 Pour chacune des fonctions suivantes, tracer une représentation graphique sur la calculatrice, puis décrire ses variations et dresser son tableau de variations le plus précisément possible.

1) $f(x) = 4x^3 - 5x + 2,5$ **2)** $g(x) = \dfrac{3x-6}{x+2}$

14 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-4		-1		1		3		$3,5$
$f(x)$	-4	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2) Indiquer le sens de variations de la fonction f.
3) Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
4) Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.

15 Voici des informations concernant une fonction f définie sur l'intervalle $[-1;5]$.

- $f(-1) = f(5) = 0$ • $f(2) = 3$ • $f(4) = -2$
- f est croissante sur $[-1;2]$ et sur $[4;5]$;
- f est décroissante sur $[2;4]$.

1) Dresser le tableau de variations de f.
2) Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.
3) Préciser les extremums éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.

16 Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur $]-\infty;6]$ tels que :

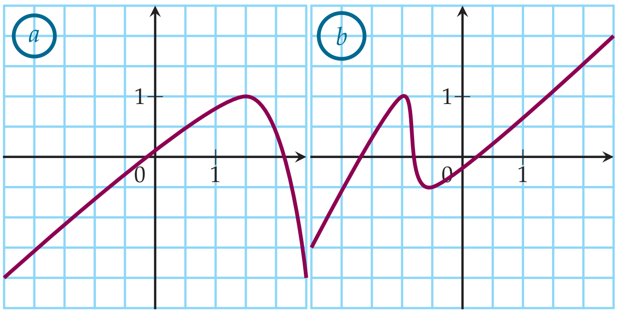
- f est croissante sur $]-\infty;4[$ et décroissante sur $]4;6]$;
- $f(4) = -2$ et l'image de 6 est -6.

17 Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

- décroissante sur $]-\infty;5[$ et sur $]9;+\infty[$;
- croissante sinon ;
- elle coupe l'axe des abscisse en 4 et 11 ;
- elle atteint un maximum relatif en 9.

18 **Relatif ou absolu ?**

Pour chacune des courbes suivantes :
1) déterminer si la fonction représentée admet un maximum absolu et/ou relatif ;
2) dresser le tableau de variations.



19 Pour chaque tableau de variations ci-dessous, déterminer si la fonction représentée admet :

- un maximum et/ou un minimum ;
- absolu et/ou relatif.

1)

x	$-\infty$		0		9
$f(x)$		$\searrow$	$+8$	$\nearrow$	

2)

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	-10	$\nearrow$	8	$\searrow$	

3)

x	$-\infty$		-2		7		$+10$
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	-30	$\nearrow$	7

4)

x	$-\infty$		15		$+\infty$
$m(x)$		$\nearrow$	25	$\searrow$	

5)

x	1		$+\infty$
$p(x)$	-5	$\nearrow$	

S’entraîner

Point de vue algébrique

20 **Tableaux incorrects**

Les tableaux de variations suivants comportent des erreurs. Lesquelles ? Justifier.

x	-10		-2		0		$7{,}5$
$f(x)$		↗	2	↘	$\dfrac{10}{3}$	↗	8

x	-10		-5		2
$g(x)$	7	↗	-6	↗	9

21 **Vrai ou faux ?**

Voici le tableau de variations d’une fonction f.

x	3		5		6		10
$f(x)$	4	↗	9	↘	-4	↗	1

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas conclure. Justifier.

1) $f(3) < f(4)$

2) $f(4,9) > f(5,9)$

3) $f(5,1) < f(5,9)$

4) $f(10) > f(3)$

5) f est définie sur $[-2; 10]$;

6) 5 est le maximum de f sur $[3; 10]$;

7) f admet un minimum absolu en 3 sur sur $[3; 10]$;

8) $f(x)$ appartient à $[-4; 9]$.

22 **Comparaisons à l’aide d’un tableau**

x	-2		0		3		4
$f(x)$	-1	↗	$\dfrac{5}{2}$	↘	-1	↗	6

Comparer si possible les nombres suivants.

1) $f(-2)$ et $f(-1)$

2) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

3) $f(-1)$ et $f(1)$

4) $f(3,6)$ et $f(3,7)$

5) $f\left(\dfrac{7}{2}\right)$ et $f(4)$

6) $f(1)$ et $f(3,5)$

23 Soit f une fonction définie sur $[-2; 5]$ telle que :

- $f(-2) = 2$ • $f(2) = -3$ • $f(5) = 0$
- f est décroissante sur $]-2; 2[$ et croissante sinon ;
- f admet un minimum en 2 égal à -3.

1) Encadrer $f(x)$ quand :

a) $x \in]-2; 2[$ **b)** $x \in]3; 4[$

2) Si $x \in [-2; 5]$, que peut-on dire de $f(x)$?

3) Quels sont les extrema de f ?

24 Comparer les nombres suivants sans les calculer.

1) $(-0,7)^2$ et $(-0,082)^2$

2) $(2-\pi)^2$ et $(\pi+1)^2$

3) $(\pi-1)^2$ et 16

4) $(-1,25)^2$ et $2,25^2$

25 Sans utiliser de calculatrice, comparer :

1) $\sqrt{0,02}$ et $\sqrt{0,005}$

2) $17\sqrt{2}$ et 24

3) $5\sqrt{7}$ et $4\sqrt{11}$

4) $-\sqrt{21}$ et $-\sqrt{14}$

26 Comparer les nombres suivants sans les calculer.

1) $-\dfrac{1}{2,05}$ et $-\dfrac{1}{1,95}$

2) $\dfrac{1}{5+\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{5-\sqrt{2}}$

27 Quelles sont les inégalités vérifiées par $\dfrac{1}{x}$ quand :

1) $2 < x < 5$

2) $-7 < x < -1$

3) $0 < x < 3$

4) $x \in [-2; 0[\cup]0; 3[$

28 Donner un encadrement de x quand :

1) $1 < \dfrac{1}{x} < 3$

2) $-4 < \dfrac{1}{x} < -2$

3) $\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{7}{6}$

4) $-2 < \dfrac{1}{x} < 0$

29 **Fonctions affines**

Décrire les variations des fonctions suivantes.

1) $f(x) = -2x + 13$

2) $g(x) = \dfrac{1}{2}x - 4$

3) $l(x) = \left(\sqrt{5} - 3\right) x + 4$

4) $j(x) = \dfrac{-7x - 5}{3}$

30 On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2$.

1) Conjecturer le sens de variation de la fonction f.

2) Démontrer que $f(b) - f(a) = (b-a)(a+b-4)$.

3) On suppose que $a < b < 2$.

a) Quel est le signe de $b - a$?

b) Comparer $a + b$ et 4 puis $f(b)$ et $f(a)$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty; 2[$.

4) On suppose que $2 < a < b$.

Quel est le sens de variation de la fonction f ?

5) La fonction f admet-elle un extremun ? Lequel ?

31 **Variations de la fonction carrée**

Le but de cet exercice est de démontrer les variations de la fonction carrée.

1) Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$.

Recopier et compléter :

- $a < b$ donc $a^2 \ \ldots \ ab$
- $a < b$ donc $ab \ \ldots \ b^2$
- soit : $a^2 \ \ldots \ b^2$.
- donc la fonction carrée est $\ \ldots\ $ sur $[0\,;+\infty[$

2) Démontrer de même, les variations de la fonction carrée sur $]-\infty;0]$ en prenant cette fois a et b deux réels négatifs tels que $a < b$.

3) Établir le tableau de variations de la fonction carrée.

32 **Variations de la fonction inverse**

Le but de cet exercice est de démontrer les variations de la fonction inverse.

1) Soit a et b strictement positifs avec $a < b$.

a) Montrer que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$.

b) Quel est le signe de $b - a$?

c) Quel est le signe de ab ?

d) En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Soit a et b strictement négatifs avec $a < b$.

a) Quel est le signe de $b - a$?

b) Quel est le signe de ab ?

c) En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{-*}$.

33 On considère le tableau de variations de la fonction g définie sur $[-5;8]$.

x	-5		0		1		3		8
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	-5

Dire si chacune des affirmations suivantes est **vraie**, **fausse** ou si **l'on ne peut pas conclure**.

1) 0 a pour image 3 ;

2) 0 a deux antécédents ;

3) $g(-4) \geqslant g(-3)$

4) $g(-2) \geqslant g(0,5)$

5) le maximum de g sur $\left[-5;\dfrac{1}{2}\right]$ est 1

6) Si $a \in [-5;1]$ alors $g(a) \geqslant 0$

7) Si $g(a) \geqslant 0$ alors $a \in [-5;1]$

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$.

1) Conjecturer les variations de la fonction f.

2) a) Recopier et compléter le programme de calcul.

$$x \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{1}{x^2+4}$$

b) Recopier et compléter le raisonnement.

Soient a et b deux nombres positifs tels que $a < b$.

$$\begin{array}{lll} a < b & \Longrightarrow a^2 \ldots b^2 & \text{car} \ldots \\ & \Longrightarrow a^2+4 \ldots b^2+4 & \text{car} \ldots \\ & \Longrightarrow \dfrac{1}{a^2+4} \cdots \dfrac{1}{b^2+4} & \text{car} \ldots \end{array}$$

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}^-$.

35 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$f(x) = \dfrac{3x-5}{-x+2}$.

1) Conjecturer les variations de la fonction f sur $]-\infty;2[$ puis sur $]2;+\infty[$.

2) a) Vérifier que, pour $x \neq 2$, $f(x) = -3 + \dfrac{1}{-x+2}$.

b) Recopier et compléter le programme de calcul.

$$x \longrightarrow -x+2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots$$

c) Justifier que la fonction affine $x \mapsto -x+2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) Démontrer que f est croissante sur $]2;+\infty[$.

3) Démontrer que f est croissante sur $]-\infty;2[$.

36 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{3x^2+4}{x^2+1}$.

1) a) Conjecturer le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Pour quelle valeur de x semble-t-il atteint ?

b) f semble-t-elle avoir un minimum ?

2) a) Vérifier que : $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

b) Compléter le programme de calcul ci-dessous.

$$x \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots \longrightarrow 3 + \frac{1}{x^2+1}.$$

c) Compléter le raisonnement suivant.

$$\begin{array}{lll} 0 \leqslant x^2 & \Longrightarrow \cdots \leqslant x^2+1 & \\ & \Longrightarrow 1 \ldots \dfrac{1}{x^2+1} & \text{car} \ldots . \\ & \Longrightarrow 4 \ldots 3 + \dfrac{1}{x^2+1} & \end{array}$$

d) Calculer $f(0)$. Que vient-on de démontrer ?

3) 3 est-il un minimun de f sur $\mathbb{R}$?

Approfondir

37 Logique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 1$.
Que penser des affirmations suivantes ? Argumenter.

1) Émilie affirme que f est croissante sur $[-3; -1]$.
2) Jean calcule $f(0)$ et $f(3)$ et vérifie que $f(3) > f(0)$.
   Il conclut alors que f est croissante sur $[0; 3]$.
3) Renée affirme que 4 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$.

38 Calcul formel

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 2$.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

$factoriser(-x\hat{}2 + 4x - 4)$
$-(x-2)\hat{}2$

1) Conjecturer la valeur du maximum de f sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $f(x) - 6$.
3) Justifier que le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est bien 6.

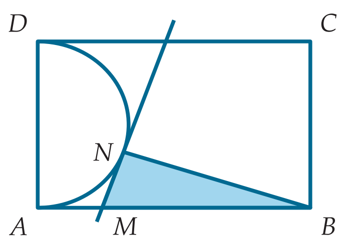
39 Cercle et triangle INFO

On considère une rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ cm et $BC = 3$ cm. On place un point M libre sur $[AB]$.
À l'intérieur du rectangle, on construit le demi-cercle de diamètre $[AM]$ et le triangle MBC.

1) Comment varie l'aire de la figure composée du demi-cercle et du triangle en fonction de la position de M ?
2) Atteint-elle un maximum ? Un minimum ?
   Si oui, préciser pour quelle position de M.

40 Cercle et rectangle INFO

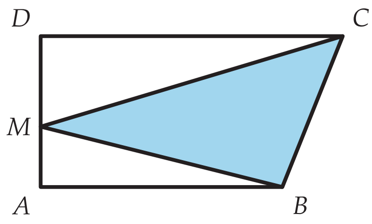
On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ cm et $AD = 4$ cm. À l'intérieur, on construit le demi-cercle de diamètre $[AD]$ sur lequel on place N un point libre.
La tangente en point N au demi-cercle coupe $[AB]$ en un point M .



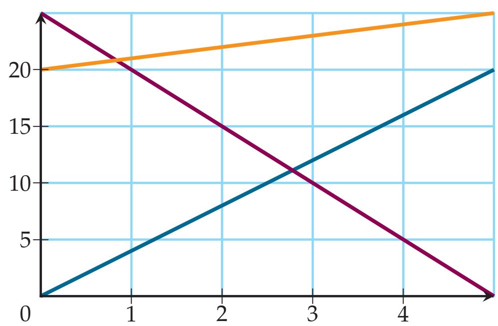
1) Étudier les variations de l'aire du triangle BMN en fonction de la distanceAM.
2) Admet-elle un maximum ? Un minimum ?
   Préciser la position du point M.

41 Un trapèze

On considère un trapèze rectangle $ABCD$, comme sur la figure ci-dessous. On place un point libre M sur le segment $[AD]$.



La distance AM en cm est notée x.
On a représenté les graphiques des trois fonctions donnant, en fonction de x, l'aire des triangles ABM, BCM et DCM.



1) À quelle aire correspond chacun des graphiques ? Justifier.
2) Retrouver les expressions des fonctions représentées.
3) En déduire les longueurs de chaque côté du trapèze.

42 Bénéfice optimum

Un artisan fait une étude sur la vente de sa production de vases. Il en fabrique entre 0 et 60 et estime que le coût de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$.
On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués. Un vase est vendu à 50 €.

1) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2) Calculer le coût et la recette réalisés lorsque l'artisan vend 50 vases.
3) Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est :
   $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
4) a) Développer l'expression : $-(x-30)^2 + 400$.
   b) En déduire le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximum.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

À partir de la courbe représentative d'une fonction :
- déterminer son sens de variations
- établir son tableau de variations

À partir du tableau de variations d'une fonction :
- proposer une (ou des) courbe(s) représentative(s)
- déterminer les extrema sur un intervalle
- comparer les images de deux nombres par une fonction

Fonctions de référence
- Pour une fonction affine :
  - déterminer et utiliser son sens de variation
  - dresser son tableau de variations
- Pour une fonction inverse ou une fonction carré :
  - connaître et utiliser leurs variations
  - connaître leurs tableaux de variations

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes. (ONPPS signifie On Ne Peut Pas Savoir.)

On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-6		-2		-1		2		4
Variations de $f(x)$	3	↘	-5	↗	2	↘	-1	↗	0

43 On a :

ⓐ $f(-1,9) < f(-1,5)$ ⓑ $f(-1,9) > f(-1,5)$ ⓒ on ne peut pas savoir

44 On a :

ⓐ $f(-3) \leqslant f(-1,5)$ ⓑ $f(-3) \geqslant f(-1,5)$ ⓒ on ne peut pas savoir

45 On a :

ⓐ $f(0,5) > f(1)$ ⓑ $f(0,5) < f(1)$ ⓒ on ne peut pas savoir

46 On a :

ⓐ $f(3,5) \geqslant f(2,5)$ ⓑ $f(3,5) \leqslant f(2,5)$ ⓒ on ne peut pas savoir

47 si $x \in [-1;4[$ on a :

ⓐ $f(x) \leqslant f(-1)$ ⓑ $f(x) \geqslant f(-1)$ ⓒ on ne peut pas savoir

48 si $x \in]-6;-1]$ on a :

ⓐ $f(3) < f(x)$ ⓑ $f(3) > f(x)$ ⓒ on ne peut pas savoir

On rappelle, ci-contre, le tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de $\frac{1}{x}$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

49 La double barre du tableau signale que la fonction inverse :

(a) admet un maximum en 0 (b) admet un minimum en 0 (c) ne peut donner une image à 0

50 Sans calculer, on peut dire que les inverses de -3 et de -2 sont rangés dans :

(a) le même ordre que -3 et -2 (b) l'ordre inverse de -3 et -2 (c) inconnu sans calcul

51 Sans calculer, on peut dire que les inverses de $0,25$ et de $0,5$ sont rangés dans :

(a) le même ordre que $0,25$ et $0,5$ (b) l'ordre inverse de $0,25$ et $0,5$ (c) inconnu sans calcul

52 Sans calculer, on peut dire que les inverses de -5 et de 2 sont rangés dans :

(a) le même ordre que -5 et 2 (b) l'ordre inverse de -5 et 2 (c) inconnu sans calcul

On rappelle, ci-contre, le tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

53 Sans calculer, on peut dire que les carrés de -5 et de -3 sont rangés dans :

(a) le même ordre que -5 et -3 (b) l'ordre inverse de -5 et -3 (c) inconnu sans calcul

54 Sans calculer, on peut dire que les carrés de $0,1$ et de $0,7$ sont rangés dans :

(a) le même ordre que $0,1$ et $0,7$ (b) l'ordre inverse de $0,1$ et $0,7$ (c) inconnu sans calcul

55 Sans calculer, on peut dire que les carrés de -6 et de 1 sont rangés dans :

(a) le même ordre que -6 et 1 (b) l'ordre inverse de -6 et 1 (c) inconnu sans calcul

56 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 7$ admet :

(a) Aucune solution (b) une solution (c) deux solutions (d) ONPPS

57 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -5$ admet :

(a) Aucune solution (b) une solution (c) deux solutions (d) ONPPS

58 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 0$ admet :

(a) Aucune solution (b) une solution (c) deux solutions (d) ONPPS

On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-6		-2		-1		3		7
Variations de $f(x)$	7	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

59 Sur l'intervalle $[-2; 4]$, le maximum de la fonction f est :

a) 2 b) -1 c) 0 d) ONPPS

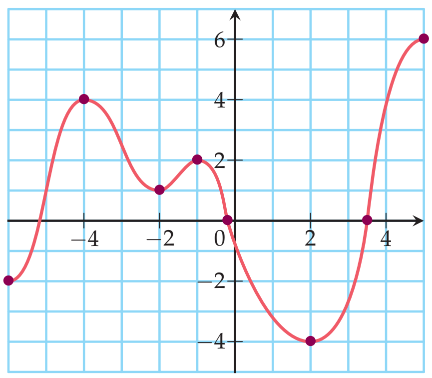
60 Sur l'intervalle $[-5; -3]$, la fonction est :

a) monotone b) croissante c) décroissante d) ONPPS

61 La fonction f est croissante sur :

a) $[3; 7]$ b) $[0; 1]$ c) $[2,1; 2,5]$ d) $[-1,5; -1] \cup [4,5; 7]$

Voici la courbe représentative d'une fonction f.



62 Sur $[-6; 2]$, le maximum de f est :

a) -4 b) -1 c) -2 d) 4

63 Sur $[-6; 5]$, -4 est :

a) un minimum relatif c) un maximum relatif
b) un minimum absolu d) un maximum absolu

64 La fonction f est croissante sur :

a) $[-4; -2]$ b) $[-6; -4]$ c) $[3; 4]$ d) $[0; 1]$

65 Quel tableau de variations correspond à cette courbe ?

a)

x	-6		-4		-2		-1		2		5
Variations de $f(x)$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	6

b)

x	-6		-4		-2		-1		$3{,}5$		5
Variations de $f(x)$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	6

Travaux pratiques

TP 1 inspiré par *Romeo and Juliet*, de William Shakespeare

INFO

Roméo et Juliette sont tombés amoureux.
Mais leur parents sont ennemis et refusent qu'ils se voient.
Juliette se désespère assise sur un banc dans le jardin des Capulet à l'ombre d'un mur couvert d'un rosier grimpant.
Roméo l'aperçoit au loin et voudrait la consoler le plus rapidement possible tout en lui cueillant une rose en chemin.

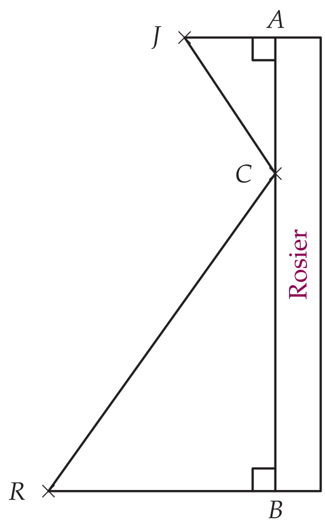
1 Première étude : modélisation en géométrie dynamique

1) Reproduire la figure ci-contre à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
Le point J représente Juliette et le point R Roméo.
Le segment $[AB]$ représente le mur couvert du rosier grimpant. Le point C, mobile sur ce segment, représente l'endroit où Roméo devra cueillir la rose.

- $AB = 6$
- $JA = 2$
- $RB = 5$
- (JA) et (RB) sont perpendiculaires à (AB)
- C est un point libre sur le segment $[AB]$

2) Grâce aux fonctionnalités du logiciel, décrire comment varie la longueur du trajet $RC + CJ$ en fonction de la position du point C sur le segment $[AB]$.

3) Conjecturer où doit être situé le point C pour que ce trajet soit le plus court possible.



2 Étude mathématique

Dans cette partie, on pose $x = AC$ et on étudie la fonction $f(x)$ qui, à x, associe le chemin parcouru par Roméo c'est-à-dire la longueur $RC + CJ$ sur le schéma.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2) Donner une expression algébrique de la fonction f.

3) À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un tableur, déterminer une approximation à 10^{-2} près de la position du point C qui minimise le trajet $RC + CJ$.

4) Comparer avec le résultat conjecturé dans la partie 1.

3 Recherche de la valeur exacte

Dans cette partie, on détermine géométriquement la position du point C.

1) Reproduire la figure et y placer le point R', symétrique du point R par rapport au point B.
On appelle I l'intersection des segments $[AB]$ et $[R'J]$.

2) Justifier que $RI + IJ = R'I + IJ$.

3) Expliquer pourquoi I minimise la longueur $RC + CJ$ pour C mobile sur $[AB]$.

4) Quel théorème étudié au collège peut s'utiliser dans les triangles AIJ et BIR' ?

5) Calculer AC et comparer avec la valeur trouvée dans la partie 2.

TP 2 On inverse

INFO

1 Mais quelle est cette courbe ?

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

1) Construire les points suivants dans le repère du logiciel : $O(0;0)$, $I(1;0)$ et $A(0;-2)$.

2) Placer un point libre M sur la droite (OI).

3) Tracer la parallèle à la droite (MA) passant par I. Elle coupe l'axe des ordonnées au point N.

4) Placer le point H tel que le quadrilatère $OMHN$ soit un rectangle.

5) À l'aide de l'option `trace`, conjecturer la nature de la courbe sur laquelle se déplace H, lorsque M se déplace sur la droite (OI) ? Quelle fonction représente-t-elle ? Justifier.

2 Ça varie...

On note f la fonction de la première partie. On se propose d'étudier ses variations.
Soient a et b deux nombres réels non nuls, tels que $a < b$.

1) Justifier que comparer $f(a)$ et $f(b)$ revient à étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

2) Exprimer $f(b) - f(a)$ sous la forme d'un produit ou d'un quotient.

3) Soient $a > 0$ et $b > 0$ avec $a < b$. Quel est le signe de $b - a$ et ab ?

4) En déduire le signe de $f(a) - f(b)$. Quel est le sens de variations de f sur $]0\,;+\infty[$?

5) Refaire l'étude avec $a < 0$, $b < 0$ et $a < b$ puis dresser le tableau de variations complet de f.

TP 3 Le long d'un quart de cercle

INFO

1 Conjecture

Ouvrir un logiciel de géométrique dynamique.

1) Placer trois points A, B et C tel que ABC soit rectangle isocèle en A. Tracer le petit arc de cercle de centre A d'extrémités B et C. Le point M est un point libre sur cet arc. Placer le point N, pied de la perpendiculaire à (AB) passant par M ainsi que le point P, pied de la perpendiculaire à (AC) passant par M.

2) Conjecturer la position du point M pour laquelle l'aire du rectangle $ANMP$ est maximale.

2 Affinage

Dans le repère $(A; B, C)$, on note x la longueur AN et $f(x)$ l'aire du rectangle $ANMP$.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2) Sur la figure, créer un point R dont l'abscisse est égale à la longueur AN et dont l'ordonnée est égale à l'aire du rectangle $ANMP$. Sur quel objet géométrique se déplace le point R ?

3) Dresser alors le tableau des variations de la fonction f et faire une conjecture en utilisant la précision permise par le logiciel.

3 Démonstration

1) Exprimer la distance NM en fonction de x. En déduire une expression de $f(x)$.

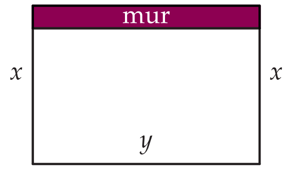
2) Montrer que $f(x) = \sqrt{x^2(1-x^2)}$. En déduire que $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}$.

3) Expliquer pourquoi $f(x)$ est maximal lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$. En déduire la réponse au problème et comparer avec les conjectures précédentes.

Travaux pratiques

TP 4 La grange

Contre le mur de sa grange, un fermier veut construire un enclos grillagé rectangulaire suivant le schéma ci-contre. Le 4e côté est une partie du mur. Il dispose pour cela de quarante mètres de grillage pour clore trois côtés du rectangle et obtenir un enclos d'aire maximale.



1) Montrer que l'aire $\mathcal{A}(x)$ de l'enclos en fonction de x est égale à $\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 40x$.
2) Tracer la courbe de la fonction $\mathcal{A}$ à la calculatrice sur l'intervalle $[0;20]$.
3) En déduire le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.
4) Montrer que $\mathcal{A}(x)$ est maximale lorsque la longueur est égale au double de sa largeur.
5) À l'aide de la calculatrice, donner l'ensemble des nombres x pour lesquels $\mathcal{A}(x) \leqslant 72$.

Récréation, énigmes

Les dimensions magiques

Dans le commerce, les boîtes de conserve cylindrique de même contenance ont toutes les mêmes dimensions. Comment ces dimensions ont-elles été choisies ?
Hasard ou stratégie ?

Partie A : un peu de calcul littéral

On considère une boite de conserve de hauteur h et de rayon r.
1) Exprimer le volume $\mathcal{V}$ d'un cylindre de hauteur h et dont le rayon de la base est r.
2) En déduire une expression de h en fonction de $\mathcal{V}$ et r.
3) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ de ce cylindre en fonction de h et de r ?
4) En remplaçant h par l'expression trouvée précédemment, exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de $\mathcal{V}$ et r.

Partie B : du concret

Dans le commerce, on trouve des boîtes de conserve de $212\,\text{cm}^3$, $425\,\text{cm}^3$ et $850\,\text{cm}^3$.

1) Donner l'expression des trois fonctions qui, au rayon de la base de la boîte de conserve, associent l'aire de la boîte pour les trois volumes proposés.
Les nommer $\mathcal{A}_{212}$, $\mathcal{A}_{425}$ et $\mathcal{A}_{850}$.
2) Utiliser la calculatrice ou un tableur pour tracer dans un même repère ces trois fonctions.
3) Déterminer le minimum pour chacune des trois fonctions au dixième près.
Relever leur antécédent et les nommer r_{212}, r_{425} et r_{850}.
(Si besoin dresser un tableau de valeurs pertinent).
4) En reprenant l'expression de h en fonction de r et $\mathcal{V}$ de la première partie, calculer la hauteur correspondante pour chacun des trois volumes étudiés et des trois rayons déterminés.
5) À votre avis, quels objectifs ont sous-tendu le choix des dimensions des boîtes de conserve cylindriques ?

FONCTIONS

4

Factorisation et étude de signes

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

Résoudre
- une équation de type $ax + b = 0$
- une équation produit
- une inéquation de type $ax + b > 0$
- Représenter les solutions sur un axe gradué

Factoriser
- avec les identités remarquables
- avec un facteur commun évident

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $2x - 3 = 0$
2) $2x + 3 = -7$
3) $8x + 7 = 10x - 2$

2 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $(2x + 7)(5x + 4) = 0$
2) $(3 - 2x)(-3x - 7) = 0$

3 Reproduire quatre fois la droite.

1) Hachurer les solutions de $x \leqslant 4$.
2) Hachurer les solutions de $x < 4$.
3) Hachurer les solutions de $x \geqslant -2$.
4) Hachurer les solutions de $x > -2$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $4x - 5 \geqslant 0$
2) $2x + 9 < 5x - 4$

5 Factoriser les expressions suivantes.

1) $x^2 - 2x + 1$
2) $25x^2 + 60x + 36$
3) $49x^2 - 64$
4) $(x - 2)^2 - 9$

6 Factoriser les expressions suivantes.

1) $4x - 8$
2) $7x^2 - 2x$
3) $3x + 3$
4) $(2x + 1)(3x - 4) + (3x - 4)(5x + 3)$

Voir solutions p. 259

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Souvent signe varie

On considère les expressions suivantes :

- x^2
- $\sqrt{x}$
- $\dfrac{1}{x}$
- x^3
- x
- $-x$

1) Soit x un nombre réel non nul. Parmi les expressions proposées, lesquelles sont positives ?

2) Soit x un nombre strictement positif.

a) Quelles sont les expressions positives lorsqu'elles sont définies ?

b) Quelles sont les expressions négatives lorsqu'elles sont définies ?

3) Soit x un nombre strictement négatif.

a) Quelles sont les expressions positives lorsqu'elles sont définies ?

b) Quelles sont les expressions négatives lorsqu'elles sont définies ?

4) Utiliser ces résultats pour associer chaque tableau de signes à l'expression qui correspond.

a)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\cdots$		$-$	$\Vert$	$+$	

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$\cdots$		$+$	

e)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\cdots$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\cdots$		$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\cdots$		$+$	0	$-$	

f)

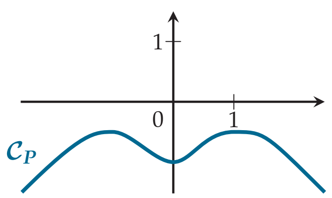
x	0		$+\infty$
$\cdots$		$+$	

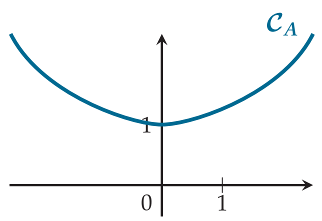
DÉBAT 2 Les amis de mes amis sont mes amis

On considère le programme suivant :

1) choisir une fonction F_1 de la variables x ;
2) choisir une fonction F_2 de la variables x ;
3) calculer $A(x) = F_1(x) + F_2(x)$;
4) calculer $P(x) = F_1(x) \times F_2(x)$.

1) Malik a choisi deux fonctions F_1 et F_2 puis il a représenté A et P dans un repère.
Peut-on déterminer les signes de F_1 et F_2 ?

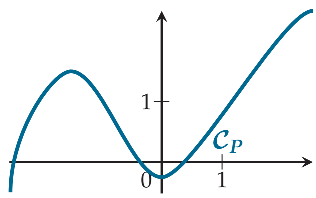




2) Coralie représente la fonction P qu'elle a obtenue.

a) Quels sont les signes possibles de F_1 et F_2 ?

b) Peut-on déterminer le signe de la fonction A qu'elle a obtenue ?



ACTIVITÉ 3 Signe d'un produit, d'un quotient

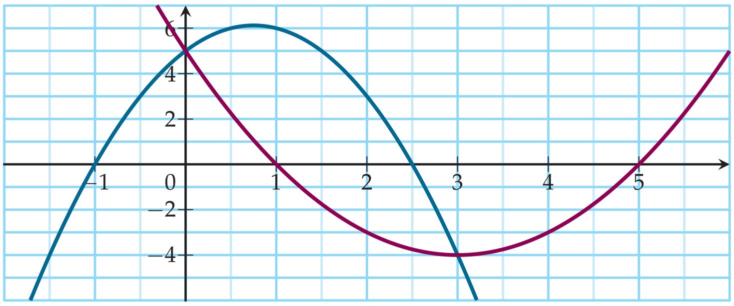
On représente sur le graphique les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$
- $g(x) = x^2 - 6x + 5$

On considère les fonctions h, k et l définies par

- $h(x) = (-2x^2 + 3x + 5)(x^2 - 6x + 5)$
- $l(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{-2x^2 + 3x + 5}$
- $k(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x + 5}{x^2 - 6x + 5}$

À l'aide du graphique, étudier les signes de $h(x)$, $l(x)$ et $k(x)$.



ACTIVITÉ 4 Tableau de signes

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.

a) Pour quelles valeurs de x, $f(x)$ est-il un nombre :

- nul ;
- positif ;
- négatif ;

b) Regrouper ces informations dans un tableau de signes.

2) g est une fonction affine qui s'annule en $-\dfrac{5}{2}$.

a) Existe-t-il plusieurs fonctions ayant ce critère ? Pourquoi ?

b) Déterminer la fonction g telle que $g(0) = 5$.

c) Établir son tableau de signes.

3) On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (-2x + 3)(2x + 5)$.

a) Quels doivent être le signe de $-2x + 3$ et de $2x + 5$ pour que $P(x)$ soit positif ?

b) Compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
$-2x + 3$					0		
$2x + 5$			0				
$P(x)$				$+$		$-$	

4) On considère la fonction Q définie par $Q(x) = \dfrac{-2x + 3}{2x + 5}$.

a) Est-ce que la fonction est définie pour tout nombre réel ?

b) Déterminer le domaine de définition de la fonction Q.

c) Peut-on utiliser le tableau de signes de P pour étudier le signe la fonction Q ?

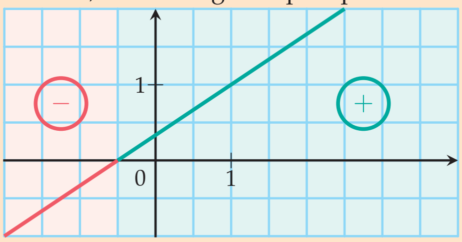
Cours - Méthodes

1. Signe d'une fonction affine

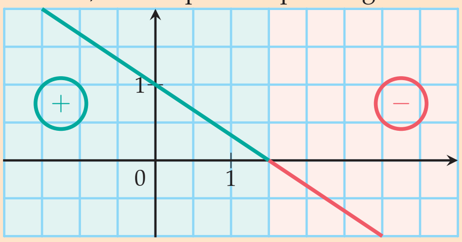
PROPRIÉTÉ

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.
La **fonction affine** définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ s'annule et change de signe une fois dans son domaine de définition pour $x = -\dfrac{b}{a}$.

Si $a > 0$, elle est négative puis positive.



Si $a < 0$, elle est positive puis négative.



PREUVE Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.
$f(x) = 0$ implique $ax + b = 0$ soit $ax = -b$ et $x = -\dfrac{b}{a}$.

Si $a > 0$, la fonction f est croissante.

- Pour $x < -\dfrac{b}{a}$, $f(x) < f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or, $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) < 0$.
- Pour $x > -\dfrac{b}{a}$, $f(x) > f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or, $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) > 0$.

Donc f est négative sur $]-\infty; -b/a[$ puis positive sur $]-b/a; +\infty[$.

Si $a < 0$, la fonction f est décroissante.

- Pour $x < -\dfrac{b}{a}$, $f(x) > f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or, $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) > 0$.
- Pour $x > -\dfrac{b}{a}$, $f(x) < f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or, $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) < 0$.

Donc f est positive sur $]-\infty; -b/a[$ puis négative $]-b/a; +\infty[$.

MÉTHODE 1 Dresser le tableau de signes d'une fonction affine

► Ex. 18 p. 141

Le tableau de signes d'une fonction affine comporte deux lignes.
Sur la **première ligne** on indique les bornes du domaine de définition de la fonction et la valeur qui annule la fonction.
Sur la **deuxième ligne**, par des pointillés verticaux sous la valeur qui annule, on crée deux cases dans lesquelles on indique le signe de la fonction.

Exercice d'application

Dresser le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto -3x + 4$.

Correction

Le coefficient directeur, -3, est négatif donc g est décroissante.
Recherche de la valeur qui annule :

$-3x + 4 = 0$ soit $x = \dfrac{-4}{-3}$ soit $x = \dfrac{4}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$	0	$-$	

2. Factorisation

Remarque : En classe de seconde, on a déjà des outils pour factoriser une grande partie des polynômes de degré 2. D'autres outils seront étudiés en Première. En Terminale, dans certaines séries, toutes les expressions seront factorisables.

MÉTHODE 2 Factoriser une expression littérale

► Ex. 30 p. 142

Soit a, b, k trois nombres réels.

- Si un facteur est **apparent**, on utilise : $ka + kb = k(a+b)$.
- Si un facteur **n'est pas apparent**, on utilise les identités remarquables :

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $\quad$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ $\quad$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

Exercice d'application

Factoriser les expressions suivantes :

1) $4ac - 6ab$
2) $(x-2)(5x-1) + (2x+7)(x-2)$
3) $x^2 - 6x + 9$
4) $36x^2 - 81$

Correction

1) $4ac - 6ab = 2a(2c - 3b)$
2) $(x-2)(5x-1) + (2x+7)(x-2)$
$= (x-2)\left((5x-1) + (2x+7)\right)$
$= (x-2)(7x+6)$
3) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x-3)^2$
4) $36x^2 - 81 = (6x)^2 - 9^2 = (6x+9)(6x-9)$

3. Signe du produit de deux fonctions affines

MÉTHODE 3 Étudier le signe du produit de deux fonctions affines

► Ex. 34 p. 142

Pour déterminer le signe du produit de deux fonctions affines, on construit un tableau de signes à 4 lignes.

1) La **1e ligne** indique les bornes de l'ensemble de définition et les valeurs qui annulent le produit des deux fonctions affines.
2) Les **2e et 3e lignes** indiquent le signe de chacune des deux fonctions affines.
3) La **4e ligne** se remplit avec la règle des signes du produit de deux nombres relatifs :
   a) des facteurs de même signe donnent un produit positif ;
   b) des facteurs de signes contraires donnent un produit négatif.

Exercice d'application

Résoudre l'inéquation $(3x+4)(-2x+6) \leqslant 0$.

Correction

On étudie le signe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x+4)(-2x+6)$.

Recherche des valeurs qui annulent :

- $3x + 4 = 0$ implique $x = -\dfrac{4}{3}$.
- $-2x + 6 = 0$ implique $x = 3$.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'ensemble $\left]-\infty ; -\dfrac{4}{3}\right] \cup [3 ; +\infty[$.

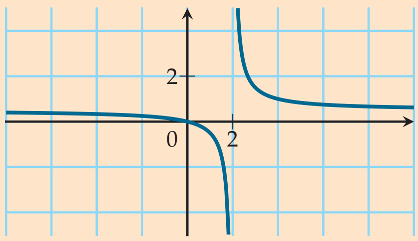
4. Signe d'une fonction homographique

DÉFINITION : Fonction homographique

On appelle **fonction homographique** toute fonction h qui peut s'écrire comme quotient de fonctions affines. Soit a, b, c, d quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$: $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

PROPRIÉTÉ

Une fonction homographique est définie sur $\mathbb{R}$ privé de la valeur qui annule son dénominateur dite « **valeur interdite** ».
Sa **courbe représentative** est une hyperbole qui comporte deux branches disjointes.



MÉTHODE 4 Donner le domaine de définition d'une fonction homographique

▶ Ex. 45 p. 143

Pour identifier ce domaine de définition, il suffit de trouver la valeur interdite.

Exercice d'application

Quel est le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{5x+4}{3x-7}$?

Correction

Recherche de la valeur interdite : $3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$
Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{5x+4}{3x-7}$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$.

MÉTHODE 5 Donner le tableau de signes d'une fonction homographique

▶ Ex. 46 p. 143

La méthode est similaire à celle du produit de deux fonctions affines.
La valeur qui **annule le dénominateur** ne faisant pas partie du domaine de définition de la fonction doit être indiquée par **une double barre**.

Exercice d'application

Résoudre l'inéquation $\dfrac{3x-5}{2x+7} > 0$.

Correction

On étudie le signe de la fonction l définie par $l(x) = \dfrac{3x-5}{2x+7}$.

- Recherche de la valeur interdite :
  $2x + 7 \neq 0$ implique $x \neq -\dfrac{7}{2}$.
  Donc l est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$.
- Recherche de la valeur qui annule l :
  $3x - 5 = 0$ implique $x = \dfrac{5}{3}$.
- Comparaison des valeurs trouvées pour les ranger sur la 1re ligne du tableau : $-\dfrac{7}{2} < \dfrac{5}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$l(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquation $\dfrac{3x-5}{2x+7} > 0$ sont les nombres de l'ensemble $\left]-\infty ; -\dfrac{7}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5}{3} ; +\infty\right[$.

Activités mentales

1 Voici le tableau de signes d'une fonction f définie sur $]-5;5[$. Que peut-on dire de :

- $f(3)$?
- $f(-4)$?
- $f(0)$?
- $f(4)$?

x	-5		-4		3		5
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

2 Compléter les tableaux de signes suivants.

1)

x	$-\infty$		$\cdots$		$+\infty$
$2x-9$		$\cdots$	0	$\cdots$	

2)

x	$-\infty$		$\cdots$		$+\infty$
$-11x-5$		$\cdots$	0	$\cdots$	

3 Déterminer 4 fonctions affines qui s'annulent

1) en -3 **2)** en 0 **3)** en $\dfrac{2}{3}$ **4)** en $-\dfrac{7}{6}$

4 Factoriser les expressions suivantes.

1) $A = 4x^2 + 12x + 9$ **2)** $B = 16x^2 - 25$

5 Factoriser les expressions suivantes.

1) $A = 3x^2 - 7x$ **2)** $B = 5x^2 - 5x$

6 Factoriser les expressions suivantes.

1) $A = (2x+1)(3x+2) + (4x+7)(2x+1)$

2) $B = (5x-7)(6-x) + (6-x)$

7 Pour quelle(s) valeur(s) la fonction f définie par $f(x) = (3x-4)(5x+7)$ s'annule-t-elle ?

8 Pour quelle(s) valeur(s) la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-4+x}{2x+1}$ s'annule-t-elle ?

9 Compléter le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x-5)(-2x-7)$.

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
$6x-5$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
$-2x-7$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
$f(x)$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	

10 Sur quel ensemble a-t-on :

1) $(x+2)^2 > 0$?

2) $(3x-4)^2 \geqslant 0$?

3) $2x^2 + 5 > 0$?

4) $2x - 5 > 0$?

5) $-x - 6 < 0$?

6) $3x^2(x+5) < 0$?

Tableau de signes d'une fonction

11 **Signe**

À partir du tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

1) donner les signes des nombres suivants :

- $f(5)$
- $f(-2)$
- $f(-7)$

2) résoudre les inéquations suivantes :

- $f(x) > 0$
- $f(x) \geqslant 0$
- $f(x) < 0$

12 **Signalé !**

À partir du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	‖	$+$	

1) donner les signes des nombres suivants :

- $g(12)$
- $g(-25)$
- $g(0)$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

- $g(x) > 0$
- $g(x) \geqslant 0$
- $g(x) < 0$

13 **À qui le tour ?**

Une fonction h est définie sur $[-5;8]$.
Elle s'annule en -2, 0 et 5 et est positive pour tout x appartenant à l'intervalle $[-2;5]$. Elle est négative sinon.
Dresser le tableau de signes de cette fonction.

14 **Tableaux de signes**

Voici deux tableaux de signes :

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		6		34		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	

1) Proposer deux fonctions vérifiant chacun des tableaux de signes.

2) À l'aide de ces tableaux, résoudre :

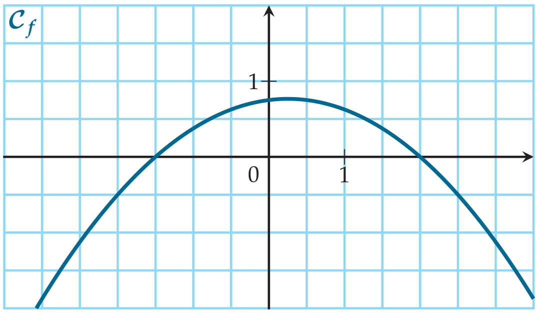
- $f(x) \geqslant 0$
- $g(x) < 0$

3) Peut-on comparer f et g ? Si oui, sur quel intervalle ?

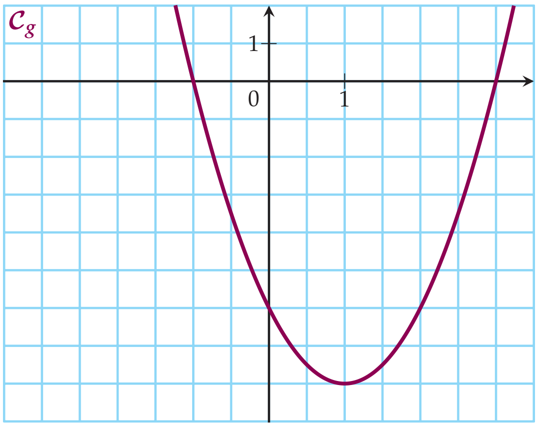
S'entraîner

15 Fonctions définies sur $\mathbb{R}$

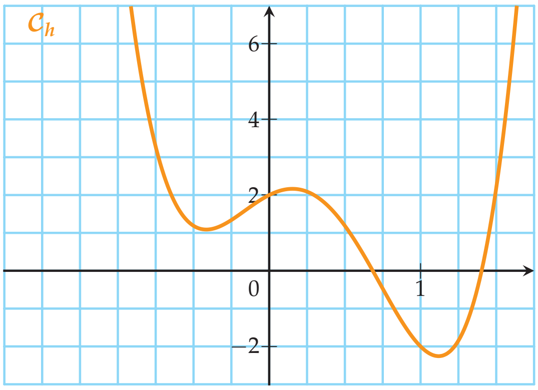
Dresser les tableaux de signes des fonctions représentées ci-dessous.



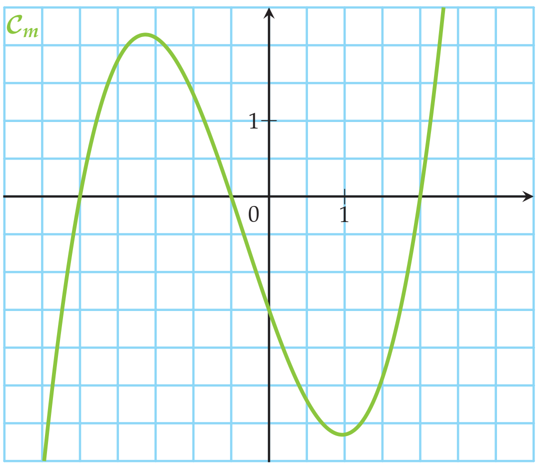
1)



2)



3)



4)

16 Des valeurs interdites !

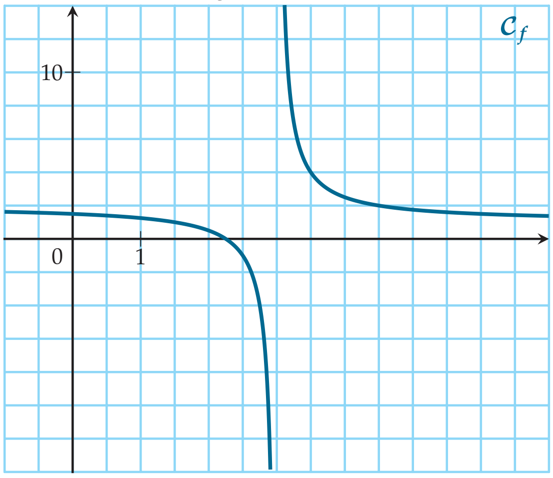
À partir de chaque représentation graphique :

1) déterminer la ou les valeur(s) pour la(les)quelle(s) :

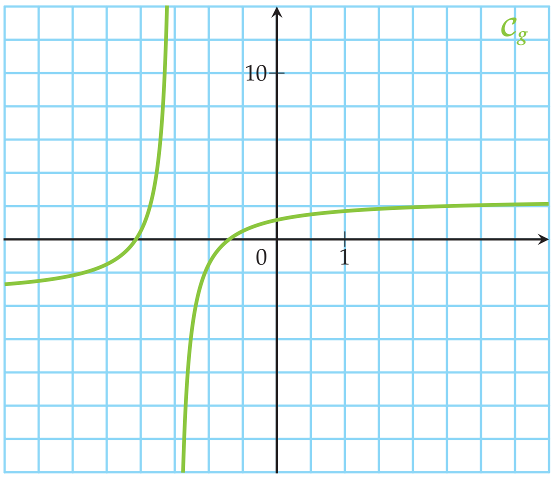
a) la fonction n'est pas définie ;

b) la fonction est éventuellement nulle ;

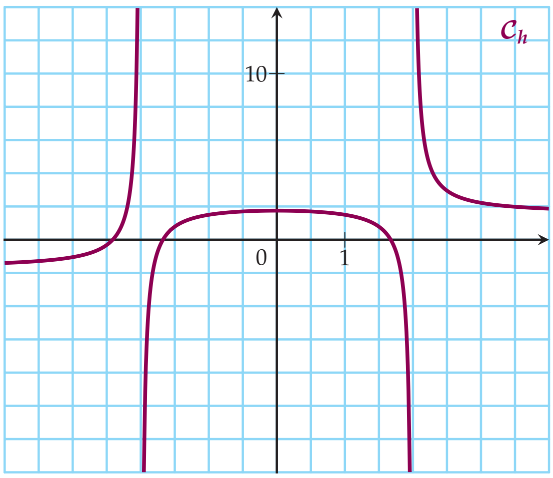
2) établir le tableau de signes de cette fonction.



a)



b)



c)

Signe d'une fonction affine

17 Étudier les signes des fonctions affines ci-dessous et dresser leurs tableaux de signes.

1) $f(x) = -3x - 7$ **3)** $g(x) = 4\sqrt{3}x - \sqrt{2}$

2) $h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$ **4)** $m(x) = \frac{5}{6}x + \frac{12}{7}$

18 ► MÉTHODE 1 p. 136

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.

1) Dresser son tableau de signes.

2) Sans faire de calcul, que dire du signe de :

a) $f(0,219)$? **b)** $f(-0,517)$?

19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 7$.

1) Dresser son tableau de signes.

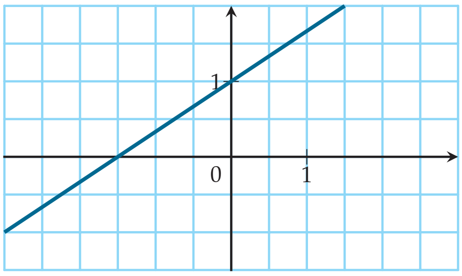
2) Quel est le signe de f sur l'intervalle $I = [2;3]$?

3) Proposer un intervalle du type $J = [n; n+1]$, avec n entier naturel, où la fonction f change de signe.

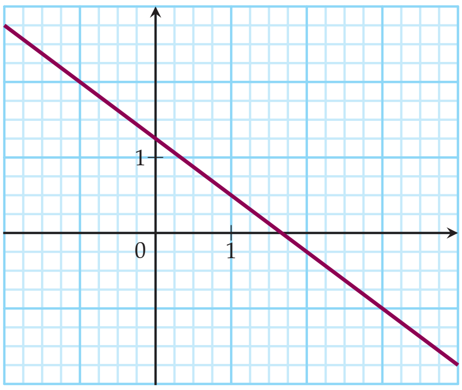
20 À partir de la représentation graphique ci-dessous de la fonction affine f.,

1) déterminer l'expression algébrique de la fonction f ;

2) déterminer le tableau de signes de la fonction.



21 Même énoncé que l'exercice **20**.



Factorisation

22 Réduire les expressions suivantes.

1) $A = \frac{2}{5}x - \frac{7}{5}x$ **2)** $B = -\frac{7}{12}x^2 - \frac{8}{18}x^2$

3) $C = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 6 - \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x^2 - 15$

4) $D = -5\sqrt{2} + 10,5\sqrt{7} - 15\sqrt{2} - 18,3\sqrt{7} + \frac{2}{9}\sqrt{2}$

23 Factoriser les expressions suivantes.

1) $A = 7x^2 - 28$ **2)** $B = \frac{4}{9}x^2 - \frac{49}{81}$

3) $C = 18x^2 - 48x + 32$

4) $D = \sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

5) $E = 5(3x-2) - \frac{5}{6}(3x-2)$

24 Souligner le facteur commun puis écrire la factorisation.

1) $A = (2x-3)(24x-3) + (2x-3)(-22x+5)$

2) $M = (15x+7)(3-x) + (15x+7)(12x+5)$

3) $U = (7x-26)(11x+8) - (7x-26)(12x+4)$

4) $S = (13x+5)(-5x+2) - (13x+5)(8x-15)$

5) $E = 8x^2y - 4y^2x + 6xy$

25 En mettant en évidence un facteur commun, factoriser les expressions suivantes.

1) $M = (23x+1)(-17x+1) + (23x+1)^2$

2) $A = (13x-14)(25x-11) - (13x-14)^2$

3) $N = (8-18x)^2 - (16x-3)(8-18x)$

4) $U = (11-2x)(9-7x) + (2x-11)(11x+2)$

5) $E = (6x+23)(6x-5) - (19x-6)(5-6x)$

6) $L = (16x+13)(21x-3) + (16x+13)$

7) $S = (-14x+5) - (4x-7)(-14x+5)$

26 En mettant en évidence une différence de deux carrés, factoriser les expressions suivantes.

1) $H = x^2 - 121$

2) $E = (x-4)^2 - 36$

3) $R = x^2 - 5$

4) $T = 25 - (2-x)^2$

5) $Z = (x+3)^2 - (2x+4)^2$

27 **Calcul mental**

1) Factoriser $(x+1)^2 - (x-1)^2$.

2) Calculer $10001^2 - 9999^2$.

S'entraîner

28 Factoriser en utilisant une identité remarquable.

1) $T = 9x^2 + 12x + 4$
2) $H = x^2 + 169 - 26x$
3) $A = 144x + 144x^2 + 36$
4) $L = 49x^2 + 25 - 70x$
5) $E = 9x^2 - 24x + 16$
6) $S = -22x + 121x^2 + 1$

29 Choisir la bonne méthode pour factoriser les expressions suivantes.

1) $P = (6x-4)(2x+5) - (3x+2)(2x+5)$
2) $Y = (4x-5)^2 - (9-13x)^2$
3) $T = 25x^2 + 9 - 30x$
4) $H = (5x-7)(3x-2) - (x-8)(3x-2)$

30 ► MÉTHODE 2 p. 137

Factoriser les expressions suivantes.

1) $M = (4x-3)^2 - 28x + 21$
2) $A = 5x - 7 + (7-5x)^2$
3) $T = -4x^2 + 20x - 25 + 4x^2 - 25$
4) $H = (5x-3)^2 - (3-2x)^2$

31 **En deux étapes**

Factoriser les expressions suivantes :

1) $S = (3x+2)(4x-1) + (8x-2)(7x-8)$
2) $T = (6x+1)(3-x) - 36x^2 + 1$
3) $R = (4x+4)(x-5) + (3x+3)(x-9)$
4) $O = (x+1)(7-x) - (-1-x)(x+7)$
5) $P = x^2 + 6x + 9 - (2x-3)(x+3)$
6) $H = (3x-4)(x+5) - (-6x+1)(x+5)$
7) $E = (8x-1)^2 - (5x+2)(8x-1)$

32 Écrire sous la forme d'une seule fraction de la manière la plus simple possible.

1) $V = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}$

2) $I = \dfrac{5}{2x-1} + 1$

3) $T = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x-1}{3x+5}$

4) $E = \dfrac{x}{1-5x} + \dfrac{2}{x+1}$

33 **Triangle rectangle**

ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = x + 7$ et $AC = 5$ où x désigne un nombre positif.
Exprimer AB^2 en fonction de x sous forme factorisée.

Signe d'un produit

34 ► MÉTHODE 3 p. 137

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-4)(x+2)$.

1) Déterminer le signe de $3x-4$ et de $x+2$.
2) Dresser le tableau de signes de la fonction f.
3) Représenter graphiquement la fonction.

35 Établir les tableaux de signes des fonctions.

1) $h(x) = (-2x+3)(-3x-5)$
2) $u(x) = (2x+14)(6x+24)$
3) $v(x) = (5x-65)(7-2x)$
4) $w(x) = (-3x-72)(-4x-96)$

36 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x-5)(x+7)$.

1) Dresser le tableau de signes de la fonction g.
2) En déduire les signes des fonctions suivantes.
   a) $h(x) = x^2(4x-5)(x+7)$
   b) $k(x) = -3(4x-5)(x+7)$
   c) $t(x) = (5-4x)(x+7)$
   d) $p(x) = (5-4x)(-x-7)$

37 Résoudre les inéquations suivantes.

1) $(9x-1)(4-x) < 0$
2) $(3x+2)(4x-8) \geqslant 0$
3) $(x^2+1)(3-x) \leqslant 0$
4) $(3x+1)(5x-7)(6-x) > 0$

38 Déterminer les signes des fonctions suivantes.

1) $f(x) = (x+6)^2 - 25$
2) $g(x) = (5x-3)^2 - (x-4)^2$
3) $h(x) = x^2 - 7x$
4) $k(x) = (-3x+8)(7x-4) - (-3x+8)(5-2x)$

39 Résoudre les inéquations suivantes.

1) $x^2 > 16$
2) $16x^2 + 8x + 1 > 0$
3) $64x^2 - 121 > 0$
4) $49 - (3+x)^2 \leqslant 0$

40 **Signe d'un trinôme**

1) Démontrer que $x^2 - 6x - 7 = (x-3)^2 - 16$.
2) Déterminer le signe de $T(x) = x^2 - 6x - 7$.

41 Dresser les tableaux de signes des fonctions.

1) $f(x) = (8x-1)^2(2-7x)$
2) $g(x) = (x-4)(9x+2)(5-x)$
3) $h(x) = -3(5x-1)(x+1)(4-6x)$

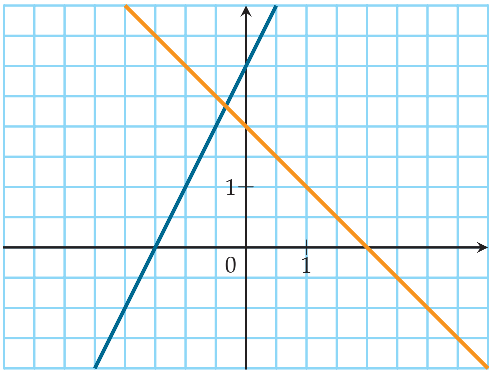
42 **Sans tableau de signes !**

Le graphique ci-dessous donne les représentations graphiques des fonctions f et g définies par :

- $f(x) = 2x+3$
- $g(x) = -x+2$

On définit la fonction h par $h(x) = (2x+3)(-x+2)$.

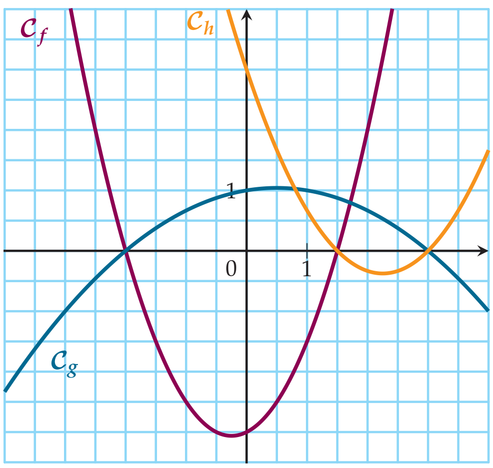
1) Attribuer chaque courbe à la bonne fonction.
2) Déterminer graphiquement les valeurs qui annulent la fonction h.
3) Résoudre graphiquement $h(x) \geqslant 0$.
4) En déduire le tableau de signes de h.
5) Proposer une courbe représentative possible de la fonction h.



43 Sur le graphique ci-dessous sont représentées les fonctions f, g et h. Elles sont le produit de deux fonctions parmi les fonctions affines suivantes :

- $u_1(x) = 2x-3$
- $u_4(x) = 3-2x$
- $u_2(x) = 0,5x+1$
- $u_5(x) = -0,5x-1$
- $u_3(x) = \dfrac{1}{3}x-1$
- $u_6(x) = -\dfrac{1}{3}x+1$

Retrouver les expressions des fonctions f, g et h.



Signe d'un quotient

44 **Fonctions homographiques**

Parmi les fonctions suivantes, dire lesquelles sont homographiques.

1) $f(x) = (2x-1)(x+2)$
2) $g(x) = \dfrac{7}{2x-1}$
3) $h(x) = \dfrac{4x+1}{5x+2}$
4) $i(x) = 4 + \dfrac{x-1}{x-2}$
5) $j(x) = \dfrac{3x-1}{(3x-2)^2}$
6) $k(x) = \dfrac{3x-1}{7x-9} - \dfrac{3-x}{7x-9}$

45 ► MÉTHODE 4 p. 138

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) les fonctions suivantes ne sont pas définies et pour quelle(s) valeur(s) elle s'annulent.

1) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{-5x+1}$
2) $g(x) = \dfrac{5x+3}{4x-3}$
3) $h(x) = 2 + \dfrac{3x-1}{4x-7}$
4) $k(x) = \dfrac{\sqrt{3}x-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-\sqrt{27}x}$
5) $l(x) = \dfrac{-2x+1}{-9x^2+1}$
6) $m(x) = \dfrac{69x+3}{6x^2+24}$

46 ► MÉTHODE 5 p. 138

1) Étudier le signe de $(2x-1)(x-3)$ et dresser le tableau de signes de cette expression, que l'on note M.
2) En déduire le tableau de signes des expressions.

   a) $O = \dfrac{2x-1}{x-3}$
   b) $L = \dfrac{2x-1}{3-x}$
   c) $E = \dfrac{2x-1}{(x-3)\times 3x^2}$
   d) $S = \dfrac{-5(2x-1)}{3-x}$

47 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \dfrac{-x}{x+12}$
2) $g(x) = \dfrac{2x-5}{7+21x}$
3) $h(x) = \dfrac{x^2}{5x+3}$
4) $k(x) = \dfrac{-14x+12}{x^2+2}$
5) $m(x) = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{1-9x}$
6) $p(x) = \dfrac{5+x}{(x-6)(7x+8)}$

48 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1) $\dfrac{x+2}{-4x+1} > 0$
2) $\dfrac{5x-1}{-3x} \geqslant 0$
3) $\dfrac{7x-3}{(-8x-1)^2} < 0$
4) $\dfrac{3x-4}{x+2} \leqslant 0$

Approfondir

49 L'objectif est de résoudre $\dfrac{x-7}{x+9} \geqslant 2$.

1) Quelle est la valeur que x ne peut pas prendre ?
2) Déterminer une expression $A(x)$ pour que l'inéquation se ramène à $A(x) \geqslant 0$.
3) Résoudre $A(x) \geqslant 0$.

50 Résoudre : $\dfrac{3x-1}{x+2} < 3$.

51 Résoudre : $4x^3 - 12x^2 + 9x > 0$.

52 **Inéquations et fonctions homographiques**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{2x-5}{-x+7} \geqslant 0$ **2)** $\dfrac{2}{2x+3} \leqslant 5$ **3)** $\dfrac{1}{x} > \dfrac{3}{-7+6x}$

53 En exprimant différemment le membre de gauche, résoudre les inéquations suivantes :

1) $2 - \dfrac{x-4}{3x+5} \geqslant 0$
2) $\dfrac{5x+1}{x-1} + 1 < 0$
3) $\dfrac{2x^2-9}{x-1} - 2x \geqslant 0$
4) $\dfrac{7}{x-2} - \dfrac{4x-5}{(x-2)^2} < 0$
5) $\dfrac{8x^2-9}{x+1} - 8x \geqslant 0$
6) $\dfrac{2x+1}{(x+3)^2} - \dfrac{2}{x+3} > 0$

54 **L'offre et la demande**

Le prix x d'un article est compris entre 20€ et 50€. L'*offre* est le nombre d'articles qu'une entreprise décide de proposer aux consommateurs au prix de x €.
La *demande* est le nombre probable d'articles achetés par les consommateurs quand l'article est proposé à ce même prix de x €.

La *demande* se calcule avec $d(x) = -750x + 45\,000$ pour x en milliers d'articles.

L'*offre* se calcule avec $f(x) = -\dfrac{500\,000}{x} + 35\,000$.

Le but de cet exercice est de trouver pour quels prix l'offre est supérieure à la demande.

1) Écrire une inéquation traduisant le problème posé.
2) Démontrer que l'inéquation $f(x) > d(x)$ s'écrit aussi $-500\,000 > -750x^2 + 10\,000x$.
3) Démontrer alors qu'elle peut aussi s'écrire $3x^2 - 40x - 2\,000 > 0$.
4) a) Démontrer que pour tout x :
$3x^2 - 40x - 2000 = (x+20)(3x-100)$.
b) En déduire les solutions de $f(x) > d(x)$.
c) Conclure.

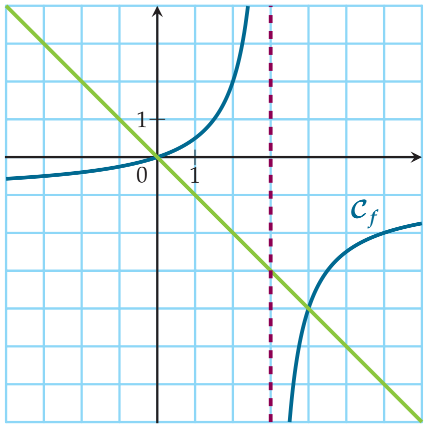
55 **Vrai/Faux**

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1) Pour tout réel x, $(x+1)^2 - 4 = (x+5)(x-2)$.
2) Il existe un réel x tel que $x^2 + 2x = -4x$.
3) Pour tout x, $(x+3)^2 + 2x = (x+2)^2 + 6x + 5$.
4) Il existe un réel x tel que $(x+1)(x+2) = 3x+1$.

56 **Positions relatives de deux courbes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{-x}{x-3}$.



1) En utilisant le graphique ci-dessous, résoudre :
a) $f(x) \leq 1$ **b)** $f(x) > -x$
2) Résoudre ces inéquations par le calcul.

57 Renée cherche à résoudre l'inéquation :
$x^3 + 2x^2 + x > x^2 + 3x + 2$.
Pour cela, elle utilise un logiciel de calcul formel.
Voici ci-dessous ce qu'il obtient.

Aider Renée à résoudre cette inéquation.

$simplifier(x\hat{}3 + 2x\hat{}2 + x - (x\hat{}2 + 3x + 2))$
$x^3 + x^2 - 2 * x - 2$

$factoriser(x\hat{}2 + 3x + 2)$
$(x+1) * (x+2)$

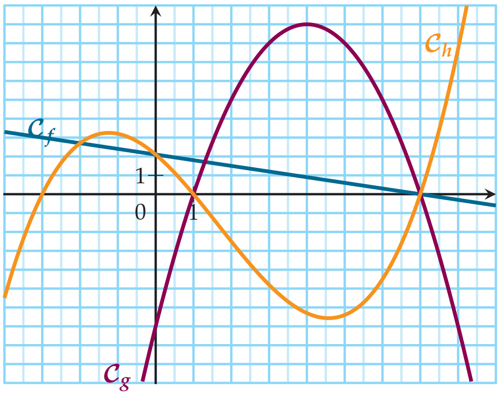
$factoriser(x\hat{}3 + x\hat{}2 - 2 * x - 2)$
$x * (x^2 - 2)$

$factoriser(x\hat{}3 + 2x\hat{}2 + x)$
$x * (x+1)^2$

58 **Positions relatives de trois courbes** INFO

On a représenté sur le graphique ci-dessous les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = -0,3(x-7)$
- $g(x) = -x^2 + 8x - 7$
- $h(x) = 0,1x^3 - 0,5x^2 - 1,7x + 2,1$



1) a) Montrer qu'étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ équivaut à étudier le signe de l'expression $-x^2 + 8,3x - 9,1$.

b) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

$factoriser(-x^2 - 8,3x + 9,1)$
$-(-1,3 + x)^*(x - 7)$

En déduire le signe de $-x^2 - 8,3x + 9,1$ et les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, étudier les positions relatives des courbes

a) $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$;

b) $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.

59 **Une formule**

1) Effectuer chacun des calculs ci-dessous.
- $48^2 - 47^2 - 46^2 + 45^2$
- $82^2 - 81^2 - 80^2 + 79^2$
- $166^2 - 165^2 - 164^2 + 163^2$

2) Émettre une conjecture.

3) La démontrer.

4) À l'aide de la calculatrice, effectuer le calcul.
$123456789515^2 + 123456789512^2 - [123456789514^2 + 123456789513^2]$

5) Que penser de la réponse affichée ?

60 **Extremum et étude de signes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

1) À l'aide de votre calculatrice, dresser un tableau de variations de f.

2) f admet-elle un extremun sur $\mathbb{R}$?

3) Étudier le signe de $f(x) + 1$.

4) En déduire que -1 est bien un minimum de f sur $\mathbb{R}$.

61 En s'inspirant de l'exercice **60**, étudier les extrema des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^2 + 10x + 33$

2) $g(x) = -9x^2 + 12x + 8$

3) $h(x) = -x^2 + 6x - \dfrac{3}{2}$

4) $k(x) = 2x^2 + 8x - 1$

5) $j(x) = (x-3)^2 - 4$

62 **Signes et variations**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}.$$

1) Conjecturer le sens de variations de f.

2) Vérifier que $f(b) - f(a) = \dfrac{5(a-b)}{(b-2)(a-2)}$.

3) Soit a et b deux nombres réels tels que $2 < a < b$. Étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

4) Démontrer que f est décroissante sur $]2; +\infty[$.

63 En s'inspirant de l'exercice **62**, montrer que

1) $f(x) = \dfrac{-3}{(x-5)^2}$ est strictement croissante sur $]5; +\infty[$.

2) $g(x) = 3(x+2) - \dfrac{2}{x}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

64 **Un carré parfait**

On dit d'un nombre que c'est un carré parfait lorsqu'il s'agit du carré d'un entier.

Par exemple 4, 9, 16 sont des carrés parfaits car ce sont les carrés respectifs de 2, 3 et 4.

On considère le nombre $A(n) = (2n-1)^2 - n(3n-2)$.

1) Calculer $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(5)$ et $A(10)$

2) Que peut-on conjecturer ?

3) Démontrer-le.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Interpréter un tableau de signes
- donner le signe d'une fonction
- résoudre des inéquations

Factoriser une expression
- avec un facteur commun
- en faisant apparaître un facteur commun
- avec les identités remarquables

Dresser le tableau de signes
- d'une fonction d'après son graphique
- d'une fonction carré
- d'une fonction inverse
- d'une fonction affine
- du produit de fonctions affines
- du quotient de fonctions affines

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Voici le tableau de signes d'une fonction h.

x	$-\infty$		-5		10		14		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	

65 Sur lequel de ces intervalles a-t-on $h(x) > 0$?
(a) $]-5;14[$ (b) $]-5;10[$ (c) $]-5;10]$

66 Sur lequel de ces intervalles a-t-on $h(x) < 0$?
(a) $]-\infty;-5[$ (b) $]10;14[$ (c) $]10;+\infty[$

67 Résoudre $h(x) \leqslant 0$.
(a) $S =]-\infty;-5] \cup [10;+\infty[$
(b) $S =]-\infty;-5] \cup [10;14[\cup]14;+\infty[$

68 Que peut-on dire de $h(10)$?
(a) $h(10) = -5$ (b) $h(10) = 0$

69 Que peut-on dire de $h(0)$?
(a) $h(0)$ est positif (b) $h(0) = 4$

70 Que peut-on dire de $h(14)$?
(a) $h(14)$ est négatif (b) $h(14)$ n'existe pas

71 Parmi ces tableaux, lequel est celui de la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2x - 3$?

(a)

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

(b)

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

(c)

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

(d)

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

72 Quelles expressions sont des formes factorisées de $14x+28$?

(a) $7(2x+4)$ (b) $2x+14$ (c) $14(x+2)$

73 Quelles expressions sont des formes factorisées de $3x^2+9x$?

(a) $x(3x+9)$ (b) $3x(x+3)$ (c) $3(x^2+3)$

74 Quelle expression est une forme factorisée de $(x+2)(4x-5)-(x+2)(6x-9)$?

(a) $(x+2)(-2x-14)$ (b) $-2(x+2)(x-2)$

75 Quelle expression est une forme factorisée de $4x^2-4x+1$?

(a) $(x-4)^2$ (b) $(2x-1)^2$

76 Quelle expression est une forme factorisée de $36x^2-64$?

(a) $(6x-8)(6x+8)$ (b) $4(3x-4)(3x+4)$

77 L'expression $25x^2-3$ est-elle factorisable ?

(a) oui (b) non

Voici le tableau de signes, incomplet, de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=(3x+5)(-2x+7)$.

x	$-\infty$		$\cdots$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+7$		$+$		$+$	0	$-$	

78 Quelle valeur annule $3x+5$?

(a) $-\frac{3}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $-\frac{5}{3}$

79 Sur lequel de ces intervalles a-t-on $p(x)<0$?

(a) $\left]-\infty;\frac{7}{2}\right[$ (b) $\left]\frac{7}{2};+\infty\right[$

Voici le tableau de signes, incomplet, de la fonction q définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	

80 Que peut-on dire de $q(-4)$?

(a) Il vaut 0 (b) Il n'existe pas

81 Que peut-on dire de $q(3)$?

(a) Il vaut 0 (b) Il n'existe pas

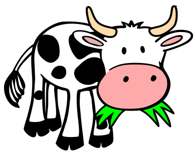
82 Sur lequel de ces intervalles a-t-on $q(x)\geqslant 0$?

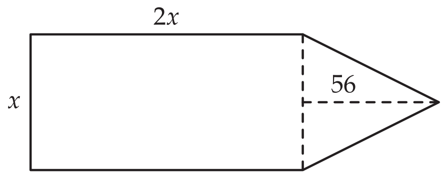
(a) $]-\infty;-4]$ (b) $[-4;3]$ (c) $[3;+\infty[$

Travaux pratiques

TP 1 Dans le Cantal

Le père Bono a un champ rectangulaire et n'arrive pas à regrouper ses vaches quand il faut les ramener à l'étable. Il décide de rajouter une parcelle triangulaire à son champ, comme sur le schéma ci-dessous pour faciliter le regroupement de ses bêtes. Il déclare alors : « Mon champ aura cette forme ou je ne m'appelle pas Jean ! ». Cependant, il est nécessaire de prévoir une surface minimale de 11 152 m^2 pour que les vaches puissent paître.





1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer le résultat.
2) Montrer que le Père Bono doit résoudre l'inéquation $2x^2 + 28x - 11152 \leqslant 0$.
3) Démontrer que $2x^2 + 28x - 11152 = (2x - 136)(x + 82)$.
Déterminer les dimensions du champ de Bono.

TP 2 En cascade

L'objectif du TP est de résoudre (I) : $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$.

1 Existence de l'inéquation (I)

1) Étudier le signe de $x^2 - 2x$.
2) Pour quel intervalle de x l'inéquation est-elle définie ?

2 Plus simple !

1) Établir le tableau de signes de l'expression $X - X^2$.
2) En déduire les solutions de l'inéquation $X < X^2$.

3 Encadrement

1) Montrer que résoudre $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$, c'est résoudre $X < X^2$. Expliciter X.
2) En déduire les inégalités que doivent vérifier $\sqrt{x^2 - 2x}$.

4 Résoudre $\sqrt{x^2 - 2x} > 1$

1) Montrer que résoudre $\sqrt{x^2 - 2x} > 1$, c'est résoudre $(\sqrt{x^2 - 2x} + 1)(\sqrt{x^2 - 2x} - 1) > 0$.
2) Établir que cela revient à résoudre $x^2 - 2x - 1 > 0$.

5 Résoudre $x^2 - 2x - 1 > 0$

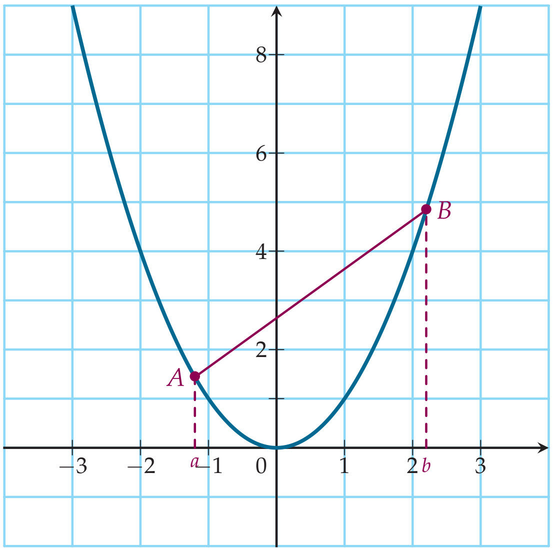
1) Conjecturer la solution à l'aide de votre calculatrice.
2) Développer $(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$.
3) Chercher les solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 1 > 0$.
4) En déduire les solutions de (I) : $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$.

TP 3 Convexe ou concave ?

Une fonction est **convexe** si sa représentation graphique « *est tournée vers le haut* ».
Mathématiquement, cela signifie que, si A et B sont deux points de la représentation graphique de la fonction, le segment $[AB]$ est entièrement situé au-dessus de la courbe. Si le segment [AB] est entièrement situé en-dessous, la fonction est **concave**.

1 Un exemple : la fonction carrée

On considère $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction carré.
On appelle A et B les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives a et b.



On cherche à prouver, sur des exemples, que le segment $[AB]$ est au dessus de $\mathcal{P}$.

1) Dans cette question, on prendra $a = 1$ et $b = 2$.

a) Donner la fonction affine g dont la représentation graphique est la droite (AB).

b) Développer $(x - 1)(x - 2)$.

c) En déduire que $\mathcal{P}$ est en dessous de (AB) sur l'intervalle $[1;2]$.

2) Démontrer que, pour $a = -1$ et $b = 1$, le segment $[AB]$ est au-dessus de $\mathcal{P}$.

2 En toute généralité

Dans cette partie, on considère que $a < b$ et on souhaite démontrer que la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

1) Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

2) Que vérifient les coordonnées d'un point du segment $[AB]$?

3) Déterminer la fonction affine f dont la droite (AB) est la représentation graphique.

a) Que peut-on dire du signe du coefficient directeur ? Pourquoi ?

b) Que peut-on dire du signe de l'ordonnée à l'origine ? Pourquoi ?

4) Quelle inéquation faut-il résoudre pour prouver que la fonction carrée est convexe ?

5) Montrer que : $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$.

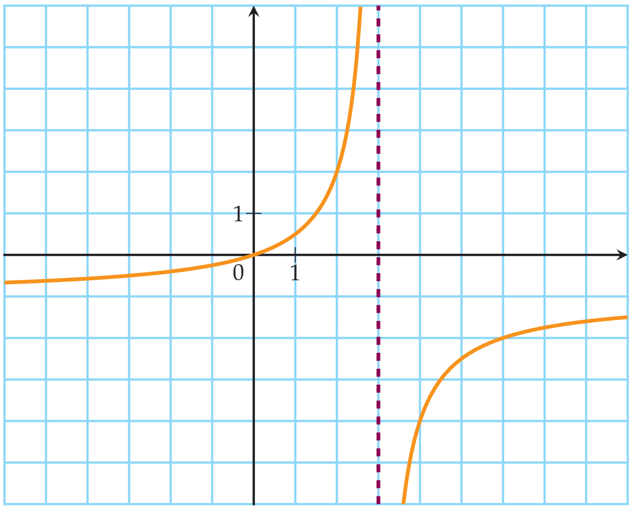
6) Établir le tableau de signes de l'expression $x^2 - f(x)$.

7) Conclure.

Travaux pratiques

3 Une autre fonction !

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $g(x) = \dfrac{-x}{x-3}$ et sa représentation graphique.



1) Sur quel intervalle la fonction g semble-t-elle concave ?

Soit A et B deux points de la représentation graphique de g.

Leurs abscisses respectives sont notées a et b telles que $a < b < 3$.

2) Déterminer la fonction affine h dont la représentation graphique est la droite (AB).

a) Quel est le signe du coefficient directeur ? Pourquoi ?

b) Peut-on déterminer le signe de l'ordonnée à l'origine ? Pourquoi ?

3) Quelle inéquation faut-il résoudre pour démontrer que la fonction g est convexe sur $]-\infty;3[$?

4) Démontrer que cela revient à résoudre $x(b-3)(a-3) + 3x(x-3) - ab(x-3) < 0$.

5) En factorisant, prouver que $x(b-3)(a-3) + 3x(x-3) - ab(x-3) = 3(x-a)(x-b)$.

6) Conclure.

Récréation, énigmes

L'adresse de Toto le Héros

Toto le Héros vous a laissé un indice pour trouver son Toto-repère : « J'habite rue de l'escargot. L'un de mes enfants est âgé de 4 fois le numéro de mon repère moins 1 et l'autre est âgé de ce numéro moins 3. De plus, si je ajoute 5 fois le numéro de ma maison au produit des âges de mes enfants, je trouve un nombre négatif. »

1) Si x est le numéro du toto-repère :
que vaut le produit des âges des enfants de Toto ?

2) Quelle inéquation est vérifiée par ce numéro ?

3) Conjecturer l'adresse du Toto-repère à l'aide de votre calculatrice.

4) En remarquant que $4x^2 - 8x + 3 = (2x-1)(2x-3)$,
dresser le tableau de signes de $4x^2 - 8x + 3$.

5) En déduire l'adresse de Toto le Héros.

FONCTIONS

5

Fonctions polynômes du second degré

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Développer une expression littérale
- Reconnaître un axe de symétrie
- Additionner des fractions
- Multiplier des fractions

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $(x+1)^2$
2) $(x-3)^2$
3) $(x-1,5)^2-2,5$
4) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{2}{3}$
5) $5(x-1)(x-4)$
6) $-2(x-4)(x+2)$
7) $7(x+7)(x+3)$
8) $-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{2}{5}\right)$

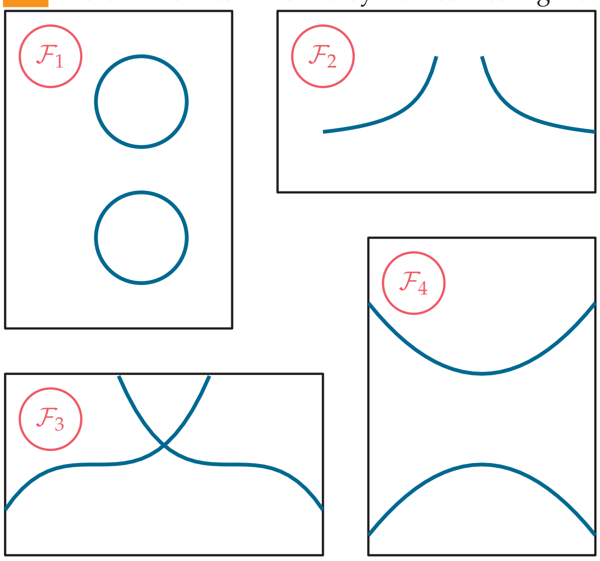
2 Calculer les expressions suivantes.

1) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{7}{3}$
2) $\dfrac{3}{14}+\dfrac{2}{21}$
3) $\dfrac{-7}{6}-\dfrac{-4}{18}$
4) $\dfrac{12}{48}-\dfrac{5}{8}$

3 Calculer les expressions suivantes.

1) $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{7}$
2) $\dfrac{3}{-14}\times\dfrac{-21}{-6}$
3) $\dfrac{-51}{6}\times\dfrac{12}{34}$
4) $\dfrac{12}{48}\times\dfrac{5}{8}$

4 Déterminer les axes de symétries des figures.



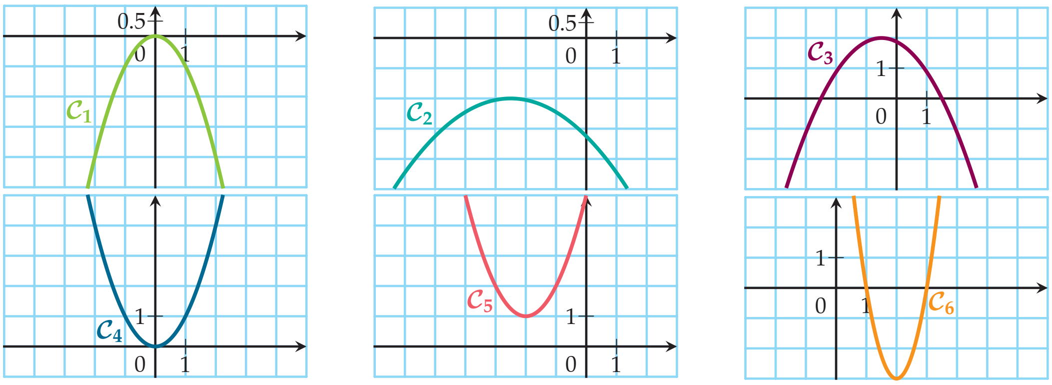
Voir solutions p. 259

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Paraboliquement vôtre

On a représenté ci-dessous six fonctions trinômes du 2e degré définies sur ℝ.

Partie 1 : Associations



1) Associer chacune des fonctions définies sur ℝ par les formules ci-dessous à l'une des courbes représentatives ci-dessus.

- $f(x) = 3(x-3)(x-1)$
- $g(x) = x^2$
- $h(x) = (x+2)^2 + 1$
- $k(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$
- $l(x) = -x^2$
- $m(x) = -\frac{1}{5}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 2$
- $n(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2$
- $p(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- $r(x) = -\frac{1}{5}x^2 - x - \frac{13}{4}$
- $s(x) = 3(x-2)^2 - 3$
- $t(x) = x^2 + 4x + 5$
- $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{8}$

2) Certaines de ces fonctions ont la même courbe représentative.

a) Regrouper dans un tableau les associations faites à la question **1** en les triant par courbe.

b) Quel est le nombre maximum de fonctions associées à une courbe ?

Partie 2 : Images et antécédents

En utilisant l'expression la plus adaptée parmi celles de la question **2a**, déterminer,

1) par les fonctions f, g, h, k, l et m :

a) les images de 0 ; **b)** les éventuels antécédents de 0.

2) par les fonctions f puis k :

a) l'image de 2 ; **b)** les éventuels antécédents de 1.

Vérifier les calculs par lecture graphique.

Partie 3 : Sens de variation et extremum

1) Établir les tableaux de variations des fonctions représentées par les courbes $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_6$.

2) Comparer ces tableaux et les formes des fonctions représentées.

3) Démontrer ces sens de variations.

1. Forme canonique

DÉFINITION : Fonction polynôme de degré 2

Soit a, b, c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pouvant être exprimée sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

On parle aussi de **fonction trinôme**.

PROPRIÉTÉ

Soit P une fonction polynôme du second degré exprimée sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Il existe deux nombres réels α et β permettant d'écrire P sous le forme :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Cette forme s'appelle **forme canonique**.

PREUVE Elle est disponible en complément sur le manuel numérique.

2. Étude d'une fonction trinôme

PROPRIÉTÉ : Sens de variations

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$.
Le sens de variation d'une fonction dépend du signe de a.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f avec $a > 0$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f avec $a < 0$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

PREUVE La preuve est disponible en complément sur le manuel numérique.

PROPRIÉTÉ : Extremum

Soit a, α, β trois nombres réels.
f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique
$f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$.
Sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet β comme extremum. Il est atteint pour $x = \alpha$.

- C'est un maximum si α est négatif.
- C'est un minimum si α est positif.

PREUVE Les tableaux de variations établis précédemment prouvent la propriété.

Cours - Méthodes

PROPRIÉTÉ : Signes

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Le signe d'une fonction trinôme dépend du signe de a et du signe de β.

- Si $a < 0$ et $\beta \leqslant 0$, alors la fonction est toujours négative.
- Si $a > 0$ et $\beta \geqslant 0$ alors la fonction est toujours positive.
- Dans les autres cas,
  - la fonction change de signe sur l'intervalle $]-\infty;\alpha[$;
  - la fonction change à nouveau de signe sur l'intervalle $]\alpha;+\infty[$.

PREUVE Les tableaux de variations établis précédemment prouvent la propriété.

MÉTHODE 1 Étudier une fonction trinôme du second degré

► Ex. 25 p. 157

Exercice d'application On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-0,25)^2 - 8$.

Déterminer :

1) son sens de variation ;
2) son extremum ;
3) le signe de la fonction.

Correction Dans le cas de la fonction f :

- $\alpha = 0,25$
- $\beta = -8$
- $a = -2$

1) a est négatif donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;0,25[$ et décroissante sinon.
2) Elle admet un maximum en $x = \alpha = 0,25$. Il vaut $f(0,25) = -8$.

x	$-\infty$	$0,25$	$+\infty$
$f(x)$	↗	-8	↘

3) La fonction f est négative sur $\mathbb{R}$.

3. Représentation graphique

DÉFINITION

La courbe représentative d'une fonction trinôme est une **parabole**.

PROPRIÉTÉ

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. La courbe représentative de cette fonction est une parabole qui admet un axe de symétrie : la droite d'équation $x = \alpha$.

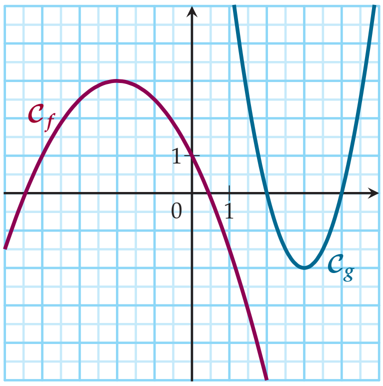
PREUVE La preuve est disponible en complément sur le manuel numérique.

Exemple Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

- $f(x) = -0,5(x+2)^2 + 3$
- $g(x) = 2(x-3)^2 - 2$

Donner leurs sens de variations et leur éventuel extremum.

Correction



La fonction f :

- est croissante sur $]-\infty; -2[$;
- est décroissante sur $]-2; +\infty[$;
- elle admet un maximum en -2 qui vaut 3.

La fonction g :

- est décroissante sur $]-\infty; 3[$;
- est croissante sur $]3; +\infty[$;
- elle admet un minimum en 3 qui vaut -2.

MÉTHODE 2 Identifier la forme d'une fonction

▶ Ex. 12 p. 156

Exercice d'application Soit f, g, h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$
- $g(x) = 2(x+1)^2 - 8$
- $h(x) = 2(x-1)(x+3)$.

1) Montrer que f, g, h sont trois formes de la même fonction.

2) Répondre aux questions suivantes en utilisant la forme la plus adaptée.

   a) Chercher les éventuels antécédents de 0 et de -6.

   b) Déterminer les coordonnées du sommet de la courbe représentative de cette fonction.

   c) Calculer les images de 0, de 1 et de -1.

Correction

1) On développe g et h pour prouver qu'elles sont égales à f.
$g(x) = 2(x+1)^2 - 8 = 2x^2 + 4x + 2 - 8 = 2x^2 + 4x - 6$
$h(x) = (2x-2)(x+3) = 2x^2 + 6x - 2x - 6 = 2x^2 + 4x - 6$.
f est la forme **développée**, g la forme **canonique** et h la forme **factorisée** du même trinôme.

2) a) Chercher les antécédents, c'est résoudre une équation.
   - Pour l'antécédent de 0, la forme la plus adaptée est la **forme factorisée**.
     On résout $h(x) = 2(x-1)(x+3) = 0$. Les antécédents de 0 sont 1 et -3.
   - Pour l'antécédent de -6, la plus pertinente est la **forme développée**.
     On résout $f(x) = 2x^2 + 4x - 6 = -6$. On obtient $2x^2 + 4x = 0$.
     On factorise l'expression : $x(2x+4) = 0$. Les antécédents de -6 sont 0 et -2.

   b) Pour chercher les coordonnées du sommet d'une parabole, la **forme canonique** est la plus pertinente. Ici, c'est g avec $\alpha = -1$.
   Donc les coordonnées du sommet de la parabole sont $(-1; -8)$.

   c) Calculer une image, c'est évaluer une expression. La forme la plus adaptée dépend de x.
   - $f(0) = -6$, l'image de 0 est -6.
   - $h(1) = 0$, l'image de 1 est 0.
   - $g(-1) = -8$, l'image de -1 est -8.

S'entraîner

Activités mentales

1 Que peut-on dire de

1) x^2 si $0 < x < 3$?
2) $2x^2$ si $x \leqslant -5$?
3) $-3x^2$ si $x \geqslant 3$?
4) $2x^2 - 3$ si $x < 2$?

2 Que peut-on dire de x si

1) $x^2 \geqslant 4$?
2) $x^2 \leqslant 5$?
3) $x^2 \leqslant -16$?
4) $(x-1)^2 < 0$?

3 Pour chacune des fonctions, déterminer en quelle valeur elle admet un minimum ou un maximum.

1) $-2x^2$
2) $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$
3) $g(x) = -7(x+3)^2 - 5$
4) $h(x) = -\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + 2$

4 On donne f, une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(6) = f(2) = 3$. Peut-on en déduire :

1) son tableau de variations ?
2) la valeur de son extremum ? Où est-il atteint ?

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x+2)^2 - 1$.
Félix affirme que, sans calculatrice, il peut prouver que $f(3,2145) > f(2,987)$. Comment fait-il ?

6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -7(x-5)^2 + 7$. Sans calculatrice, classer dans l'ordre croissant :

1) • $f(5,6)$ • $f(6,2)$ • $f(9,8)$
2) • $f(2,8)$ • $f(4,9)$ • $f(-1,2)$

7 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5(x+2)^2 - 3$.

1) Lydie affirme sans faire aucun calcul que $f(-3) = f(-1)$. Comment fait-elle ?
2) Sans calcul, trouver une autre égalité avec deux autres nombres.

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x+4)^2 - 1$.

1) Déterminer l'axe de symétrie de la représentation graphique de cette fonction.
2) Quelles sont les coordonnées de son sommet ?

9 Même consigne qu'à l'exercice 8 avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-3)^2 + 1$.

10 Quelles sont les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x+1)^2 - 2$?

Différentes formes d'un trinôme

11 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions trinômes ?

1) $f(x) = (3x-2) + (5x+4)$
2) $g(x) = (3x+1)(5x+4)$
3) $h(x) = 7x^2 - 8x + 1$

12 ► MÉTHODE 2 p. 155
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x-3)^2 + 5$.

1) Montrer que $f(x) = 3x^2 - 18x + 32$.
2) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer chaque image puis calculer.
   a) $f(3)$ b) $f\left(\sqrt{2}\right)$ c) $f(0)$

13 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 4x - 5$.

1) Montrer que $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$.
2) Calculer les images suivantes.
   a) $f(-1)$ b) $f\left(-\sqrt{3}\right)$ c) $f(0)$

14 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-4)(1-x)$.

1) Développer et réduire l'expression de la fonction f.
2) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer les images suivantes puis calculer.
   a) $f(1)$ b) $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$ c) $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$

15 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2 - 9$

1) Donner la forme factorisée de $f(x)$.
2) Donner sa forme développée.
3) Quels sont les antécédents de 0 par f ?

16 On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)^2 - 4$. Résoudre $g(x) = 0$.

17 On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}$.

1) Développer et réduire f.
2) Montrer que $h(x) = 2(x-2)(x-3)$.
3) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer les images suivantes.
   a) $h(2)$ b) $h\left(\dfrac{5}{2}\right)$ c) $h(-1)$

18 Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner le nom de la forme sous laquelle elle est écrite.

1) $f(x) = 5x^2 - 7x + 1$
2) $g(x) = (x-1)(3x-4)$
3) $h(x) = 3(x-2)^2 + 1$
4) $i(x) = 3x^2 + 2x + 7$
5) $j(x) = (2x-8)(4-x)$
6) $k(x) = -4(x+7)^2 - 2$

19 Relier entre elles les expressions égales.

1)

Forme développée			Forme canonique
$-3x^2-6x-5$	•	•	$3(x-3)^2+1$
$3x^2-18x+28$	•	•	$-2(x+4)^2-1$
$-2x^2-4x-2$	•	•	$-3(x+1)^2-2$
$4x^2-8x+6$	•	•	$-2(x-1)^2-4$
$-2x^2-16x-33$	•	•	$-2(x+1)^2$
$-2x^2+4x-6$	•	•	$4(x-1)^2+2$

2)

Forme développée			Forme canonique
$-3x^2-6x-7$	•	•	$3(x+4)^2+5$
$-3x^2+6x-1$	•	•	$-3(x-1)^2+2$
$3x^2+24x+53$	•	•	$-3(x+1)^2-4$
$3x^2-12x+15$	•	•	$3(x+2)^2-7$
$3x^2-12x+5$	•	•	$3(x-4)^2+1$
$3x^2-24x+1$	•	•	$3(x-2)^2+3$

3)

Forme factorisée			Forme canonique
$3(x-1)(x+2)$	•	•	$3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$
$3(x+2)(x-3)$	•	•	$3\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$
$3(x+1)(x+2)$	•	•	$3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{75}{4}$
$3(x-1)(x-2)$	•	•	$3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{27}{4}$
$3(x+3)(x+2)$	•	•	$3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$

20 On considère h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-1)^2 - 16$. Exprimer h sous forme factorisée puis sous forme développée.

21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x+2)^2 - 25$. Exprimer f sous forme factorisée puis sous forme développée.

22 On considère g, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 9$. Exprimer g sous forme factorisée.

Sens de variations et extremum

23 On étudie le sens de variation sur $]-\infty;3]$ de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 - 5$.
Recopier et compléter en justifiant chaque étape.
Soient a et b deux réels tels que $a < b \leqslant 3$.
$a-3\dots b-3\dots 0$
$(a-3)^2\dots(b-3)^2$
$(a-3)^2-5\dots(b-3)^2-5$
$f(a)\dots f(b)$
Donc f est ... sur ...

24 Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer pour quelle valeur de x elle admet un extremum.
1) $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$
2) $g(x) = -7(x+3)^2 - 5$
3) $h(x) = -\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - 2$

25 ► MÉTHODE 1 p. 154
Démontrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2(x+4)^2 - 5$ est croissante sur $[-4;+\infty[$.

26 Sur quel intervalle la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2(x-3)^2 + 6$ est-elle croissante ?

27 Démontrer que la fonction m, définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = 3(x-4)^2 + 2$ est croissante sur $[4;+\infty[$.

28 Sur quel intervalle la fonction p, définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -2(x+3)^2 - 4$ est-elle décroissante ?

29 On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-7)^2 + 1$.
Quel est son sens de variation sur $\mathcal{I} = [0;7]$?

30 On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2(x+1)^2 - 3$.
Quel est son sens de variation sur $\mathcal{I} = [-1;0]$?

31 On considère la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3(x+2)^2 + 1$.
Quel est son sens de variation sur $\mathcal{I} = [-3;-2]$?

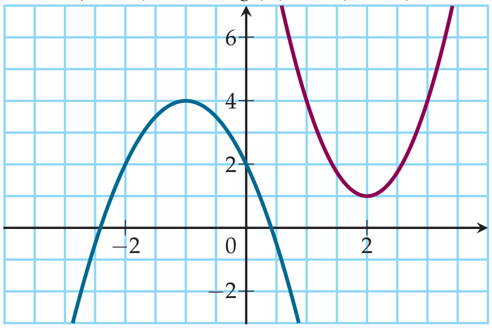
32 Déterminer les variations de la fonction polynôme du second degré h qui vérifie :
- $h(3) = 6$
- $h(6) = 2$
- $h(9) = 6$

33 Déterminer les variations de la fonction polynôme du second degré g qui vérifie :
- $g(1) = -3$
- $g(-2) = 0$
- $g(-5) = -3$

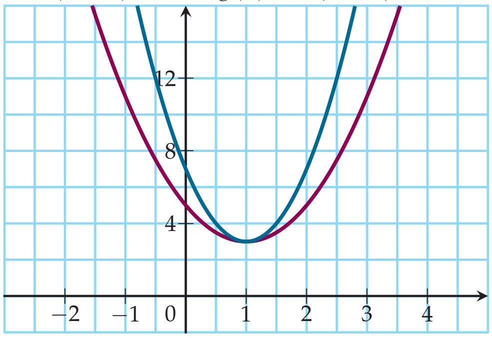
S'entraîner

34 Associer chaque courbe à la bonne fonction dans chacun des cas.

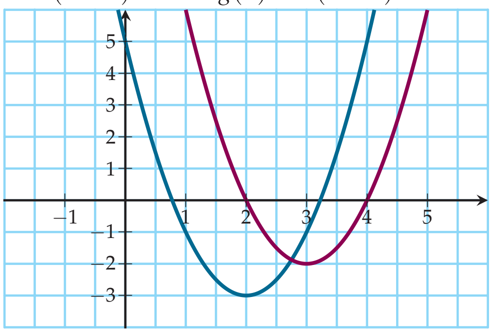
1) $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$ et $g(x) = 3(x-2)^2 + 1$.



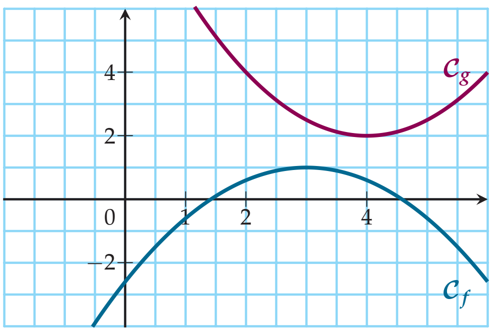
2) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ et $g(x) = 4(x-1)^2 + 3$.



3) $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$ et $g(x) = 2(x-3)^2 - 2$.



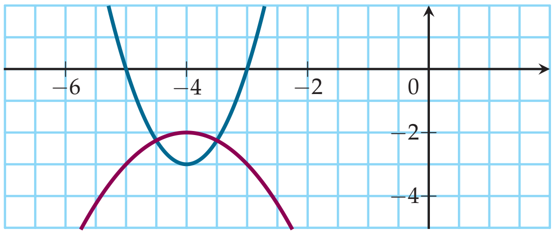
35 À partir des représentations graphiques des trinômes f et g définis sur $\mathbb{R}$, dresser leurs tableaux de variations.



36 Elsa utilise un logiciel pour représenter deux trinômes dans le même repère. Elle sait que :

$f(x) = 3x^2 + 24x + \ldots$ et $g(x) = -x^2 - \ldots x - 18$.

1) À partir des représentations graphiques, compléter les expressions des deux fonctions.



2) Déterminer graphiquement les coordonnées des extrema en précisant pour chacun si c'est un minimum ou un maximum.

3) Dresser les tableaux de variations des deux fonctions.

4) Quelle propriété est commune aux deux paraboles ?

5) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.

37 Retrouve les tableaux de variations correspondants aux fonctions suivantes.

- $f(x) = -3(x+1)^2 + 2$
- $h(x) = 3(x-2)^2 + 1$
- $g(x) = 3(x-1)^2 + 2$
- $j(x) = 3(x-2)^2 - 1$

1)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
	↘	2	↗

2)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
	↗	2	↘

3)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
	↘	1	↗

4)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
	↘	-1	↗

38 Même consigne qu'à l'exercice **37**

- $f(x) = 2(x-4)^2 + 5$
- $h(x) = 2(x-5)^2 + 4$
- $g(x) = 2(x+4)^2 - 5$
- $k(x) = 2(x-5)^2 - 4$

1)

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
		↘		↗	
			-5		

2)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
		↘		↗	
			5		

3)

x	$-\infty$		5		$+\infty$
		↘		↗	
			-4		

4)

x	$-\infty$		5		$+\infty$
		↘		↗	
			4		

39 Dresser les tableaux de variations des fonctions.

1) $f(x) = 5(x-7)^2 + 4$
2) $g(x) = -(x-3)^2 + 7$
3) $h(x) = -4(x+1)^2 - 3$
4) $k(x) = 2(x+1)^2 - 3$
5) $l(x) = -2(x+3)^2 - 3$
6) $m(x) = 6(x-8)^2 + 2$

40 Dresser les tableaux de variations des fonctions.

1) $k(x) = \dfrac{1}{4}\left(-2x - \dfrac{4}{7}\right)^2 - 7$

2) $f(x) = -2\left(\dfrac{2}{3}x - 1\right)^2 - \dfrac{2}{5}$

41 Mettre sous forme canonique chacune des fonctions polynômes du second degré ci-dessous.

1) $f(x) = (3x-6)^2 - 1$
2) $g(x) = (-2x-4)^2 + 5$
3) $h(x) = (4x+6)^2 + 3$
4) $l(x) = (-3x+7)^2 - 2$
5) $m(x) = 2(3x-12)^2 + 4$
6) $n(x) = \dfrac{1}{4}(-2x+8)^2 - 7$
7) $p(x) = -\dfrac{1}{3}(3x-5)^2 + 6$

42 Déterminer trois fonctions trinômes f, g et h qui vérifient chacune le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↘		↗	
			2		

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗	
			-4		

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
			3		
$h(x)$		↗		↘	

43 Trouver deux fonctions polynômes du second degré f et g telles que :

1) f admet un maximum de 3 pour $x = 2$;
2) g admet un minimum de 2 pour $x = -1$.

44 Trouver deux fonctions trinômes f et g qui vérifient les conditions suivantes :

- f est croissante sur $[1; +\infty[$;
- f est positive sur $\mathbb{R}$;
- g admet un minimum en $C(0,5; -0,5)$;
- g est négative sur $[-3; 4]$.

45 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction trinôme.
Déterminer sur quel ensemble $f(x) \geqslant 2$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	2	↘		↗	
					0		

46 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-2)^2 - 8$.

1) Calculer $f(4)$.
2) En déduire sur quel ensemble $f(x) \leqslant 0$.

47 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 16(x-3)^2 - 9$.

1) Factoriser g.
2) En déduire sur quel intervalle $g(x) > 0$.

Approfondir

48 **Avec un paramètre**

On considère l'équation **(E)** : $x^2 + 2x + m = 0$.

L'objectif de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de m l'équation **(E)** admet au moins une solution.

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ci-dessous.

a) $x^2 + 2x = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$

2) **a)** Vérifier que pour tout réel x :
$x^2 + 2x + m = (x+1)^2 - 1 + m$.

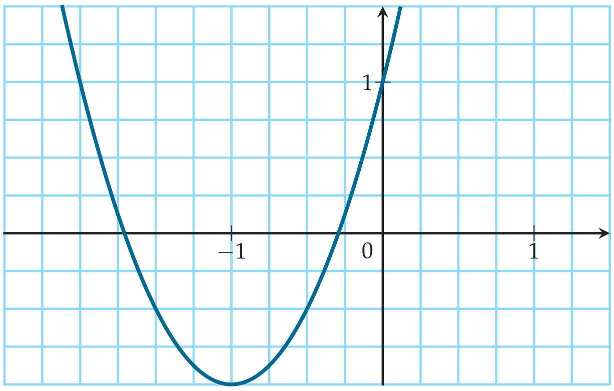
b) Justifier alors que résoudre l'équation **(E)** revient à résoudre l'équation $(x+1)^2 = 1 - m$.

c) Conclure.

49 Le graphique donne la courbe représentative d'un trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

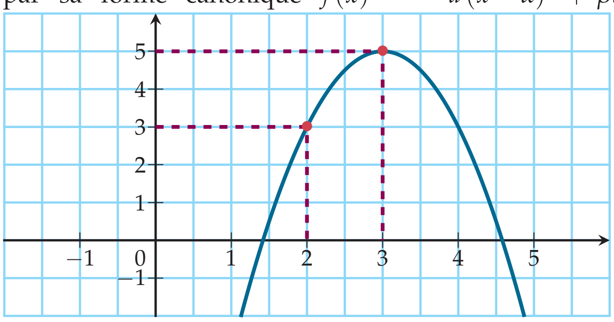
1) Donner par lecture graphique $f(0)$; $f(-1)$; $f(-2)$.

2) En déduire a, b et c puis l'expression de f.



50 **Avec la forme canonique**

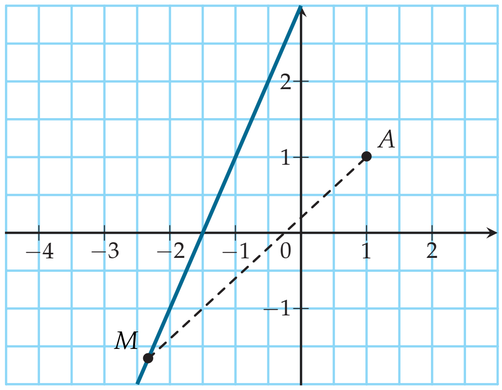
Ci-dessous est donnée la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction trinône f définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.



1) Lire graphiquement les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f.

2) Déterminer l'expression de $f(x)$.

51 On considère la droite d d'équation $y = 2x + 3$ et A le point de coordonnées $(1;1)$. M est un point quelconque de la droite d et on note x l'abscisse de M.



1) On définit la fonction f par : $f(x) = AM^2$.

a) Justifier que l'ordonnée de M est $y_M = 2x + 3$.
Vérifier que $f(x) = 5x^2 + 6x + 5$.

b) Vérifier que l'expression $5(x + 0,6)^2 + 3,2$ est la forme canonique du trinôme f.

c) Étudier les variations de la fonction f. Pour quelle valeur x_0 la fonction atteint-elle son extremum ?

d) M_0 est le point de la droite d tel que la distance AM^2 soit minimale. Justifier que les coordonnées de M_0 sont $(-0,6;1,8)$.

2) On considère le point B de coordonnées $(0;3)$.

a) Vérifier que B est un point de la droite d.

b) Déterminer la nature du triangle ABM_0.
Que peut-on dire des droites (AM_0) et d ?

52 Un artisan fabrique entre 0 et 60 vases par jour et estime que le coût de production de x vases est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$.
On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués. Un vase est vendu 50 €.

1) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

2) Calculer le coût, la recette et le bénéfice réalisée lorsque l'artisan vend 50 vases.

3) Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est :
$B(x) = -x^2 + 60x - 500$.

4) **a)** Développer l'expression : $-(x-30)^2 + 400$.

b) En déduire le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximum.

53 **Deux aires à comparer**

$VITE$ est un carré de côté 10 cm. O est un point du segment $[VI]$. $VOLA$ est un carré avec A sur le segment $[VE]$. Le but est de trouver la position de O pour que l'aire du carré $VOLA$ soit supérieure à l'aire du triangle TIO.

1) On note x la longueur VO. On appelle f la fonction donnant l'aire du carré $VOLA$ et g la fonction donnant l'aire du triangle TIO en fonction de x. Donner les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.

2) Quelle inéquation doit-on résoudre pour répondre au problème donné ?

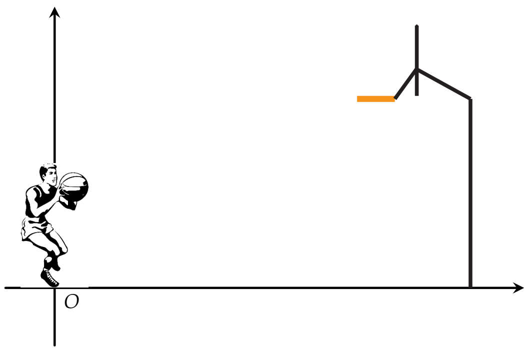
3) Voici une capture du logiciel **Xcas.**

$developper(x\hat{}2-4*(8-x))$
$5*x-100+x^2$
$factoriser(x\hat{}2-4*(8-x))$
(x-5)*(x+10)
$forme\_canonique(x\hat{}2-5*(8-x))$
$(x+2)^2-36$

Résoudre le problème donné en choisissant judicieusement l'écriture de $x^2-5(10-x)$.

54 **Le lancer franc** INFO

Lors d'un lancer franc au basket, le joueur se situe à environ 4,60 m du centre du panier, lui-même fixé à 3,05 m du sol.



Le joueur lance le ballon au niveau des épaules, c'est-à-dire à 1,65 m du sol. On admettra que, dans le repère choisi, la courbe décrite dans l'espace par le ballon est la parabole d'équation $y=-0,5x^2-1,95x+1,65$, où x est la distance horizontale, en m, du ballon au joueur et y la hauteur, en m, du ballon au sol.

Peut-on affirmer que le joueur a réussi son panier ? Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ?

55 **Coût moyen** INFO

Une usine fabrique du dissolvant liquide avec une production maximale quotidienne de 1 500 L. Lorsqu'elle produit x centaines de litres par jour, le coût de production, en euros, est donné par $C(x)=x^2+8x+64$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la quantité à produire pour minimiser le coût moyen.

1) Déterminer, par le calcul, le coût moyen lorsque l'usine fabrique 500 L, 1 000 L et 1 200 L.

2) Sur la courbe du coût (notée $\mathcal{C}$), sont placés les points M_1, M_2 et M_5 d'abscisses respectives 5, 10 et 15.
Déterminer les coefficients directeurs des droites (OM_1), (OM_2) et (OM_5).
Dans la suite de l'exercice, on admettra que le coût moyen de production de x centaines de litres est donné par le coefficient directeur de la droite (OM), avec M, point de la courbe $\mathcal{C}$ du coût d'abscisse x.

3) **Avec un logiciel de géométrie dynamique**

a) Tracer la courbe du coût sur son ensemble de définition.

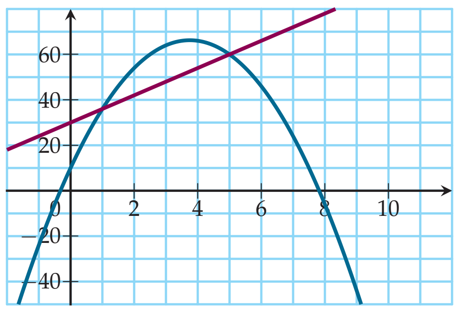
b) Placer un point M quelconque sur la courbe $\mathcal{C}$. Faire afficher le coefficient directeur de (OM).

c) Déplacer le point M et déterminer sa position pour laquelle le coût moyen semble minimal.

d) Démontrer que la droite d'équation $y=24x$ et la courbe $\mathcal{C}$ n'ont qu'un seul point d'intersection.

56 **Positions relatives**

Voici la droite (d) d'équation $y=6x+30$ et la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction $f: f(x)=-4x^2+30x+10$.



1) Démontrer, qu'étudier les positions relatives de la droite d et de la parabole $\mathcal{P}$ revient à résoudre l'inéquation $-4x^2+24x-20\geqslant 0$.

2) Vérifier que, pour tout réel x :
$-4x^2+24x-20=-4(x-3)^2+16$.

3) Résoudre alors l'inéquation $-4x^2+24x-20\geqslant 0$.

4) Conclure.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Reconnaître les formes d'une fonction trinôme :

- forme factorisée
- forme développée
- forme canonique

Choisir la forme la plus pertinente pour

- calculer une image ou un antécédent
- déterminer le sens de variation
- déterminer l'extremun de la fonction

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

57 Parmi les fonctions suivantes, quels sont les trinômes du second degré ?

ⓐ $4x^2 - 5x + 3$ ⓑ $4x^3 - 5x^2 - 3$ ⓒ $4x - 3$ ⓓ $6x^2 - 5$

58 Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont des formes canoniques de trinômes ?

ⓐ $(x-2)^2$ ⓑ $(3x-4)^2 - 8$ ⓒ $-2(x+6)^2 + 7$ ⓓ $5(x-3)^2 + 6x$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 12x + 54$.

59 Quelle est la forme canonique de la fonction f ?

ⓐ $(x-3)(-2x-18)$ ⓑ $-2(x-3)(x+9)$ ⓒ $-2(x+3)^2 + 72$ ⓓ $-2(x+3)^2 - 54$

60 Quelle est la forme factorisée de la fonction f ?

ⓐ $(x-3)(-2x-18)$ ⓑ $-2(x-3)(x+9)$ ⓒ $-2(x-3)^2 + 72$ ⓓ $-2(x+3)^2 - 18$

61 Pour calculer l'image d'un nombre par la fonction f, quelle est la forme la plus pertinente :

ⓐ la forme factorisée
ⓑ la forme développée
ⓒ la forme canonique
ⓓ cela dépend des valeurs

62 Pour calculer l'antécédent de 0 par la fonction f, quelle est la forme la plus pertinente :

ⓐ la forme factorisée
ⓑ la forme développée
ⓒ la forme canonique
ⓓ cela dépend des valeurs

63 Pour déterminer le sens de variation de la fonction f, quelle est la forme la plus pertinente :

ⓐ la forme factorisée
ⓑ la forme développée
ⓒ la forme canonique
ⓓ cela dépend des valeurs

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -9(x+2)^2 - 15$.

64 Sur l'intervalle $]-\infty; -2[$, la fonction f est :

(a) croissante (b) décroissante (c) non monotone

65 Sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet :

(a) un maximun en -2 (b) un minimun en -2 (c) on ne peut pas savoir

66 Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est :

(a) positive (b) négative (c) change de signe

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2(x+1)^2 + 18$.

67 Sur l'intervalle $]-4; 2[$, la fonction g est :

(a) croissante (b) décroissante (c) on ne peut pas répondre

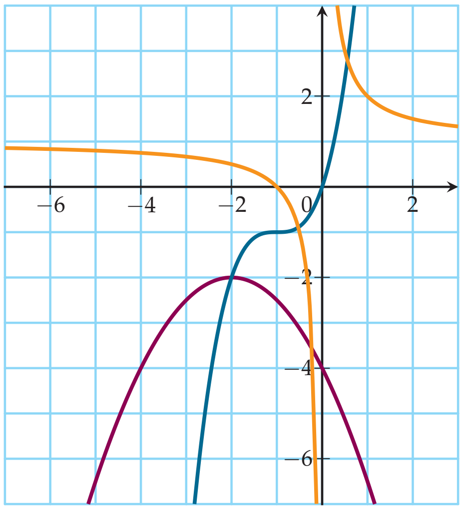
68 Sur $\mathbb{R}$, la fonction g admet :

(a) un maximum en -1 (b) un minimum en -1 (c) on ne peut pas répondre

69 Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est :

(a) positive (b) négative (c) change de signe

Voici les représentations graphiques de trois fonctions.



70 Quelle courbe représente une fonction trinôme ?

(a) La courbe jaune

(b) La courbe bleue

(c) La courbe rouge

71 La représentation graphique de la fonction trinôme admet :

(a) comme axe de symétrie, la droite d'équation $x = 0$

(b) comme centre de symétrie, le point de coordonnées $(-1, -1)$

(c) comme axe de symétrie, la droite d'équation $x = -2$

Travaux pratiques

TP 1 Modélisations en sciences physiques

Un des phénomènes étudiés en sciences physiques au lycée est la chute libre des corps.
Un corps en chute libre est un corps qui n'est soumis qu'à son poids.

1 Lâcher d'une bille sans vitesse initiale

On lâche une bille à 5 m du sol, sans vitesse initiale. Voici les relevés de cette expérience :

Temps (en s)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Distance parcourue (en m)	0,05	0,20	0,44	0,78	1,23	1,76	2,4	3,14	3,97	4,90

1) Dans un repère orthonormé, tracer le nuage de points correspondant au tableau ci-dessus. (Unité en abscisses : 10 cm pour 1 s, unité en ordonnées : 2 cm pour 1 m.)

2) Peut-on modéliser cette situation à l'aide d'une fonction affine ? Argumenter.

3) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Temps t (en s)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
t^2										
Distance d (en m)	0,05	0,20	0,44	0,78	1,23	1,76	2,4	3,14	3,97	4,90

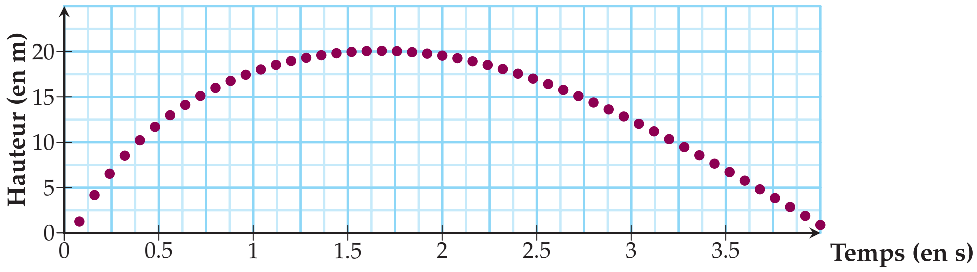
4) Quelle relation semble-t-il y avoir entre la deuxième ligne et la troisième ligne du tableau ? En déduire une relation entre t et d.

5) On lâche une bille à 6 m du sol. À quel instant touche-t-elle le sol ?

Un corps en chute libre aura sa position décrite par **une fonction du second degré** du temps t, appelée équation horaire du mouvement.

2 Étude du lancer d'une fusée à eau

Une expérience consiste à lancer une fusée à eau. À l'aide d'une caméra et d'un logiciel adapté, on relève la hauteur de la fusée en fonction du temps.



1) À quelle hauteur se trouve la fusée au bout de 1 s ? au bout de 3 s ?

2) On suppose que la hauteur en fonction du temps suit l'équation horaire de la chute libre, soit : $d(t) = -\frac{1}{2}g\,(t-\alpha)^2 + \beta$, avec g accélération de la pesanteur ($g \approx 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$).

a) Repérer le point le plus haut de la trajectoire. En déduire les valeurs de α et de β.

b) En déduire l'expression de $d(t)$.

c) Sur le graphique, tracer la parabole représentant d.
Que peut-on observer ? Ce modèle est-il satisfaisant ? Justifier.

3) a) Quelle fonction affine $d(t) = at + b$ peut modéliser l'équation horaire pour $t > 3$ s ?

b) Sur le graphique précédent, représenter la fonction affine d sur l'intervalle $[3;4]$.

c) Comment expliquer ce phénomène ?

TP 2 Famille de fonctions

INFO

Soit k un entier relatif. On souhaite étudier les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = -x^2 + kx.$$

À chaque valeur de k correspond une fonction f_k.
On note $\mathcal{P}_k$ la parabole représentant la fonction f_k.

1 Étude du cas particulier de la fonction f_2

Dans cette partie, on prendra $k = 2$.

1) Donner l'expression de $f_2(x)$.

2) Développer $-(x-1)^2 + 1$. Préciser son maximum sur $\mathbb{R}$.

3) Dresser son tableau de variations.

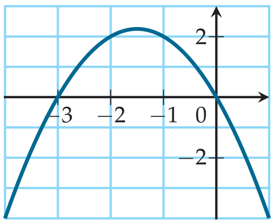
2 Étude graphique de la famille de fonctions

Dans cette partie, on utilise un logiciel de géométrie dynamique.

1) a) Représenter, dans un même repère, f_1, f_2, f_4, f_{-2} et f_{-6}.

b) Les cinq paraboles semblent passer par un même point, S. Préciser ses coordonnées.

c) Calculer $f_k(0)$. Que vient-on de vérifier ?



2) On a représenté ci-contre une parabole de la famille étudiée .

a) Déterminer graphiquement les antécédents de 0.

b) Factoriser $f_k(x) = -x^2 + kx$.
En déduire les solutions de l'équation $f_k(x) = 0$.

c) À quelle valeur de k correspond la parabole ci-contre ?

3 Une propriété de la famille de fonctions

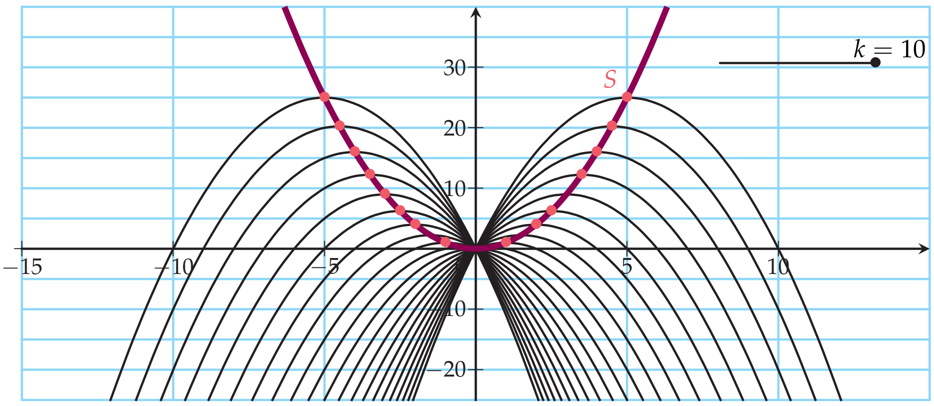
Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

1) Créer un paramètre k pouvant varier de -10 à 10, avec un pas de 1.
Créer la fonction $x \mapsto -x^2 + kx$.

2) Faire varier k. Vérifier les résultats des questions précédentes.

3) Activer la trace de la parabole puis faire varier k.
Parmi ces paraboles, sélectionner $\mathcal{P}_5$ et $\mathcal{P}_{-5}$. Les colorier en bleu.

4) Que représente le point S pour la parabole $\mathcal{P}_k$? Activer sa trace.
Tracer, en rouge, la courbe de la fonction carrée. Que constate-t-on ?



Travaux pratiques

TP 3 De l'utilité des racines

1 Pour factoriser

On étudie une méthode de factorisation.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 19x + 18$.

a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
Vérifier que les deux solutions trouvées graphiquement sont bien exactes.
On appelle a et b ces deux solutions.

b) Développer $(x-a)(x-b)$.

c) En déduire une factorisation de $f(x)$.

2) Reprendre les questions précédentes avec $g(x) = x^2 - x - 0,75$ et $h(x) = 3,6x^2 - 14,4x - 18$.

2 Pour optimiser

Dans cette partie, on considère les trinômes f, g et h de la partie précédente.

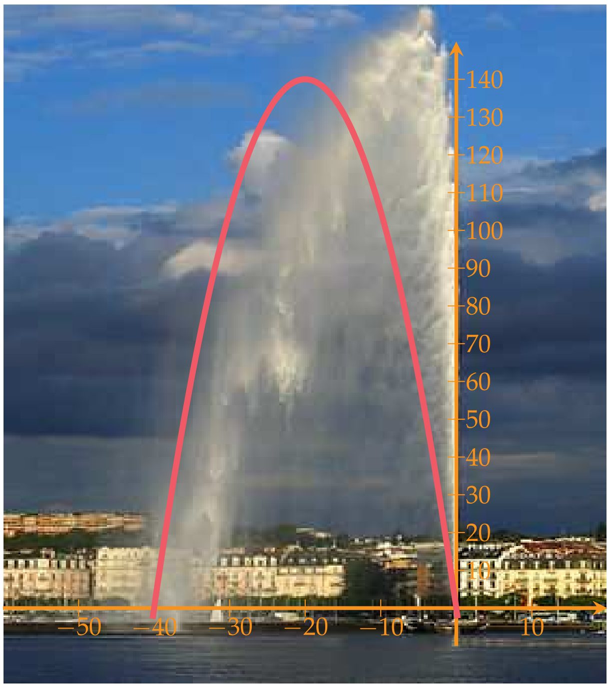
1) Par des considérations de symétrie, déterminer les coordonnées du sommet des paraboles.

2) En déduire la forme canonique de chacun des trinômes.

Récréation, énigmes

Un symbole

Le symbole de Genève est le "Jet d'eau", une fontaine de près de 140 m de haut.
L'eau, propulsée dans le ciel bleu sur fond de montagnes, retombe à une quarantaine de mètres plus loin.



On assimile la courbe formée par le jet d'eau à la parabole $\mathcal{P}$ dessinée ci-dessus.
Retrouver la fonction du second degré associée à celle-ci.

GÉOMÉTRIE

1

Espace

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Connaître les formules d'aires des figures usuelles
- Connaître les formules de volumes des solides usuels
- Se repérer dans une figure en perspective cavalière
- Construire un patron d'un solide usuel

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

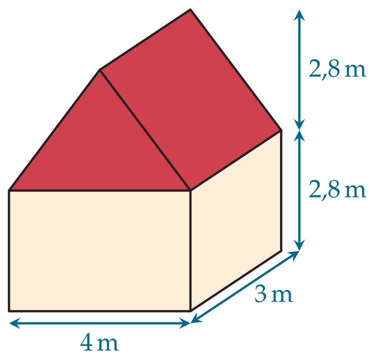
1 Calculer l'aire :

1) d'un triangle équilatéral de côté 4 cm ;
2) d'un triangle rectangle de côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm ;
3) d'un disque de diamètre 6 cm ;
4) d'une sphère de diamètre 6 cm.

2 Calculer le volume :

1) d'un prisme
   - de hauteur 6 cm ;
   - de base un triangle équilatéral de côté 4 cm.
2) d'un cylindre
   - de hauteur 4 cm ;
   - de rayon de base 3 cm.
3) d'une pyramide à base carrée
   - de côté 3 cm ;
   - de hauteur 4 cm.
4) d'une boule de diamètre 6 cm.

3 Voici la représentation en perspective cavalière d'un abri de jardin.



1) Construire le patron d'une maquette de cet abri au 1/100.
2) Calculer son volume.

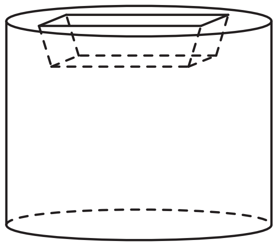
Voir solutions p. 259

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 À la manière de Gaudí

De retour d'un voyage à Barcelone, Jeanine, enthousiasmée par les réalisations de Gaudí, demande à son mari de construire une fontaine recouverte de mosaïque au milieu de leur patio.

Elle lui fournit le schéma ci-contre. La fontaine sera un cylindre dont le diamètre de la base mesure 75 cm et de hauteur 80 cm. Le bassin creusé à l'intérieur est un tronc de pyramide à base carrée de côté 50 cm et de hauteur 20 cm. Le fond du bassin, qui accueillera le siphon, est un carré de côté 10 cm.



1) Calculer le volume d'eau que peut contenir le bassin. Arrondir au litre près.
2) Calculer le volume de béton nécessaire à la construction de la fontaine. Arrondir au m^3 près.
3) Calculer l'aire de la surface de mosaïque nécessaire pour recouvrir la partie verticale de l'extérieur de la fontaine.

DÉBAT 2 Balayage

INFO

Partie 1 : Au sol

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et faire la figure suivante.

1) placer trois points A, B, C non alignés ;
2) tracer la droite (BC) ;
3) placer un point D sur la droite (BC) ;
4) tracer la droite (AD) et activer sa trace ;
5) déplacer le point D.

La droite (AD) balaye l'écran en laissant quelques zones vides.
Est-ce dû à une restriction imposée par la taille de l'écran ?

Partie 2 : Prendre de la hauteur

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace. Refaire la figure de la partie **1** .
Faire varier les angles de vue de la figure. Que remarque-t-on ?

ACTIVITÉ 3 Voir dans l'espace

INFO

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace.

1) Placer les points :
- A, B, C, D et O tels que $ABCD$ soit un rectangle de centre O ;
- un point S non coplanaire avec les précédents.

2) Construire la pyramide $SABCD$.
3) Pour chaque paire de droites ci-dessous, existe-t-il un plan qui les contienne toutes les deux ? Si oui, indiquer la position relative de ces deux droites.
a) (OA) et (SC) **b)** (AD) et (BC) **c)** (SB) et (AD)

Activités d'approche

ACTIVITÉ 4 Autour du parallélisme

INFO

1) Associer chaque propriété (admise) à la figure qui l'illustre.

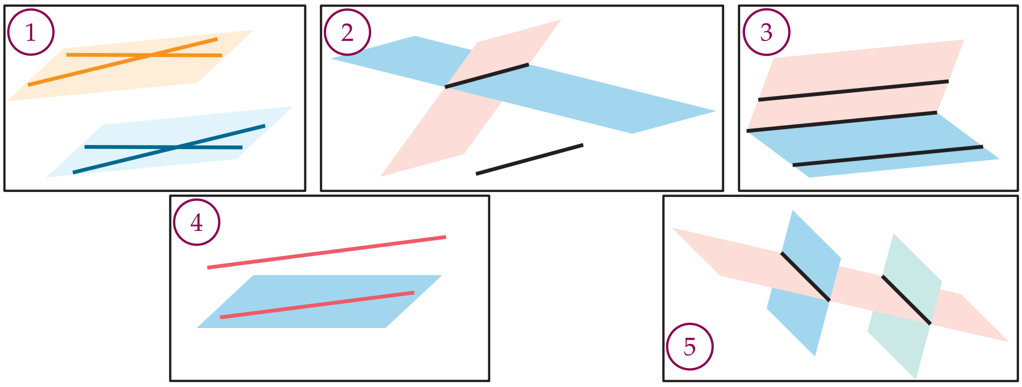
a) Une droite est parallèle à un plan
si et seulement si la droite est parallèle à une droite du plan.

b) Si deux plans sont parallèles,
alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersections sont parallèles.

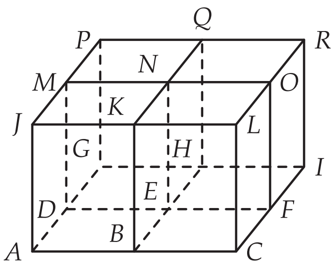
c) Théorème « du toit » : si une droite est parallèle à deux plans sécants,
alors elle est parallèle à la droite d'intersection de ces deux plans.

d) Si deux droites sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

e) Si deux droites sécantes d'un plan $(\mathcal{P})$ sont parallèles à deux sécantes d'un plan $(\mathcal{R})$,
alors les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{R})$ sont parallèles.



2) La figure ci-après est constituée de quatre pavés juxtaposés.



a) Citer trois plans parallèles à la droite (BH).

b) Un élève propose la propriété suivante : « *Si une droite d'un plan $(\mathcal{P})$ est parallèle à une droite d'un plan $(\mathcal{R})$, alors les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont parallèles* ». Que peut-on en penser ?
Donner si nécessaire un contre-exemple à l'aide de la figure ci-dessus.

3) Une autre élève propose : « *Si deux droites d'un plan $(\mathcal{P})$ sont parallèles à deux droites d'un plan $(\mathcal{R})$, alors les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{R})$ sont parallèles* ». Que peut-on en penser ?
Donner si nécessaire un contre-exemple à l'aide de la figure ci-dessus.

4) À l'aide d'un logiciel, construire un tétraèdre $ABCD$. Placer N, le milieu de l'arête $[DC]$, P, le milieu de $[DA]$ et M, un point libre sur l'arête $[DB]$.

a) Conjecturer la place du point M pour que les plans (MNP) et (ABC) soient parallèles.

b) Si M est à cette place, laquelle des cinq propriétés permet de montrer que (MNP) et (ABC) sont parallèles ? Démontrer la conjecture.

Cours - Méthodes

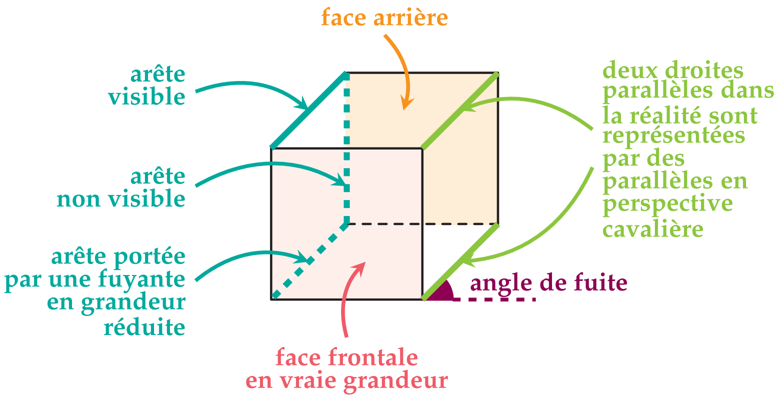
1. Les solides usuels

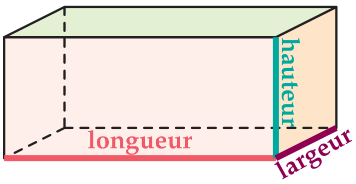
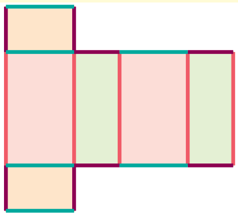
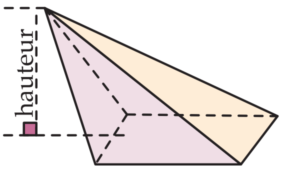
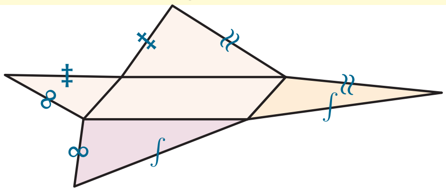
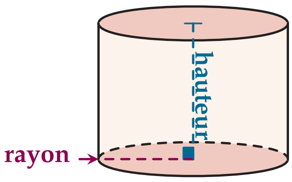
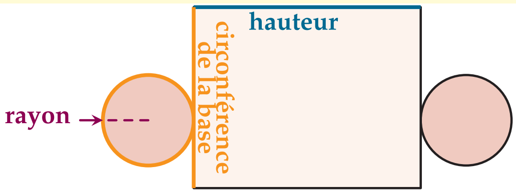
DÉFINITION

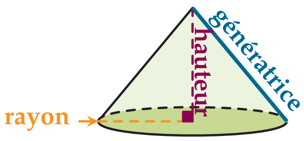
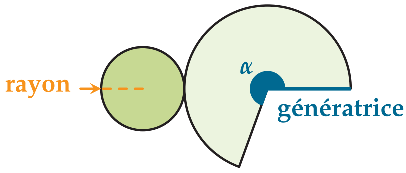
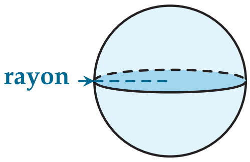
Un **solide** est un objet en relief.
On ne peut pas le tracer en vraie grandeur sur une feuille de papier plane.

Remarques :

- Un **patron** permet de **fabriquer** le solide par pliage.
- La **perspective cavalière** permet de représenter le solide sur une feuille papier en donnant l'impression de la 3D.



Parallélépipède rectangle	Le patron est composé de rectangles.
$\mathcal{V}$ = largeur $\times$ hauteur $\times$ profondeur	L'aire d'un rectangle est : $\mathcal{A}$ = Longueur $\times$ largeur
	 *Les segments de la même couleur ont même mesure*
Pyramides	Le patron est composé d'un polygone et de triangles.
$\mathcal{V}$ = (Aire de la base $\times$ hauteur) $\div$ 3	L'aire d'un triangle est : $\mathcal{A}$ = (base $\times$ hauteur) $\div$ 2
	
Cylindre de révolution	Le patron est composé d'un rectangle et de deux disques. L'aire d'un disque est : $\mathcal{A} = \pi \times$ rayon^2
$\mathcal{V}$ = Aire de la base $\times$ hauteur	
	

Cône de révolution $\mathcal{V}$ = Aire de la base × hauteur ÷ 3	Le patron est composé d'un disque et d'une portion de disque avec α = rayon ÷ génératrice × 360°
	
Sphère et boule	$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi \times \text{rayon}^3$ $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2$
	La sphère n'a pas de patron.

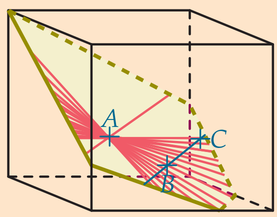
2. Droites et plans

A. Qu'est-ce qu'un plan ?

PROPRIÉTÉ

Soit A, B, C trois points de l'espace distincts et non alignés.

- Pour déterminer un plan, il suffit de donner 3 points non alignés ou 2 droites sécantes ou 2 droites parallèles (non confondues).
- Le **plan** noté (ABC) est constitué par les points des droites passant par A et parallèles ou sécantes à la droite (BC).

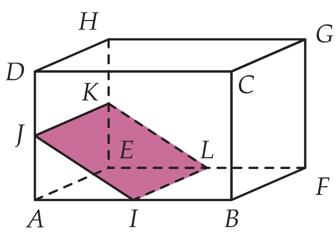


Remarque : Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane.

Exemple $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que :

- $AB = 7\,\text{cm}$
- $AD = 6\,\text{cm}$
- I est le milieu de $[AB]$
- J est le milieu de $[AD]$

1) Nommer le plan colorié.
2) Calculer la longueur BD.



Correction

1) Le plan colorié coupe les arêtes du pavé en I, J, K et L, (IJK) est donc un nom possible.
2) La face $ABCD$ du pavé est un rectangle donc le triangle ABD est rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore :
$BD^2 = BA^2 + AD^2 = 7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85$.
Une longueur est toujours positive donc $BD = \sqrt{85}$ cm.

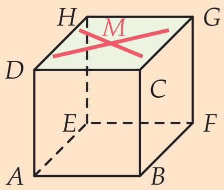
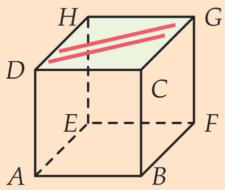
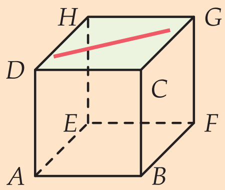
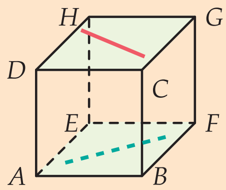
B. Positions relatives de deux droites

DÉFINITION

Deux droites incluses dans un même plan sont dites **coplanaires**.

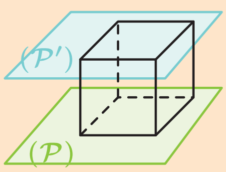
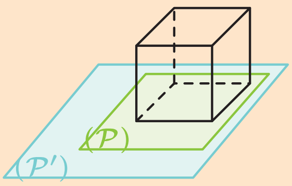
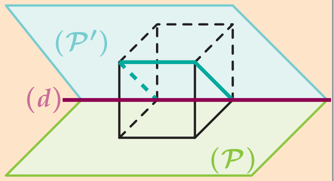
PROPRIÉTÉ

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires soit non coplanaires :

(d) et (d') sont coplanaires et			(d) et (d') sont non coplanaires
sécantes en M ou	strictement parallèles ou	confondues	
			

C. Positions relatives de deux plans

PROPRIÉTÉ

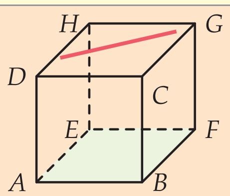
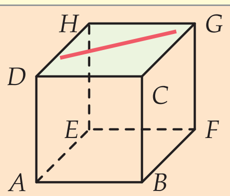
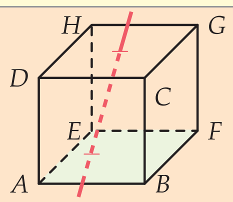
$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont strictement parallèles	$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus	$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants en (d)
		

- Un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

REMARQUE : Deux plans confondus sont considérés comme parallèles.

D. Positions relatives d'une droite et d'un plan

PROPRIÉTÉ

(d) est strictement parallèle à (ABF)	(d) est incluse dans (HDC)	(d) est sécante à (ABC)
		

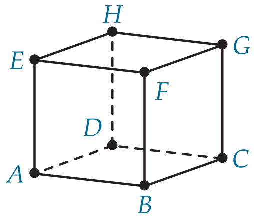
Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite du plan.

Activités mentales

1 Le volume d'un pavé est de 210 cm^3. La base de ce pavé est un rectangle de largeur 7 cm et de longueur 10 cm. Quelle est la hauteur de ce pavé ?

2 Que devient le volume d'un cube de 1 cm de côté lorsque l'on triple la longueur de ses arêtes ?

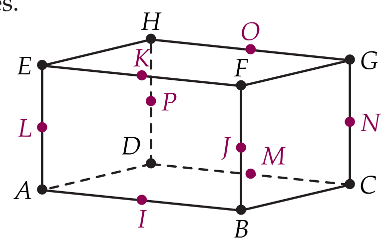
3 On a représenté en perspective, ci-dessous, un cube $ABCDEFGH$:



Utiliser cette figure pour citer deux droites NON matérialisées par un segment déjà tracé qui soient :
- parallèles ;
- sécantes ;
- non coplanaires.

4 Le cube de la question précédente a une arête de longueur 5 cm.
Combien mesurent les segments $[AC]$ et $[AG]$?

5 Voici la représentation en perspective du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les points I, J, K, L, M, N, O, P sont les milieux des arêtes sur lesquelles ils sont placés.



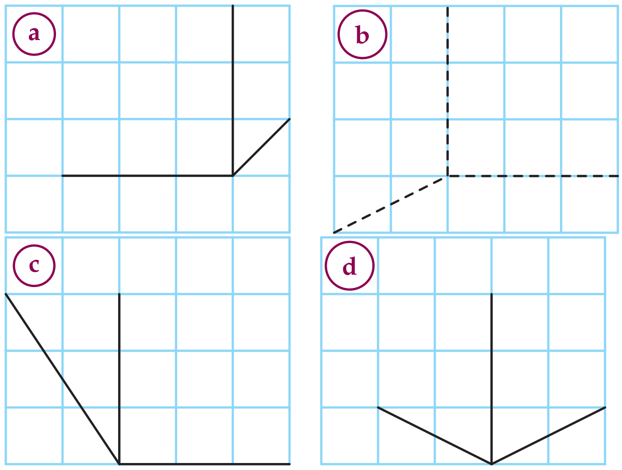
1) Citer :
- **a)** un plan parallèle au plan (EOA) ;
- **b)** un plan parallèle au plan (IMG) ;
- **c)** deux plans strictement parallèles au plan (KJN).

2) Citer une droite NON matérialisée par un segment déjà tracé qui soit :
- **a)** strictement parallèle au plan (EAB) ;
- **b)** strictement parallèle au plan (ADE) ;
- **c)** strictement parallèle au plan (AFG) ;
- **d)** strictement parallèle à chacun des deux plans (ABC) et (DGH).

3) Vrai ou Faux ?
- **a)** Le plan (IJN) est parallèle au plan (KPO).
- **b)** Les droites (IG) et (LO) sont coplanaires.
- **c)** La droite (LO) est parallèle au plan (KGC).

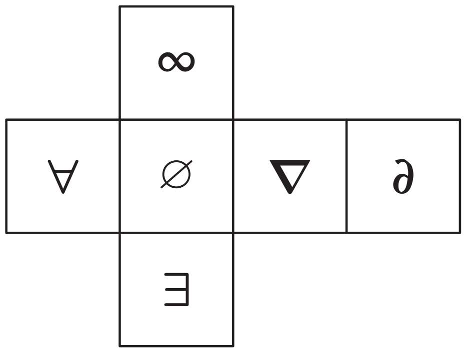
Représentation dans l'espace

6 Reproduire chaque figure et les compléter pour obtenir la représentation en perspective cavalière d'un cube.

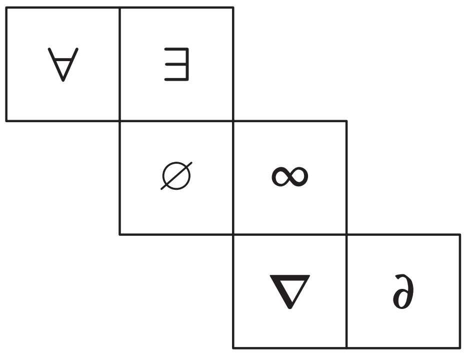


Pour les exercices 7 et 8 , on a représenté un patron d'un cube dont les arêtes mesurent 4 cm. Faire une représentation en perspective cavalière de ce cube et y reporter les motifs en noir sur les faces visibles et en rouge sur les faces invisibles.

7

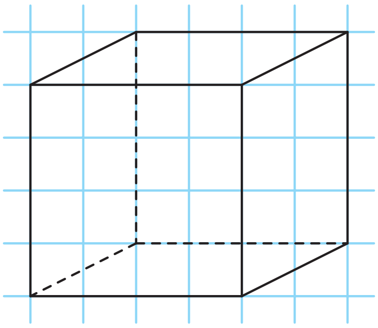


8



S'entraîner

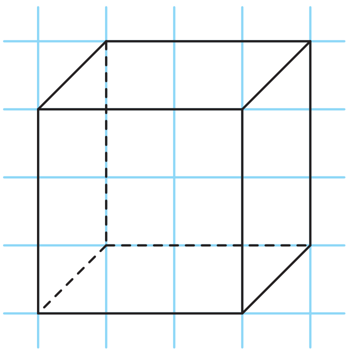
9 On a représenté ci-dessous, en perspective cavalière, un cube de côté 4 carreaux.



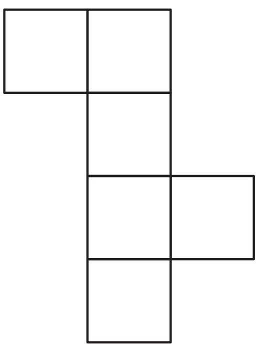
En respectant les mêmes règles de perspective, notamment l'angle de fuite et les proportions, construire :

1) un cube d'arêtes de longueur 6 carreaux ;
2) un cube d'arêtes de longueur 5 carreaux ;
3) un parallélépipède rectangle (pavé droit) de dimension 3, 5 et 6 carreaux ;
4) une pyramide de hauteur 6 carreaux à base carré dont le côté mesure 3 carreaux.

10 Même consigne qu'à l'exercice **9**.

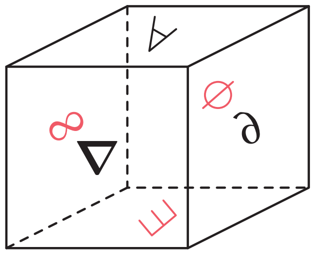


11 Le patron ci-dessous est le même que celui de l'exercice **7**. Dessine les symboles sur les faces.



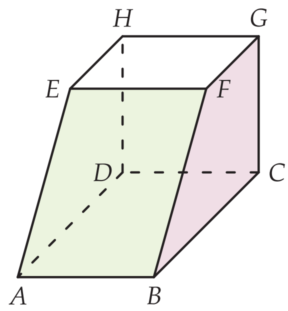
Patrons

12 Construire un patron de ce cube et y reporter les motifs sur chacune des faces.



Les motifs noirs sont sur des faces visibles et les motifs rouges sur des faces non visibles.

13 On considère le prisme droit $ABCDEFGH$ ci-contre. Les faces $EFGH$ et $DCGH$ sont des carrés de côté 2 cm et les faces $ADHE$ et $BCGF$ sont des trapèzes rectangles tels que $BC = AD = 5$ cm.

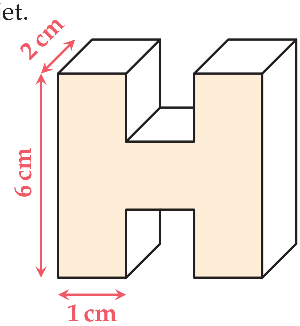


Construire, en justifiant les étapes de construction, le patron du prisme $ABCDEFGH$ en vraie grandeur.

14 On considère un tétraèdre régulier $ABCS$ de coté 4 cm. I est le milieu de $[AB]$.
Une hauteur du tétraèdre est le segment $[SH]$.

1) Représenter le tétraèdre en perspective cavalière.
2) Calculer la longueur IS.
3) Calculer la longueur SH.
4) Calculer le volume de $ABCS$.

15 Hélène voudrait confectionner son initiale en carton suivant le modèle ci-dessous. Proposer un patron de cet objet.



Volumes

16 Léa prépare des boules de chocolat pour ses enfants. Elle a acheté un moule en silicone comportant 24 cavités en forme de demi-sphères de 3 cm de diamètre.

Quel volume de chocolat est nécessaire pour fabriquer 24 boules pleines ?

17 Un camembert a la forme d'un cylindre de révolution de hauteur 3 cm et de diamètre 11 cm.

La part découpée dans le camembert photographié ci-dessus représente $\frac{1}{8}$ du camembert.

Quelle est le volume de la part ?

18 **En Égypte**

La pyramide de Khéops est un monument funéraire modélisé par une pyramide régulière à base carrée de côté 230,3 m.

À l'origine, sa hauteur était de 146,6 m. En raison de l'érosion, elle ne mesure plus que 138,7 m.

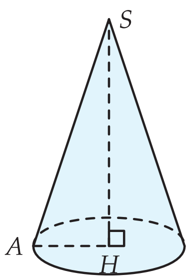
1) Représenter une réduction de cette pyramide en perspective cavalière.
   Préciser le coefficient de réduction choisi.
2) Quel volume de pierre a été nécessaire pour la construire ?
3) Quel volume a-t-elle perdu depuis sa construction ?

19 **Cône de révolution**

En faisant tourner le triangle AHS, rectangle en H, autour de (SH), on obtient le cône de révolution représenté ci-dessous où $AS = 6$ cm et $\widehat{ASH} = 15^\circ$.

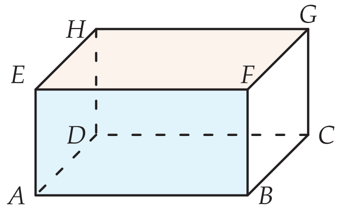
En donnant la valeur exacte puis la valeur approchée par défaut au dixième près, calculer :

1) le rayon du cercle de base ;
2) la hauteur du cône ;
3) le volume de ce cône.



Positions relatives

20 Soient $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.

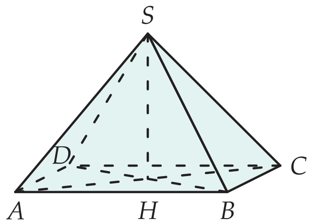


1) Les droites (AB) et (HG) définissent-elles un plan ? Si oui, nommer ce plan.
2) Les droites (AB) et (CG) définissent-elles un plan ? Si oui, nommer ce plan.
3) Citer trois droites parallèles à (FG).
4) Citer trois droites sécantes à (FG).
5) Citer trois droites non coplanaires à (FG).

21 Sur la pyramide $SABCD$ à base rectangulaire ci-dessous, H est le pied de la hauteur.

Donner les positions relatives des droites suivantes.

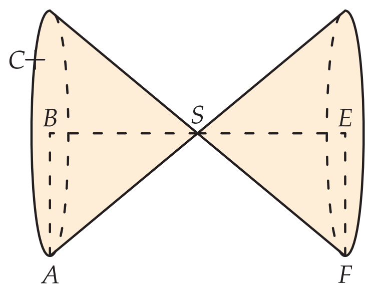
1) (AB) et (CD)
2) (SA) et (BD)
3) (HA) et (SC)
4) (BH) et (DB)



22 **Sablier**

Sur le sablier ci-dessous, donner les positions relatives du plan (ABC) et de la droite :

1) (AB) ; 2) (SE) ; 3) (EF).



23 **Alignés ?**

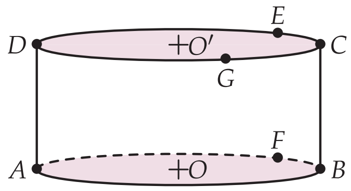
$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[AE]$.

1) Représenter le cube et y placer le point I.
2) La droite (IH) coupe le plan (ABC) en M.
   Démontrer que les points A, D et M sont alignés.

S'entraîner

24 **Camembert**

Un camembert est modélisé par un cylindre de révolution d'axe (OO').



1) Citer deux plans parallèles.

2) Citer trois plans sécants avec le plan (ABF).

On coupe le cylindre suivant la droite (GE) parallèlement à (CB). Le point F est tel que $(EF)//(CB)$.

3) Quelle sera la nature de la section obtenue ?

4) Que peut-on dire des plans (EFG) et (EOO') ?

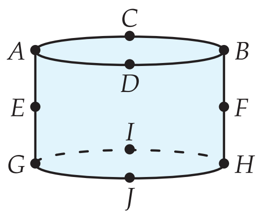
25 **Position relative de deux plans**

Sur le cylindre, E est le milieu de $[AG]$ et F celui de $[BH]$. Donner les positions relatives des plans :

1) (ABE) et (GHF)

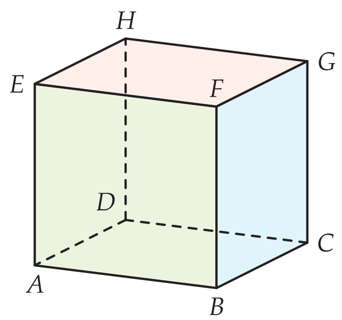
2) (ABC) et (GHJ)

3) (ACG) et (JHI)



26 **Intersections de plans**

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et I un point de $[AB]$.



1) Reproduire la figure ci-dessus et y placer le point I.

2) Construire sur cette figure :

- les intersections des plans (EHI) et (AFB) ;
- les intersections des plans (EHI) et (HDG) ;
- les intersections des plans (EHI) et (BDF) ;
- les intersections des plans (EHI) et (FBC).

Problèmes

27 On considère un cube $ABCDEFGH$.

1) Représenter ce cube en perspective cavalière.

2) **a)** Justifier que $EFCD$ est un parallélogramme.

b) En déduire que la droite (FC) est parallèle au plan (EBD).

3) **a)** Montrer que la droite (FH) est parallèle au plan (EBD).

b) En déduire la position relative des plans (FCH) et (EBD).

28 **Dans un tétraèdre**

$ABCD$ est un tétraèdre. I est le milieu de $[AD]$, $J \in [BD]$ et $K \in [CD]$ tels que $DJ = 0,75BD$ et $DK = 0,25DC$.

1) Représenter ce tétraèdre en perspective cavalière et y placer les points I, J, K.

2) Déterminer et construire (s'ils existent) les points :

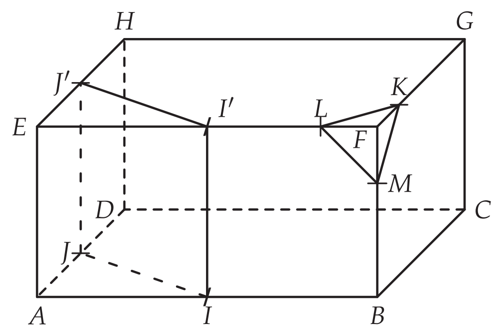
a) L, intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC) ;

b) M, intersection de la droite (IK) et du plan (ABC).

3) Déterminer, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (ABC).

29 On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ ci-dessous avec :

- $AB = 4\,\text{cm}$; $BC = 3\,\text{cm}$; $AE = 2\,\text{cm}$
- les points I, I', J et J' sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[EF]$, $[AD]$ et $[EH]$;
- les points K, L et M sont définis par :
  - $K \in [FG]$ avec $FK = 1\,\text{cm}$;
  - $L \in [FE]$ avec $FL = 1\,\text{cm}$;
  - $M \in [FB]$ avec $FM = 1\,\text{cm}$.

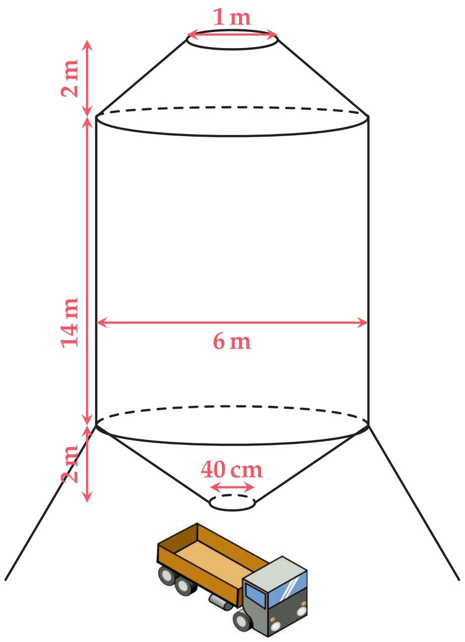


1) Faire un schéma à main levé du patron du polyèdre $IBCDJLMKGHJ'I'$.

2) Construire en vraie grandeur le patron du polyèdre.

30 Un silo à grain sert à stocker les récoltes en attendant de les livrer. Un silo se remplit par le haut à l'arrivée de la moissonneuse et se vide par le bas en remplissant les camions de livraisons.

Voici une représentation d'un silo à grain vue de face. Il s'agit un cylindre encadré par deux troncs de cône.



1) Quel est le volume de ce silo ?

2) Une benne céréalière peut contenir entre 57 et 79 m^3 de grain suivant les modèles. Quel est le nombre minimum de bennes nécessaires pour vider un silo aux trois quarts plein ?

31 **Rechercher l'information**

Représenter, en perspective cavalière et en respectant les proportions, la Tour de Belem, fortin gardant l'entrée de la ville de Lisbonne.

32 On considère l'algorithme suivant.

```
Algorithme : Volume
Entrées
   X : nombre
   Y : nombre
Liste des variables utilisées
   V1 : nombre
   V2 : nombre
   V : nombre
Traitements
   Donner à V1 la valeur de X*X*Y/3
   Donner à V2 la valeur de X*X*4
   Donner à V la valeur de V1+V2
Affichage
   Afficher 'Le volume est:' V
Fin de l'algorithme
```

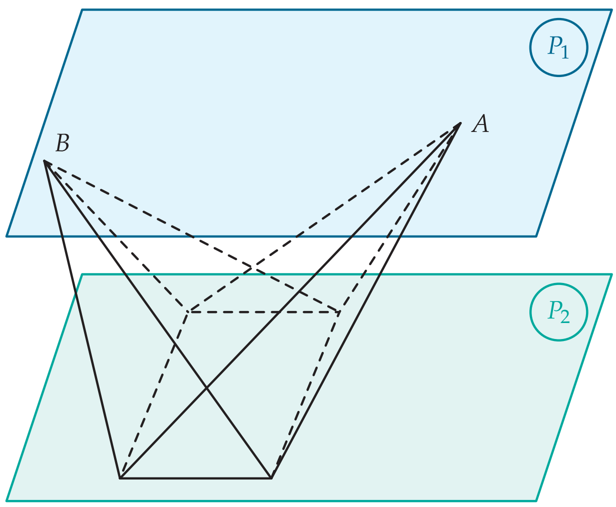
1) Que renvoie cet algorithme pour $X = 3$ et $Y = 6$?

2) $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont les volumes des deux solides classiques. Représenter en perspective cavalière un solide dont le volume serait calculé par cet algorithme.

33 Mélia et Thaïs observent cette figure sur laquelle les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles et les points A et B appartiennent au plan $\mathcal{P}_1$.

Mélia affirme que la pyramide de sommet B a un volume inférieur à celui de la pyramide de sommet A. Mais Thaïs pense que Mélia se trompe.

Qui a raison ?



Approfondir

34 $ABCDE$ est une pyramide telle que $BCDE$ soit un parallélogramme de centre O et de hauteur AO.

I est le milieu du segment $[AB]$.

J est le milieu du segment $[AC]$.

1) Représenter cette pyramide en perspective cavalière et y placer les points I et J.

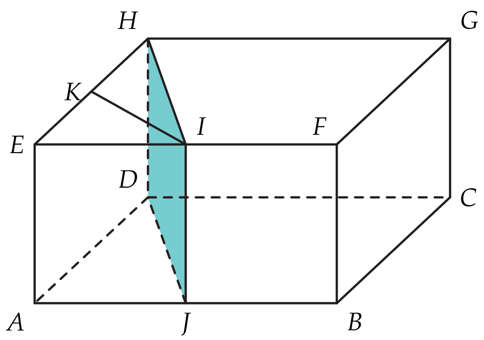
2) Préciser, en justifiant, les intersections :
  a) des plans (ABC) et (ACD) ;
  b) des plans (ABD) et (AEC) ;
  c) de la droite (AO) et du plan (BED) ;
  d) des droites (DI) et (AO).

3) Démontrer que la droite (IJ) et le plan (BCD) sont parallèles.

4) Démontrer que la droite (IJ) et la droite (ED) sont parallèles.

5) En déduire l'intersection des plans (ABC) et (EID).

35 Utiliser le pavé ci-dessous pour montrer que les propriétés suivantes sont fausses.



- « Si deux plans sont parallèles, alors toute droite contenue dans l'un des plans est parallèle à toute droite de l'autre plan » ;
- « Toute section dans un pavé droit est un rectangle » ;
- « Si une droite contenue dans un plan est parallèle à une autre droite contenue dans un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles ».

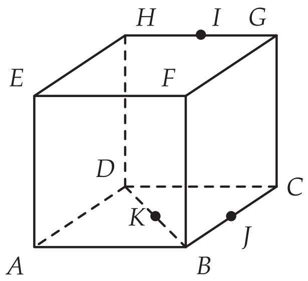
36 **Tournez triangle** ALGO

Le triangle SAO rectangle en O engendre un cône de révolution en tournant autour de $[SO]$. À partir de :

- la longueur SO
- l'angle $\widehat{ASO}$

proposer un algorithme calculant les dimensions nécessaires à la confection de ce cône.

37 Dans le cube représenté ci-dessous, I, J et K sont les milieux des segments sur lesquels ils sont situés.



Pour chaque question, indiquer et justifier si les droites proposées sont sécantes.

1) (FG) et (AH).

2) (AH) et (BI).

3) (AI) et (JG).

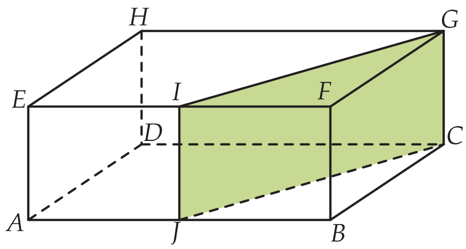
4) (FB) et (HK).

38 $ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que :

- $AB = 8\,\text{cm}$;
- $AD = 4\,\text{cm}$;
- $AE = 3\,\text{cm}$.

On appelle I le milieu de $[EF]$ et J celui de $[AB]$.

On coupe le solide par un plan passant par I, J, C et G.



Partie A : étude d'un patron

1) Quelle est la nature de $IJCG$? Justifier.
Représenter JBC puis $IJCG$ en vraie grandeur.

2) Calculer la longueur JC.
On donnera la valeur exacte sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels puis la valeur arrondie au mm près.

3) Quelle est la nature du solide $AJCDEIGH$? Tracer un patron possible.

Partie B : fabrication en grande quantité

Le patron du solide $AJCDEIGH$ est utilisé pour fabriquer une boîte en carton. Une entreprise confectionnant ces boîtes souhaite optimiser ses coûts de production.

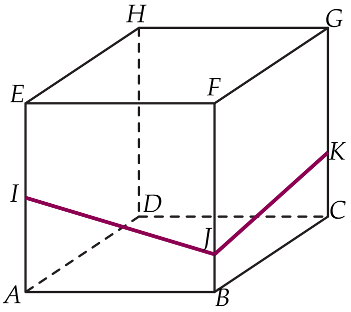
1) Positionner les faces pour faire tenir le patron dans un carré de 15 cm de côté.

2) De quelle longueur de carton de 3 m de large a-t-on besoin pour fabriquer 1 000 boîtes ?

39 Intersections cube-plan et plan-plan

La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$ en perspective cavalière. Les points I, J et K sont des points des arêtes respectives $[AE]$, $[BF]$ et $[CG]$ tels que :

- $BJ = \frac{1}{5}BF$
- $CK = \frac{1}{3}CG$
- I milieu de $[AE]$



Partie A : construction

Reproduire cette figure en perspective cavalière. Cette figure sera complétée au fur et à mesure des questions, *sans effacer les traits de construction*.

Partie B : intersection de (IJK) et (ABC)

1) Quelle est la nature de l'intersection des plans (ABC) et (IJK) ?

2) Justifier que les droites (JK) et (BC) sont sécantes.
En déduire l'intersection du plan (ABC) et de la droite (JK).
La représenter précisément sur la figure.

3) Construire de même l'intersection du plan (ABC) et de la droite (IJ).

4) En déduire l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
Justifier et la représenter sur la figure.

Partie C : intersection du plan (IJK) avec les faces du cube

1) Justifier que les plans (IJK) et (ADE) sont sécants selon une droite parallèle à (JK).

2) Construire sur la figure l'intersection du plan (IJK) et de la face $ADHE$.
On appellera L le point d'intersection entre le plan (IJK) et l'arête $[HD]$.

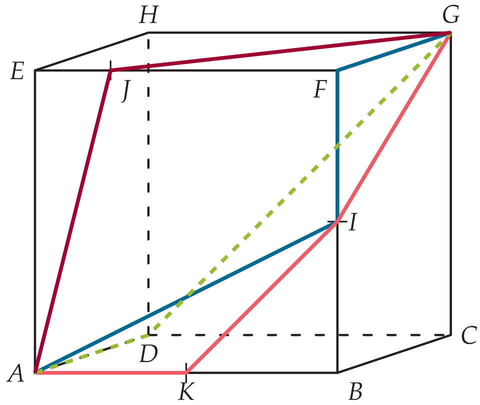
3) Terminer la construction de l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube.

4) Comment vérifier que la construction du point L est correcte ? (Il y a plusieurs possibilités graphiques).

40 Inspiré par *La révolution des fourmis*, Bernard Werber

$ABCDEFGH$ est un cube de 4 cm de côté avec :

- I, le milieu du segment $[BF]$;
- K, le milieu du segment $[AB]$;
- J, le point de $[EF]$ tel que $EJ = \frac{1}{4}EF$.



Partie A : promenade de santé

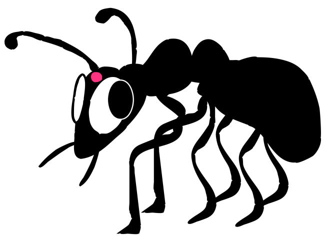
Cinq fourmis se déplacent en ligne droite sur les faces du cube. Elles souhaitent effectuer le trajet séparant A de G. Chacune choisit un chemin différent.

- La fourmi 1 passe par J.
- La fourmi 2 passe par I puis F.
- La fourmi 3 passe par D.
- La fourmi 4 passe par K puis I.

Calculer la distance exacte parcourue par chaque fourmi et en donner la valeur arrondie au centième près.

Partie B : optimisation

La cinquième, celle avec une marque de vernis à ongles, a lu le lièvre et la tortue.



Avant de partir, elle réfléchit à un parcours plus court que celui de ses congénères.

1) Existe-t-il un parcours le plus court possible ?

2) A-t-elle plusieurs options ?
Les déterminer.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Pour les solides usuels :

- cube
- cylindre
- cône
- pavé
- pyramide
- sphère

- Savoir les représenter en perspective cavalière
- Savoir construire un patron
- Savoir reconnaître un patron

Sur une représentation d'un objet :

- Repérer les angles droits.
- Calculer des longueurs.

Connaître et utiliser

- le vocabulaire : coplanaire, parallèle, sécant.
- la notion de parallélisme dans l'espace.

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

41 Lorsque l'on double le rayon d'une sphère, son volume est multiplié par :

(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) autre

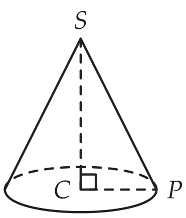
42 Lorsque l'on double la hauteur d'une pyramide, son volume est multiplié par :

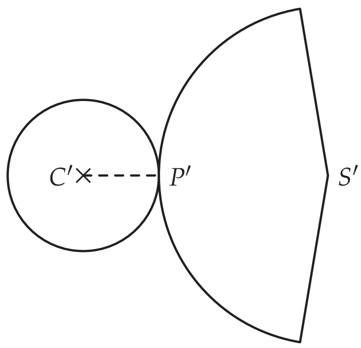
(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) autre

43 Le volume d'un cylindre de hauteur 10 cm est de 160π cm^3. Son rayon mesure :

(a) 2 cm (b) 4 cm (c) 16 cm (d) autre

Ci-contre, on a représenté en perspective cavalière un cône de sommet S.
C est le centre du disque de base.
P est un point du cercle de base.
Le rayon du disque de base est 2 cm et la hauteur 3 cm.
Une ébauche du patron de ce cône est représentée à sa droite.
L'objectif des questions suivantes est de préciser des éléments de ce patron.





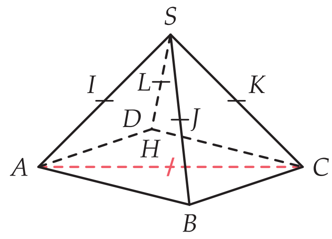
44 La longueur du rayon $S'P'$ est égale à :

(a) $\sqrt{13}$ cm (b) $2\sqrt{3}$ cm (c) 3 cm

45 L'angle au centre du secteur circulaire de sommet S' mesure à peu près :

(a) 180° (b) 135° (c) 241° (d) 200°

Pour les questions suivantes, on utilise la figure ci-contre où est représentée en perspective cavalière une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée. Les côtés du carré de base mesure 4 cm et les autres arêtes mesurent 8 cm.
Les points I, J, K, L représentent les milieux respectifs des arêtes sur lesquelles ils sont tracés. Le point H est le centre du carré $ABCD$.



46 Le triangle AJB est :

(a) isocèle (b) rectangle (c) équilatéral (d) autre

47 La longueur du segment $[IJ]$ est :

(a) $\sqrt{2}$ cm (b) 2 cm (c) 3 cm (d) autre

48 Le quadrilatère $AHKI$ est un :

(a) losange (b) trapèze (c) parallélogramme

49 Le triangle SJK est :

(a) isocèle (b) rectangle (c) équilatéral (d) Autre

50 Le quadrilatère $BDLJ$ est un :

(a) losange (b) trapèze (c) parallélogramme

51 L'aire du quadrilatère $IJKL$ est :

(a) 4 cm^2 (b) 8 cm^2 (c) 12 cm^2 (d) 16 cm^2

52 Les droites (LJ) et (DC) sont :

(a) sécantes (b) parallèles (c) non coplanaires

53 Les plans (ILJ) et (DBC) sont :

(a) sécants (b) strictement parallèles (c) confondus

54 Les droites (SJ) et (DK) sont :

(a) sécantes (b) parallèles (c) non coplanaires

55 La longueur, en cm, de la hauteur $[SH]$ est :

(a) 8 (b) 56 (c) $\sqrt{32}$ (d) $2\sqrt{14}$

56 Le volume, en cm^3, de la pyramide $SABCD$ est :

(a) $16\sqrt{14}$ (b) $\frac{32}{3}\sqrt{14}$ (c) $\frac{32}{24}\sqrt{14}$ (d) $\frac{32}{3}\sqrt{56}$

57 Le volume, en cm^3, de la pyramide $SIJKL$ est :

(a) $8\sqrt{14}$ (b) $\frac{16}{24}\sqrt{56}$ (c) $\frac{4}{3}\sqrt{14}$ (d) $\frac{32}{3}\sqrt{14}$

Travaux pratiques

TP 1 Section de cube

INFO

1 Dessine-moi un cube

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dans l'espace.

2) Place quatre points A, B, C et D tels que $ABCD$ soit un carré.

3) Compléter la figure avec les points E, F, G et H pour que $ABCDEFGH$ soit un cube.

4) Enregistrer la figure deux fois, l'une avec le nom `PetiteTranche`, l'autre avec le nom `Octaèdre`.

2 Avec PetiteTranche

1) Ouvrir le fichier `PetiteTranche`.

2) Placer I, J, K, L, M et N les milieux respectifs de $[AD]$, $[DC]$, $[CG]$, $[GF]$, $[EF]$ et $[AE]$.

3) Construire l'hexagone $IJKLMN$.

4) Est-ce une section du cube (autrement dit, les points I, J, K, L, M, et N sont-ils coplanaires) ? Faire pivoter la figure pour émettre une conjecture avant de justifier.

5) Cet hexagone est-il régulier ? Justifier.

3 Avec Octaèdre

1) Ouvrir le fichier Octaèdre

2) Créer les points I, J, K, L, M, N milieux respectifs des côtés suivant du cube : $[AC]$, $[BG]$, $[GE]$, $[ED]$, $[EB]$ et $[GD]$.

3) Créer deux pyramides de base $JNLM$ et de sommets K et I. On obtient un octaèdre.

4) Combien l'octaèdre a-t-il de faces ? De sommets ? D'arêtes ?

5) Le cube de départ a pour côté quatre unités. Calculer :

- **a)** la longueur d'une arête de l'octaèdre ;
- **b)** l'aire de l'octaèdre ;
- **c)** le volume de l'octaèdre.

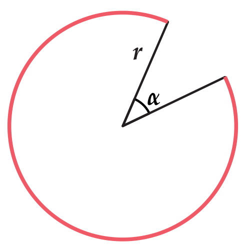
6) Construire un patron de l'octaèdre en prenant comme unité le centimètre.

TP 2 Chapeau chinois

INFO

1 Établir une formule

1) La longueur de l'arc de cercle, en rouge sur la figure, correspond au périmètre de la base du cône une fois formé et il est proportionnel à l'angle au centre β ($\beta = 360^\circ - \alpha$).
Établir que le rayon de la base du cône en fonction de r et α est :
$\mathcal{R}(r, \alpha) = r\left(1 - \dfrac{\alpha}{360}\right)$.



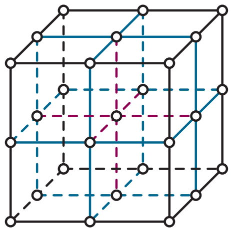
2) La longueur de la génératrice du cône est le rayon r du patron. Montrer que la hauteur du cône en fonction de r et α est : $\mathcal{H}(r, \alpha) = r\sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{\alpha}{360}\right)^2}$.

3) Déduire des questions précédentes le volume $\mathcal{V}(r, \alpha)$ du cône en fonction de r et α.

2 Optimiser

On fixe $r = 10\,\text{cm}$. Estimer, au degré près, la valeur de l'angle α pour laquelle le volume est maximum en utilisant l'outil numérique de votre choix.

TP 3 Cristallographie



En chimie, la cristallographie désigne l'étude de la géométrie microscopique des solides. Les chercheurs ont découvert qu'à l'intérieur d'un cristal, les atomes et/ou les ions sont arrangés suivant des motifs qui se répètent.

Le motif d'un cristal de NaCl (chlorure de sodium) est inscrit dans un cube de 564 pm (picomètre) de côté.

1) Reproduire la figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

2) Un ion Na^+ se situe à chaque sommet du cube et au centre de chaque face.

- **a)** Colorier les points de la figure où se situent les ions Na^+ en bleu.
- **b)** Combien y a-t-il d'ions Na^+ dans un motif ?
- **c)** Les ions sont considérés comme sphériques. Le rayon atomique de l'ion Na^+ est de 180 pm. Quel est le volume occupé par les ions Na^+ du motif ?

3) Un ion Cl^- se situe au milieu de chaque arête et au centre du cube.

- **a)** Colorier les points de la figure où se situent les ions Cl^- en rouge.
- **b)** Combien y a-t-il d'ions Cl^- dans un motif ?
- **c)** Le rayon atomique du ion Cl^- est de 100 pm. Quel est le volume occupé par les ions Cl^- ?

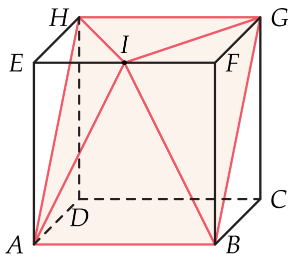
4) La compacité d'un cristal est donné par la formule : compacité $= \dfrac{\text{volume occupé par les ions}}{\text{volume du motif}}$

Quelle est la compacité du cristal de NaCl ?

TP 4 Puzzle dans un cube

ALGO

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4 cm. I est le milieu de $[EF]$.



1 Construction

1) Construire un patron du prisme à base triangulaire $AEHBFG$.

2) Construire un patron des tétraèdres $IFBG$ et $IEAH$.

3) Construire un patron de la pyramide $IABGH$.

2 Calculs

1) Calculer le volume du prisme à base triangulaire $ADHBCG$.

2) Calculer les volumes des tétraèdres $IFBG$ et $IEAH$.

3) En déduire le volume de la pyramide $IABGH$.

4) Calculer l'aire du rectangle $ABGH$ et en déduire la hauteur de cette pyramide.

3 Production

Un entreprise fabrique un puzzle à partir des solides étudiés précédemment.

La pyramide $IABGH$ est fabriquée en rose et les autres pièces en vert.

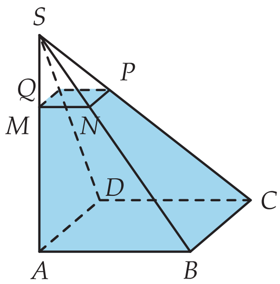
1) Proposer un algorithme qui, à partir de la longueur de l'arête du cube $ABCDEFGH$, calcule le volume de la pyramide $IABGH$.

2) Calculer le volume de plastique rose nécessaire pour fabriquer 1 000 puzzles dans un cube d'arête 10 cm et 1 000 puzzles dans un cube d'arête 60 cm.

Travaux pratiques

TP 5 À moitié vide ou à moitié plein ?

Un récipient est modélisé par une pyramide comme sur la figure ci-contre.



1 Données fixes

$SABCD$ est une pyramide à base carrée de hauteur $[SA]$ telle que $AB = 9\,\text{cm}$ et $SA = 12\,\text{cm}$.

Les triangles SAB et SAD sont rectangles en A.

Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

2 Remplissage

On remplit ce récipient d'eau et on appelle x la hauteur de l'eau en cm.

M est le point de $[SA]$ tel que $MA = x$.

On appelle $MNPQ$ la section de la pyramide $SABCD$ par le plan parallèle à la base passant par M. L'eau occupe donc un tronc de pyramide $ABCDMNPQ$.

On note $\mathcal{V}(x)$ le volume de la pyramide $SMNPQ$.

1) Quelles sont les valeurs que peut prendre x ?

2) Montrer que $MN = \dfrac{3}{4}(12 - x)$ et que $\mathcal{V}(x) = \dfrac{3}{16}(12 - x)^3$.

3) Montrer que la hauteur x en cm atteinte par l'eau pour que la pyramide soit remplie à la moitié de son volume doit vérifier l'équation : $(12 - x)^3 = 864$.

4) En déduire un arrondi au mm de la hauteur atteinte par l'eau quand la pyramide est remplie à moitié (détailler la méthode utilisée).

Récréation, énigmes

Architecture

Voici la Grande Arche de la Défense à Paris et la Puerta de Europa à Madrid.

1) Représenter ces deux bâtiments en perspective cavalière.

2) Réaliser un patron permettant de construire une maquette au 1/1 000 de chacun de ces bâtiments. On prendra comme dimensions réelles :

pour l'arche de la Défense : 100 m pour la longueur de l'arête du cube extérieur et 70 m pour la longueur de l'arête du cube intérieur ;

pour la puerta de Europa : 115 m de hauteur, une inclinaison de 15° et la base est un carré d'aire environ 1 170 m^2.

GÉOMÉTRIE

2

Repérage dans le plan

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Soustraire des nombres relatifs
- Utiliser le théorème de Pythagore
- Calculer une distance entre deux points sur un axe
- Calculer avec des racines carrées
- Utiliser les théorèmes des droites des milieux
- Reconnaître un triangle ou un quadrilatère particulier

Auto-évaluation

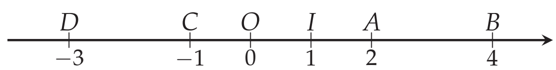
Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Calculer :

1) $(-2)+(+4)$ **3)** $(-7)+(-4)$

2) $(-3)-(-5)$ **4)** $(+6)-(+8)$

2 Voici un axe gradué (OI).
Calculer les distances : AB ; AC ; BD et DC.



3 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a entier relatif et b entier positif le plus petit possible.

1) $\sqrt{8}$ **4)** $\sqrt{8}+\sqrt{18}$

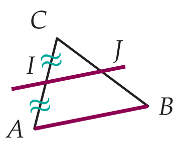
2) $\sqrt{12}$ **5)** $3\sqrt{75}-2\sqrt{27}$

3) $\sqrt{45}$ **6)** $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

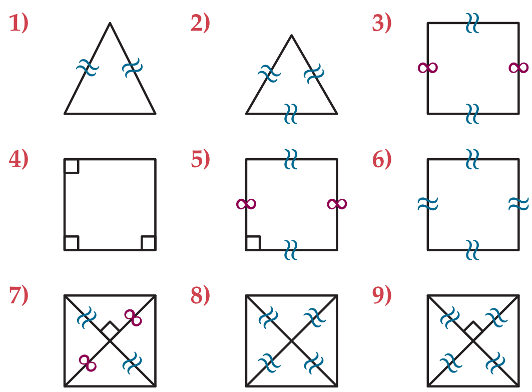
4 EAU est un triangle rectangle en A.
Écrire la relation de Pythagore de ce triangle.

5 EAU est un triangle tel que $EA = 4{,}8$ cm ; $AU = 6{,}4$ cm et $EU = 8{,}1$ cm.
Ce triangle est-il rectangle ?

6 $(IJ)//(AB)$. Quel est le milieu de $[BC]$?



7 D'après le codage, quelle est la nature de chacun des triangles et quadrilatère ci-dessous ?



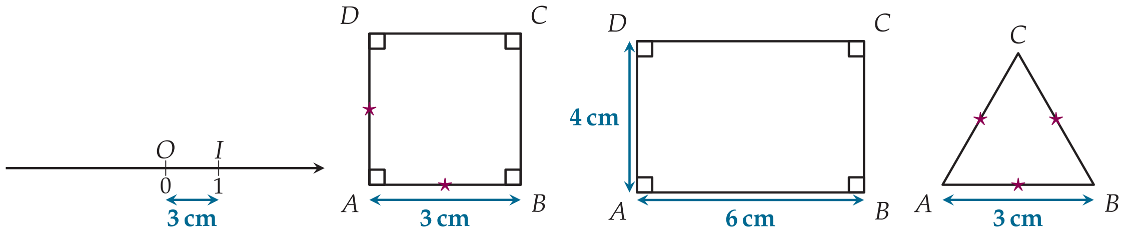
Voir solutions p. 259

Activités d'approche

DÉBAT 1 À la recherche du point perdu

Se mettre par équipe de quatre.

- Reproduire chacun des schémas ci-dessous en vraie grandeur.



- Le professeur viendra placer un point M aléatoirement sur l'un des schémas.
- Décrire avec précision la position du point M afin que les autres groupes de la classe puissent essayer de le placer exactement au même endroit.

L'équipe qui arrivera à faire placer son point M correctement par toutes les autres équipes gagnera deux points, celle qui y arrivera avec le moins d'informations gagnera trois points.

ACTIVITÉ 2 Perdu au milieu

L'objectif de cette activité est de conjecturer puis de prouver la formule donnant les coordonnées du milieu d'un segment à partir des coordonnées des extrémités de ce segment.

Le plan est muni d'un repère $(O; I, J)$.

1) Placer deux points A et B de coordonnées entières.

2) Construire le point M milieu du segment $[AB]$; lire ses coordonnées.
Conjecturer la formule donnant les coordonnées de M à partir de celles des points A et B.

On considère maintenant deux points A et B tels que $y_A < y_B$.

3) Placer le point M, milieu de $[AB]$ et le point C le point de coordonnées $(x_B; y_A)$.

4) Que peut-on dire des droites (AC) et (BC) par rapport aux axes du repère ?

5) Tracer la droite parallèle à (AC) passant par M. Elle coupe $[BC]$ en N.
Que peut-on dire du point N ?

6) En considérant la droite (BC) comme un axe de même unité que l'axe des ordonnées et d'origine son intersection avec l'axe des abscisses, calculer la distance BC.

7) En déduire la distance CN puis l'ordonnée du point N.

8) Refaire le raisonnement dans le cas où $y_A > y_B$.

9) Déterminer l'abscisse du point M.

ACTIVITÉ 3 Tenir la distance

L'objectif de cette activité est de prouver la formule donnant la distance entre deux points à partir des coordonnées de ces deux points.

On considère deux points A et B dans un repère $(O; I, J)$ orthonormé.

1) Placer le point C de coordonnées $(x_B; y_A)$.

2) Exprimer, en fonction des coordonnées des points A, B et C, les distances AC et BC.

3) Que peut-on dire du triangle ABC ? Calculer la distance BC.

1. Coordonnées d'un point dans un repère

Pour repérer un point dans le plan, on définit un repère et on indique les coordonnées de ce point dans le repère.

DÉFINITION

Définir un repère, c'est donner trois points O, I et J non alignés dans un ordre précis.
On note $(O; I, J)$ ce repère.

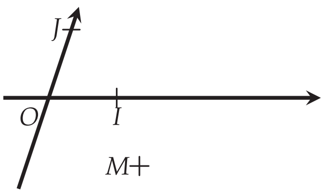
- Le point O est appelé l'**origine du repère**.
- La droite (OI) est l'**axe des abscisses** orienté de O vers I.
  La longueur OI indique l'unité sur cet axe.
- La droite (OJ) est l'**axe des ordonnées** orienté de O vers J.
  La longueur OJ indique l'unité sur cet axe.

MÉTHODE 1 Lire des coordonnées

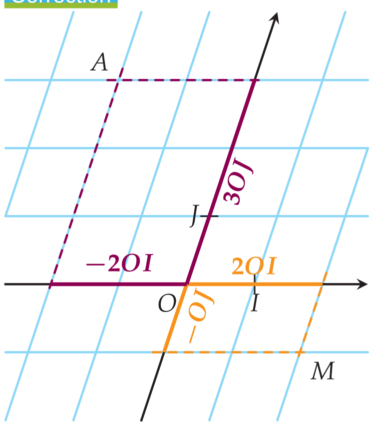
► Ex. 5 p. 190

Exercice d'application

1) Reproduire le repère $(O; I, J)$.
2) Lire les coordonnées du point M.
3) Placer le point A de coordonnées $(-2; 3)$.



Correction



Les coordonnées du point M sont $(2; -1)$.

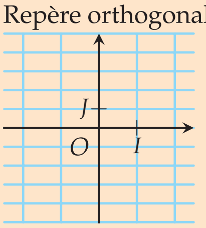
Remarque :

- Les coordonnées d'un point sont toujours écrites dans le même ordre :
  l'abscisse en premier et l'ordonnée ensuite.
- Dans tout repère $(O; I, J)$, les coordonnées des points O, I et J sont :
  - $O(0; 0)$
  - $I(1; 0)$
  - $J(0; 1)$

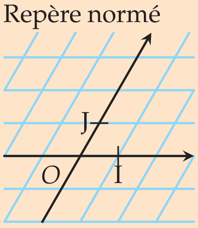
DÉFINITION

- Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère $(O; I, J)$ est dit **orthogonal**.
- Si le triangle OIJ est isocèle en O, le repère $(O; I, J)$ est dit **normé**.
- Si le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O, il est dit **orthonormal** ou **orthonormé**.

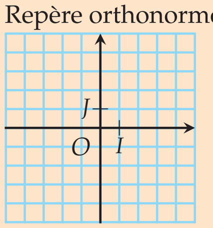
Repère orthogonal



Repère normé



Repère orthonormé



Cours - Méthodes

2. Coordonnées du milieu d'un segment

PROPRIÉTÉ

Dans le plan muni d'un repère, on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées de A et B.
Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont données par la formule suivante :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

REMARQUE : Cette propriété est valable dans n'importe quel type de repère.

MÉTHODE 2 **Calculer les coordonnées d'un milieu**

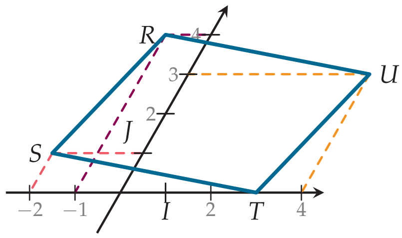
► Ex. 10 p. 191

Exercice d'application Dans un repère $(O; I, J)$, on donne les points de coordonnées suivants :
$R(-1; 4)$; $S(-2; 1)$; $T(3; 0)$ et $U(4; 3)$.

1) Placer les points dans le repère $(O; I, J)$.
2) Calculer les coordonnées du milieu du segment $[RT]$ puis du segment $[SU]$. Conclure.

Correction

1)



2) $\dfrac{x_R + x_T}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et

$\dfrac{y_R + y_T}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2.$

Donc les coordonnées du milieu du segment $[RT]$ sont $(1; 2)$.

$\dfrac{x_S + x_U}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et

$\dfrac{y_S + y_U}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2.$

Donc les coordonnées du milieu du segment $[SU]$ sont $(1; 2)$.

Les coordonnées des deux milieux sont les mêmes donc il s'agit du même point.

Le quadrilatère $RSTU$ a ses diagonales $[RT]$ et $[SU]$ qui se coupent en leur milieu.

Donc $RSTU$ est un parallélogramme.

3. Distance entre deux points

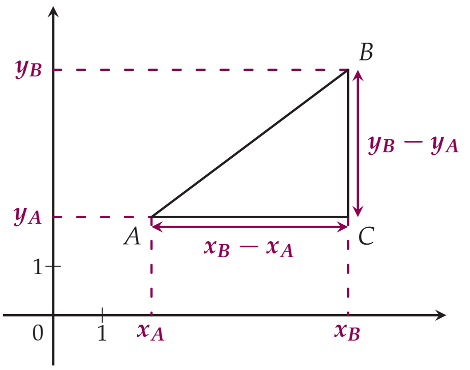
PROPRIÉTÉ

Dans le plan muni d'un repère **orthonormé**, on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées des points A et B. La distance entre deux points A et B est donnée par la formule suivante :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

PREUVE *La démonstration qui suit se fait dans le cadre de la figure proposée. Une position différente des points dans le repère induirait d'autres calculs, mais le résultat resterait le même.*

La figure est obtenue en plaçant dans le même repère A, B et C de coordonnées $(x_B; y_A)$.



Le repère étant **orthonormé**, les axes sont perpendiculaires donc le triangle ABC est rectangle en C et on peut utiliser la relation de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + CB^2$.
Comme le repère est **orthonormé**, $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ sont exprimés dans la même unité, donc on peut écrire :
$AB^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_B - y_C)^2$.
Une longueur est toujours positive donc :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Remarque : La condition d'**orthonormalité** du repère est primordiale pour cette démonstration. Elle est fausse pour tout autre type de repère.

MÉTHODE 3 Calculer une longueur

► Ex. 17 p. 191

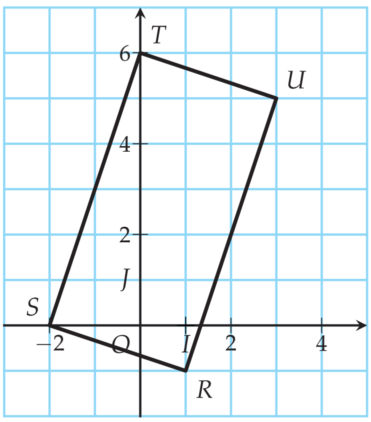
Exercice d'application

Dans un repère $(O; I, J)$ orthonormal, on donne les points de coordonnées suivantes.
$R(1; -1)$ $S(-2; 0)$ $T(0; 6)$ et $U(3; 5)$

1) Placer les points dans le repère $(O; I, J)$.
2) Conjecturer la nature du quadrilatère $RSTU$.
3) Calculer les longueurs RT et SU. Conclure.

Correction

1)



2) Il semblerait que $RSTU$ soit un rectangle.

3) $RT = \sqrt{(x_T - x_R)^2 + (y_T - y_R)^2}$
$RT = \sqrt{(0-1)^2 + (6-(-1))^2}$
$RT = \sqrt{50}$
$SU = \sqrt{(x_U - x_S)^2 + (y_U - y_S)^2}$
$SU = \sqrt{(3-(-2))^2 + (5-0)^2}$
$SU = \sqrt{50}$

Or :
« *Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu alors c'est un rectangle* ».
$[RT]$ et $[SU]$ sont les diagonales de $RSTU$ avec $RT = SU$. Il reste à vérifier qu'elles se coupent en leur milieu.

$\frac{x_R + x_T}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ et

$\frac{y_R + y_T}{2} = \frac{-1+6}{2} = \frac{5}{2}$;

$\frac{x_S + x_U}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$ et

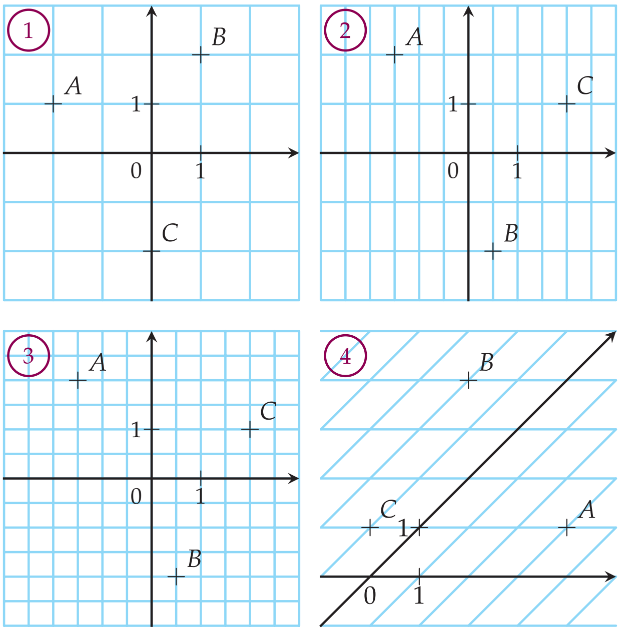
$\frac{y_S + y_U}{2} = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$.

Les coordonnées des deux milieux sont les mêmes donc il s'agit du même point.
Donc $RSTU$ est un rectangle.

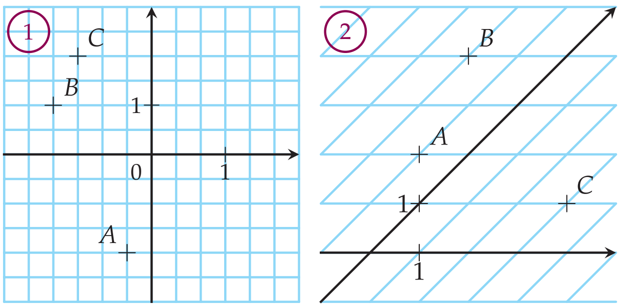
S'entraîner

Activités mentales

1 Sur chacune des figures ci-dessous, lire les coordonnées des points A, B et C.



2 Sur chacune des figures ci-dessous, donner le nom du point de coordonnées $(-1; 2)$.



3 À partir de la figure ① de l'exercice **1** :

1) donner la valeur exacte de la longueur AB ;

2) calculer les coordonnées du

- **a)** milieu du segment $[BC]$;
- **b)** symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses ;
- **c)** symétrique de B par rapport à C.

4 On munit le plan d'un repère orthonormé.
Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(5; -1)$ et $(-2; 1)$. Déterminer :

1) la valeur exacte de la longueur du segment $[AB]$;

2) les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.

Coordonnées d'un point

5 ► MÉTHODE 1 p. 187
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 1 cm.

1) Placer les points A et B de coordonnées respectives $(2; -1)$ et $(-6; -1)$.

2) Construire un point C tel que ABC soit un triangle isocèle en C et de hauteur 4 cm.

3) Lire les coordonnées du point C.

4) Construire le symétrique de C par rapport à (AB).

5) Lire ses coordonnées.

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 1 cm.

1) Placer les points D et E de coordonnées respectives $(4; -3)$ et $(-2; 3)$.

2) Construire un point F tel que EDF soit équilatéral.

3) Lire les coordonnées du point F.

4) Construire le symétrique de E par rapport à F.

5) Lire ses coordonnées.

7 Le plan est muni d'un repère $(O; I, J)$.

1) Placer les points F, N et E de coordonnées respectives $(2,1; -3,4)$, $(-1,8; 5,5)$ et $(4,9; -1,9)$.

2) Construire le point A tel que le quadrilatère $FANE$ soit un parallélogramme.

3) Lire les coordonnées du point A.

8 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1) Placer le point S de coordonnées $(2; 1)$.

2) Construire le point T d'abscisse négative tel que SOT soit rectangle en O et que $OT = 2OS$.

3) Lire les coordonnées du point T.

4) Construire E tel que $TOSE$ soit un rectangle.

5) Lire les coordonnées du point E.

6) Construire le losange $TUCS$ de centre O.

7) Lire les coordonnées des points U et C.

9 On considère un parallélogramme $ADCB$ de centre O. Le point E est le milieu du segment $[AD]$, le point F est le milieu du segment $[CD]$ et le point G est le symétrique du point A par rapport au point F.
Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G dans les repère suivants :

1) $(A; B, D)$ **2)** $(O; E, F)$ **3)** $(O; E, B)$

Coordonnées d'un milieu

10 ► MÉTHODE 2 p. 188

Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, placer les points A et B de coordonnées respectives $(-2,6; 4,7)$ et $(6,3; -5,9)$ et déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.

11 Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on a placé les points A, B et C de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$, $\left(\frac{4}{6}; \frac{1}{4}\right)$ et $\left(\sqrt{5}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Déterminer les coordonnées des points D, E et F, milieux respectifs de $[AB]$,$[BC]$ et $[AC]$.

12 Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on a placé les points C et D de coordonnées respectives $(34\,582; -43\,590)$ et $(10\,991; 59\,267)$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection du segment $[CD]$ avec sa médiatrice.

13 Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on a placé les points A et M de coordonnées respectives $(3; -2)$ et $(0; 3)$.

Déterminer les coordonnées du point B tel que M soit le milieu du segment $[AB]$.

14 Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on a placé les points E et F de coordonnées respectives $(-6,9; -3,3)$ et $(0; -4,6)$.

Déterminer les coordonnées du point symétrique de E par rapport au point F.

15 Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on a placé les points B, A et N de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{3}\right)$ et $\left(-\frac{5}{6}; \frac{2}{3}\right)$.

1) Calculer les coordonnées du milieu de $[BN]$.
2) Calculer les coordonnées du point C tel que $BANC$ soit un parallélogramme.

16 On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On construit un triangle PAT dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(-2; 4)$, $(0; -1)$ et $(5; -2)$. Le point E est le milieu du segment $[AT]$.
La parallèle à (TP) passant par E coupe (PA) en F.

Quelles sont les coordonnées de F ?

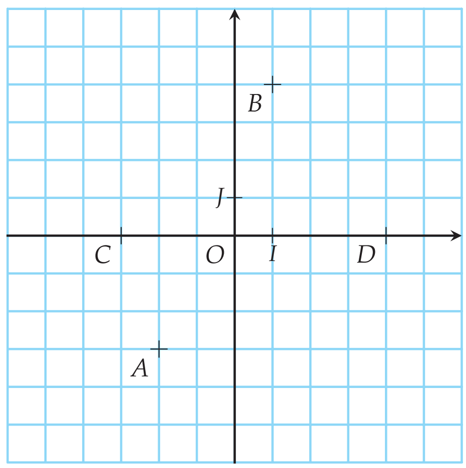
Distance entre deux points

17 ► MÉTHODE 3 p. 189

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ tel que $OI = 1$ cm, on a placé les points A et B de coordonnées respectives $(-2; 5)$ et $(3; 4)$.
Calculer la distance AB.
Donner un arrondi au millimètre.

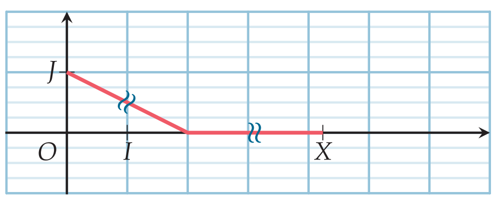
18 On considère un repère orthonormé $(O; I, J)$ tel que $OI = 1$ cm. On a placé les points C et D de coordonnées respectives $(-6,4; 2,3)$ et $(1,3; -4,5)$.
Calculer la distance CD au millimètre près.

19 On considère le plan muni d'un repère $(O; I, J)$.



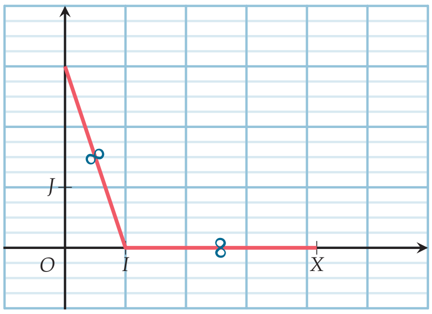
1) Déterminer graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère $(O; I, J)$.
2) Placer le symétrique E du point B par rapport à J. Déterminer graphiquement ses coordonnées.
3) Calculer les coordonnées des milieux F de $[AB]$ et G de $[AC]$.
4) Calculer les distances AC, CE et AE.
5) Quelle est la nature du triangle ACE ? Le démontrer.

20 À partir des informations de la figure ci-dessous calculer les coordonnées du point X.



S'entraîner

21 Même consigne qu'au **20**



22 On considère le plan muni d'un repère $(O; I, J)$.

1) Le point $A(2;3)$ appartient-il au cercle de centre $C(5;7)$ et de rayon 5 ?

2) Le point $B(13;1)$ est-il sur la médiatrice de $[OJ]$?

3) Quelle est la nature du triangle ABC ?

4) Soit $D(4;-1)$. Quelle est la nature du triangle JAD ?

23 On considère, dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, les points suivants :

- $A\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{6}\right)$
- $B\left(2; \frac{1}{3}\right)$
- $C\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$

1) Calculer le périmètre du triangle ABC.

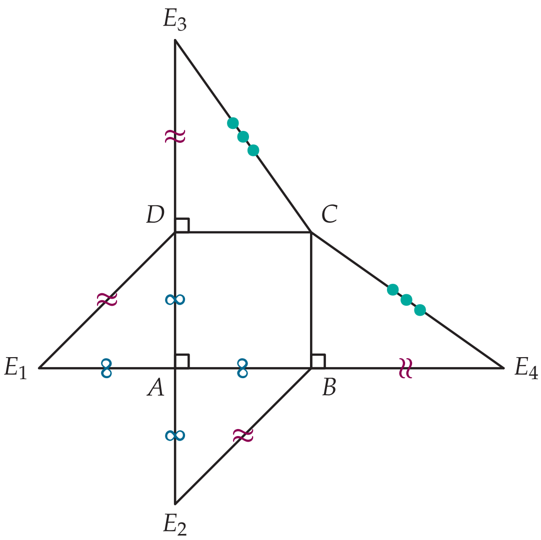
2) Calculer les coordonnées des points A', B' et C', milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

3) En déduire le périmètre du triangle $A'B'C'$.

24 Voici le patron d'une pyramide $EABCD$ dans un repère orthonormé $(A; B, D)$.

Déterminer les coordonnées de chacun des points :

- E_1
- E_2
- E_3
- E_4



Problèmes

25 **Rectangle et triangle rectangle**

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

On place les points suivants :

- $T(-2,2; 1,2)$
- $A(-1,2; 3,6)$
- $C(6; 0,6)$

1) Calculer les valeurs exactes des longueurs des trois côtés du triangle TAC.

2) Démontrer que le triangle TAC est rectangle.

3) On appelle K le milieu de $[TC]$.
Calculer les coordonnées de K.

4) Quelles sont les coordonnées du point E tel que $ECAT$ soit un rectangle ?

26 **Nature du triangle**

Dans un plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on considère les points M, E et R de coordonnées respectives :

- $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$
- $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$
- $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$

1) Faire une figure.

2) Calculer les longueurs des trois côtés de MER.

3) Quelle est la nature de ce triangle ?

27 **Carré et triangle isocèle**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on a placé les points suivants :

- $S(-3,2; 3,2)$
- $A(8; 1,6)$
- $W(3,2; 8)$
- $P(1,6; -3,2)$

1) Calculer les longueurs des trois côtés de SWA.

2) Montrer que le triangle SWA est isocèle rectangle.

3) Calculer les coordonnées des milieux des segments $[SA]$ et $[WP]$.

4) Montrer que $SWAP$ est un carré.

28 **Médiatrice**

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants :

- $A(6; 0)$
- $B(0; 4)$
- $C(1; -1)$

1) Faire une figure.

2) Prouver que le triangle ABC est rectangle.

3) On appelle K le milieu du segment $[AB]$.

a) Calculer les coordonnées de K.

b) Prouver que K appartient à la médiatrice de $[OC]$.

29 Dans un plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on place les points suivants :

- $N(-1,6; -0,8)$ • $E(-4; 2,4)$ • $Z(2,4; 7,2)$

1) Faire une figure.
2) Calculer les longueurs des côtés du triangle NEZ.
3) Démontrer que le triangle NEZ est rectangle.
4) Calculer les coordonnées du milieu K de $[NZ]$.
5) A est le symétrique de E par rapport à K.
  a) Placer le point A.
  b) Démontrer que $NAZE$ est un rectangle.
  c) Calculer l'aire du rectangle $NAZE$.
  d) Calculer l'aire du triangle NEZ.
6) La droite perpendiculaire à (NZ) passant par le point E coupe (NZ) en M et (AN) en U.
  a) Compléter la figure.
  b) Utiliser l'aire du triangle NEZ pour calculer EM.
  c) Calculer NM.
  d) En déduire MZ.

30 Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on place les points suivants :

- $P(-1,5; 2)$ • $T(3,5; 2)$ • $L(2,5; 4)$

1) Faire une figure à compléter au fur et à mesure.
2) a) Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[TP]$.
  b) Quelles sont les coordonnées de A, son centre ?
  c) Calculer la mesure r de son rayon.
3) a) Démontrer que le cercle $(\mathcal{C})$ passe par L.
  b) En déduire la nature du triangle PLT.
  c) Montrer que le cercle $(\mathcal{C})$ ne passe pas par O.
4) a) Calculer les coordonnées du milieu de $[OL]$.
  b) En déduire les coordonnées du point U tel que $POUL$ soit un parallélogramme.
  c) Placer le point U.
  d) Les points P, T et U sont-ils alignés ? Justifier.
5) a) Placer le point S tel que LAS soit un triangle rectangle isocèle en A et que S soit situé sous le segment $[LP]$.
  b) Lire les coordonnées du point S.
  c) Le point S appartient-il au cercle $(\mathcal{C})$?
6) a) Placer E, symétrique de L par rapport au point A.
  b) Quelle est la nature de $PLTE$?
  c) Calculer les coordonnées du point E.
  d) Le point E appartient-il à l'un des axes du repère ?
  e) Démontrer que le triangle EAT est isocèle.

31 **Droite**

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on a placé le point A de coordonnées $(4; -2)$.
Quelle est l'ordonnée du point B de la droite (OA) qui a pour abscisse -3 ?

32 **Théorème de Varignon**

Soit quatre points du plan A, B, C et D.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ du quadrilatère $ABCD$.

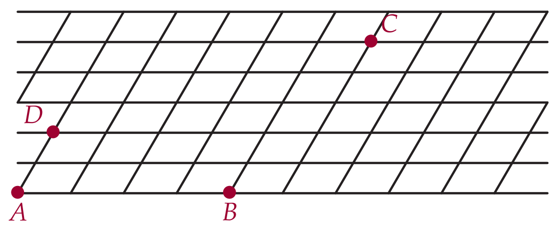
Partie A : conjecture

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.
1) Faire une figure.
2) Déplacer les points A, B, C ou D.
Que peut-on conjecturer ?

Pour la démontrer, on choisit de définir un repère et d'exprimer les coordonnées des points dans ce repère.

Partie B : un cas particulier

Soit le repère $(A; B, D)$. Dans cette partie, les points sont disposés comme sur la figure ci-dessous, aux nœuds du réseau.



1) Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
2) Calculer les coordonnées des milieux I, J, K et L.
3) Démontrer la conjecture de la partie précédente dans ce cas particulier.

Partie C : cas général

Soit le repère $(A; B, D)$ et on note $(a; b)$ les coordonnées du point C dans ce repère.
1) Calculer les coordonnées des milieux I, J, K et L en fonction de a et b.
2) Démontrer la conjecture.

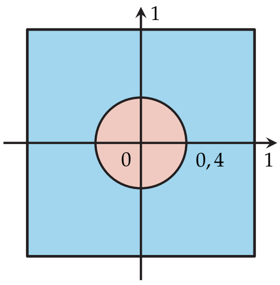
Partie D : sans coordonnées

Comment pouvait-on démontrer ce théorème sans utiliser les coordonnées ?

Approfondir

33 Jeu de fléchettes aléatoires ALGO

Un jeu de hasard consiste à jeter des fléchettes au hasard sur une cible (modélisée ci-dessous). Toucher le disque du centre rapporte 50 points, toucher le reste de la cible rapporte 20 points et on ne rate pas la cible ;-).



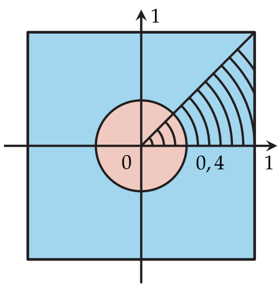
1) Un lancer de fléchette est simulé par l'algorithme :

```
Liste des variables utilisées
  x,y : réel
Traitements
  Donner à x la valeur de 2*alea()-1
  Donner à y la valeur de 2*alea()-1
  Si ··· Alors
    Afficher ("Vous avez gagné 50 pts")
  Sinon
    Afficher ("Vous avez gagné 20 pts")
  Fin Si
```

a) À quoi correspondent les variables x et y ?

b) Compléter l'algorithme pour que celui-ci donne le bon affichage suivant le lancer.

2) On modifie la cible. Si la fléchette se plante dans la zone hachurée (un huitième du carré), alors le joueur a un bonus de 20 points.
Compléter l'algorithme pour qu'il affiche le nombre de points obtenus.



34 Triangles équilatéraux

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(2; 0)$ et $(5; 0)$.

1) On appelle C le point d'ordonnée positive tel que ABC soit un triangle équilatéral.
Déterminer les coordonnées du point C.

2) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Déterminer les coordonnées du point G.

3) Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

a) Calculer les coordonnées des points I, J et K.

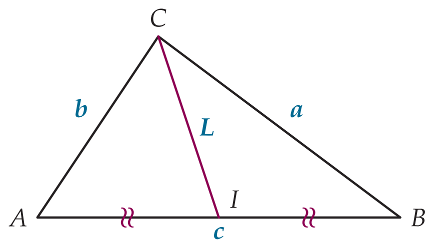
b) Démontrer que le triangle IJK est équilatéral.

c) Démontrer que le point G est le centre de gravité de IJK.

35 Médiane

Dans un vieux livre, Mongi trouve la formule donnant la longueur des médianes d'un triangle en fonction des longueurs de ces trois côtés.

$$L^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$$



Mongi est curieux de la preuve de cette formule.
On se place dans un repère orthonormé d'origine A où (AB) est l'axe des abscisses.

1) Quelles sont les coordonnées de A et de B ?

2) Quelles sont les coordonnées du milieu I de $[AB]$?

3) On note $(x_C; y_C)$, les coordonnées du point C.
Vérifier que :

$$L^2 = IC^2 = x_C^2 + y_C^2 - cx_C + \frac{c^2}{4}$$

4) Calculer a^2 et b^2 en fonction de x_C, y_C et de c.
Donner les résultats sous forme développée.

5) Établir la formule du livre de Mongi.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Dans un plan muni d'un repère :
- lire les coordonnées d'un point
- placer des points

À partir des coordonnées de points :
- calculer les coordonnées du milieu d'un segment
- calculer la distance entre deux points
- résoudre des problèmes géométriques

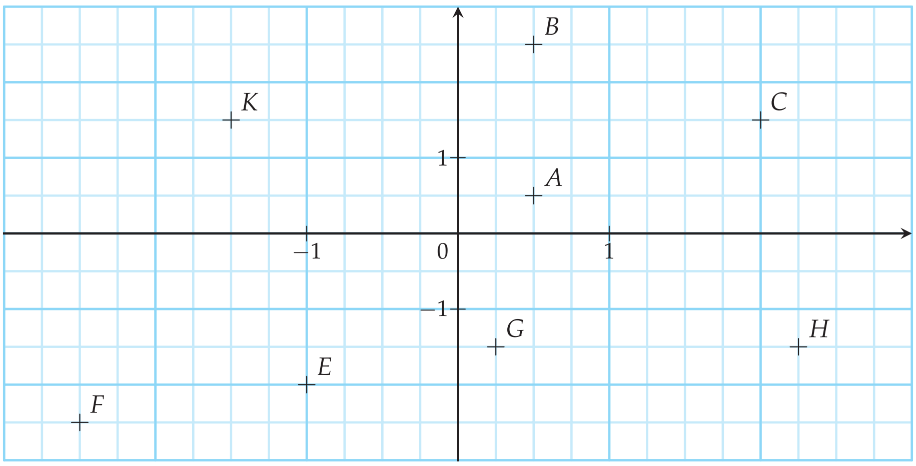
Reconnaître :
- un repère orthogonal
- un repère normé
- un repère orthonormal ou orthonormé
- les figures géométriques usuelles

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les questions **36** à **39** : on considère les points dans le repère suivant.



36 Citer le (ou les) point(s) d'abscisse 0,5.

ⓐ G ⓑ B ⓒ A ⓓ F

37 Citer le (ou les) point(s) d'ordonnée $-1,5$.

ⓐ G ⓑ C ⓒ K ⓓ H

38 Citer le (ou les) point(s) dont l'abscisse et l'ordonnée sont identiques.

ⓐ E ⓑ F ⓒ K ⓓ A

39 Quelles sont les coordonnées du point G ?

ⓐ $(1; -3)$
ⓑ $(0,25; -0,75)$
ⓒ $(0,25; -1,5)$
ⓓ $(0,5; -1,5)$

$ABCD$ est un losange de centre I et J est le milieu de $[AB]$.

40 Citer le (ou les) repère(s) orthogonal(aux).

(a) $(I; A, B)$
(b) $(A; B, D)$
(c) $(I; D, B)$
(d) $(I; D, C)$
(e) $(J; I, A)$
(f) aucun de ces repères

41 Citer le (ou les) repère(s) orthonormal(aux).

(a) $(I; A, B)$
(b) $(A; B, D)$
(c) $(I; D, B)$
(d) $(I; D, C)$
(e) $(J; I, A)$
(f) aucun de ces repères

$ABCD$ est un carré de centre I et J est le milieu de $[AB]$.

42 Citer le (ou les) repère(s) orthogonal(aux).

(a) $(I; B, D)$
(b) $(I; A, B)$
(c) $(J; A, I)$
(d) $(A; J, D)$

43 Citer le (ou les) repère(s) orthonormal(aux).

(a) $(I; B, D)$
(b) $(I; A, B)$
(c) $(J; A, I)$
(d) $(A; J, D)$

Pour les questions **45** à **49**, on considère les points de coordonnées suivants :

$A(2; 4)$ $B(-2; 5)$ $C(7; -6)$ $D(-2; -3)$

44 Quelles sont les coordonnées du milieu du segment $[BC]$?

(a) $(-1; -1)$
(b) $(2,5; -0,5)$
(c) $(2,5; -5,5)$
(d) $(5,5; -0,5)$

45 Quelles sont les coordonnées du milieu du segment $[AD]$?

(a) $(-2; -3,5)$
(b) $(0; -0,5)$
(c) $(2; 3,5)$
(d) $(0; 0,5)$

46 Citer le (ou les) point(s) appartenant à l'axe des ordonnées.

(a) le milieu de $[AB]$
(b) le milieu de $[BD]$
(c) le milieu de $[AC]$
(d) le milieu de $[AD]$

47 On considère que le repère est orthonormé. Quelle est la longueur du segment $[AC]$?

(a) $\sqrt{73}$
(b) $\sqrt{29}$
(c) $\sqrt{85}$
(d) $\sqrt{125}$

48 On considère que le repère est orthonormé. Quel segment a pour longueur 8 ?

(a) $[AC]$
(b) $[BC]$
(c) $[DC]$
(d) $[BD]$

49 Quelles sont les coordonnées du point F tel que A soit le milieu de $[BF]$?

(a) $(-6; -3)$
(b) $(3; 2)$
(c) $(3; 6)$
(d) $(6; 3)$

TP 1 Cercle et tangente

INFO

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;1)$, $B(6;3)$ et $C(4;7)$.

1) Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

2) Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AC]$.

3) On appelle D le symétrique de B par rapport à I. Déterminer les coordonnées de D.

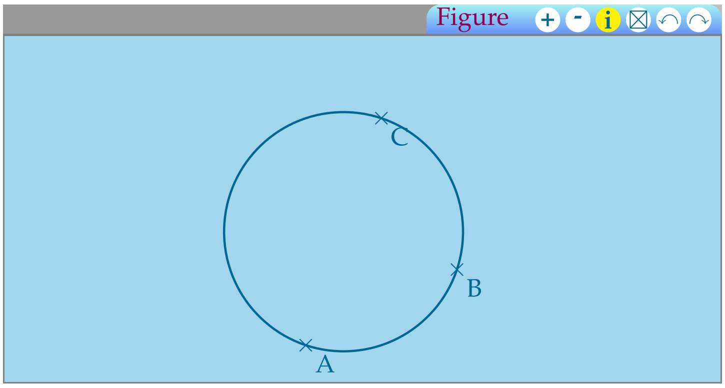
4) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

5) En déduire que le point B appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AC]$.

6) On veut déterminer M, point de l'axe des abscisses tel que (MB) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

a) Faire une figure avec d'un logiciel de géométrie dynamique.

b) Conjecturer la position du point M.



c) On appelle x l'abscisse du point M.
Démontrer que (BM) est une tangente au cercle $(\mathcal{C})$
si et seulement si x est solution de l'équation $10+(6-x)^2+9=(3-x)^2+16$.

d) Résoudre l'équation précédente. Conclure.

TP 2 Effet des transformations sur les coordonnées

1 Avec le repère

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1) Placer un point A dans ce repère.

2) Construire les points :

- B symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses ;
- C symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées ;
- D symétrique de A par rapport à l'origine.

3) Lire les coordonnées des points B, C et D.

4) Comment obtenir leurs coordonnées à partir de celles du point A ? Le démontrer.

2 Désaxé

Faire le même raisonnement pour :

1) une symétrie centrale par rapport à un point autre que l'origine ;

2) une symétrie axiale par rapport à une droite parallèle à l'un des deux axes.

TP 3 Dans la peau d'un programmeur

ALGO

Vous êtes programmeur pour un concepteur de logiciel de géométrie dynamique.
La capture d'écran du TP.1 présente le logiciel sur lequel vous travaillez.
Votre mission : gérer l'affichage du milieu d'un point dans la fenêtre **Figure**.

1) Proposer un algorithme, qui à partir des coordonnées des points A et B, affiche une croix aux coordonnées du milieu et affiche un lettre à gauche sous la croix.

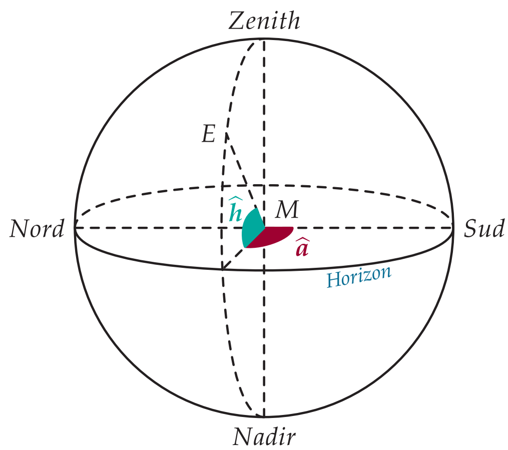
2) L'utilisateur pouvant faire bouger A et B comme il le souhaite, l'affichage de la lettre nommant le milieu peut dépasser du cadre alors que la croix est toujours à l'intérieur.
À partir des coordonnées du coin en haut à droite du cadre (L'origine des coordonnées est le coin en bas à gauche.) et de la longueur et la largeur de la lettre (dépendant tous du Zoom demandé par l'utilisateur), proposer une modification de l'algorithme précédent, qui :

a) vérifiera qu'il y a la place d'afficher la lettre ;

b) si besoin, changera la position de la lettre. *Les autres possibilités sont : dessous au centre, dessous à gauche, à gauche, dessus à gauche, dessus au centre, dessus à droite, à droite.*

Récréation, énigmes

Un drôle de repère : la sphère céleste



Le repérage dans le plan n'est guère utile aux navigateurs qui, eux, voyagent sur le globe terrestre.
Aux XVII^e et XVIII^e siècles, tous les bateaux anglais, militaires et commerciaux, étaient équipés d'un sextant servant à mesurer la position du soleil et des étoiles en mer.
Suivant le schéma ci-contre, le marin, se trouvant sur un point M de la Terre, se place face à un astre de référence.
Il mesurait :

- l'**azimut**, $\widehat{a}$: l'angle entre l'étoile E et le Sud.
- la **hauteur**, $\widehat{h}$: l'angle entre l'étoile E et l'horizon.

Pour connaître sa position, le marin comparait ensuite ses relevés avec les éphémérides donnant la position dans le ciel, au dessus de l'Observatoire Royal de Greenwich, du soleil (pour la navigation de jour) et des étoiles (pour la navigation de nuit) en fonction de l'heure.
L'horloge du bateau devait être mise à l'heure avec une grande précision avant de partir. Il suffisait de passer devant l'Observatoire de Greenwich. Tous les jours, une boule horaire donne l'heure précise à 12 h (en hiver) ou 13 h (en été). Elle monte à demi-mat 10 min avant l'heure, puis en haut du mat à 5 min avant l'heure, puis tombe à l'heure pile.

GÉOMÉTRIE

3

Vecteurs

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Connaître les propriétés du parallélogramme
- Lire les coordonnées d'un point
- Additionner et soustraire des nombres relatifs
- Reconnaître une situation de proportionnalité

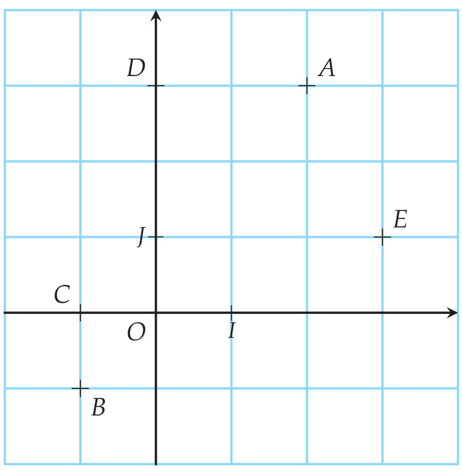
Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Lire les coordonnées des points suivants.

1) A **3)** C **5)** O **7)** J

2) B **4)** D **6)** I



2 Calculer mentalement.

1) $3-5+6-(-7)$

2) $\dfrac{-4+3}{-4-(-5)}$

3) $3-3\times(-2)+2$

4) $\dfrac{5+(-3-2)}{-3-(-4)}$

3 Dans chaque cas, peut-on affirmer que $ABCD$ est un parallélogramme ?

1) $AB = CD$

2) $AB = CD$ et $AD = BC$

3) $AB = CD$ et $(AB)//(CD)$

4) $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu

4 Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

-2	3
3	$-4,5$

$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

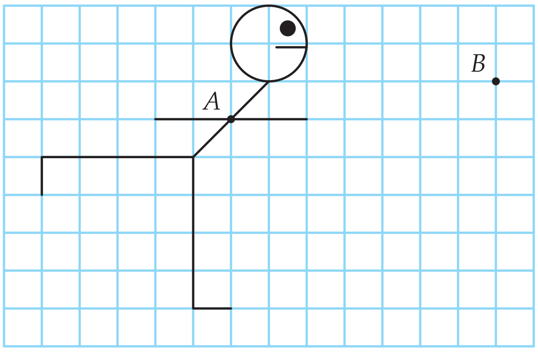
$\sqrt{2}$	2
1	$\sqrt{2}$

-6	3
1	$0,5$

Voir solutions p. 259

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Patinage mathématique



L'entraîneur (un brin facétieux) de Ryan Gougère (troisième au championnat de troisième district inter-cantonal de patinage artistique) lui demande de travailler un mouvement.
Il le lui décrit de la façon suivante :

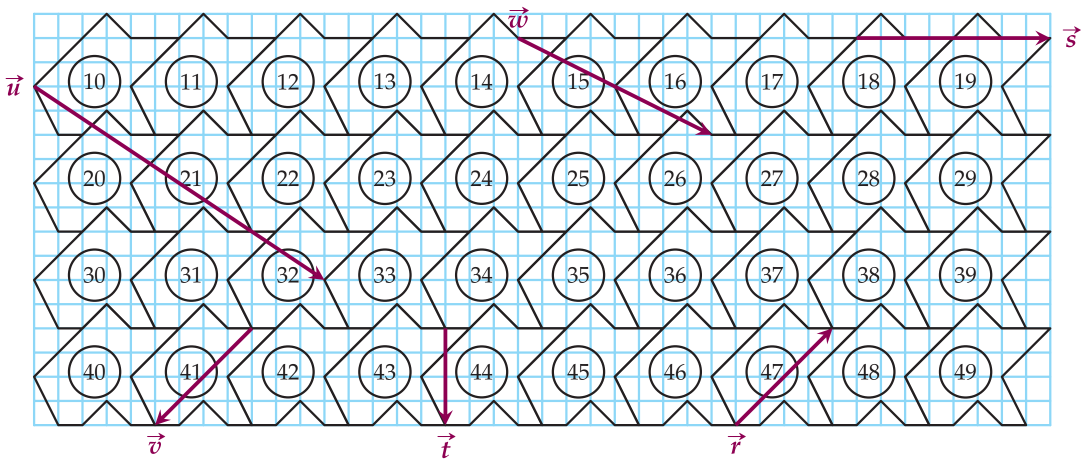
- La partie de ton corps, située en A doit finir en B.
- Tout point C de ton corps doit finir en un point D tel que les segments $[AD]$ et $[CB]$ aient le même milieu.

1) Reproduire la figure puis construire Ryan Gougère en position après le mouvement.

2) Quel est ce mouvement mystérieux ?
N'y aurait-il pas une manière plus simple de décrire l'image du point C ?

ACTIVITÉ 2 Zellige

Cette activité consiste à étudier l'enchaînement de deux translations sur un damier de carreaux Zellige, un carrelage décoratif originaire de l'Antiquité Méditerranéenne et du Moyen Orient.



1) Enchaînement 1

a) Quelle est l'image du carreau 13 par la translation de vecteur $\vec{u}$?

b) Quelle est l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{v}$?

c) Émettre une conjecture sur la nature de la transformation correspondant à l'enchaînement de ces deux translations.

> On notera $\vec{u}+\vec{v}$ les caractéristiques de cette nouvelle transformation.

2) Enchaînement 2

a) Quelle est l'image du carreau 13 par la translation de vecteur $\vec{s}$?

b) Quelle est l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{t}$?

c) Émettre une conjecture sur $\vec{s}+\vec{t}$.

3) Enchaînement 3

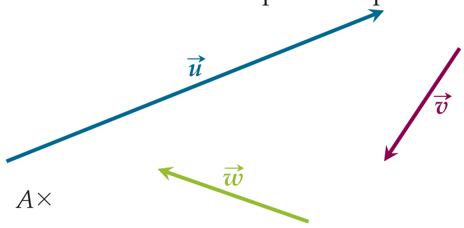
a) Quelle est l'image du carreau 13 par la translation de vecteur $\vec{v}$?

b) Quelle est l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{r}$?

c) Émettre une conjecture sur $\vec{v}+\vec{r}$.

ACTIVITÉ 3 Sans carreaux

Tracer trois vecteurs et placer un point A comme sur la figure ci-dessous.

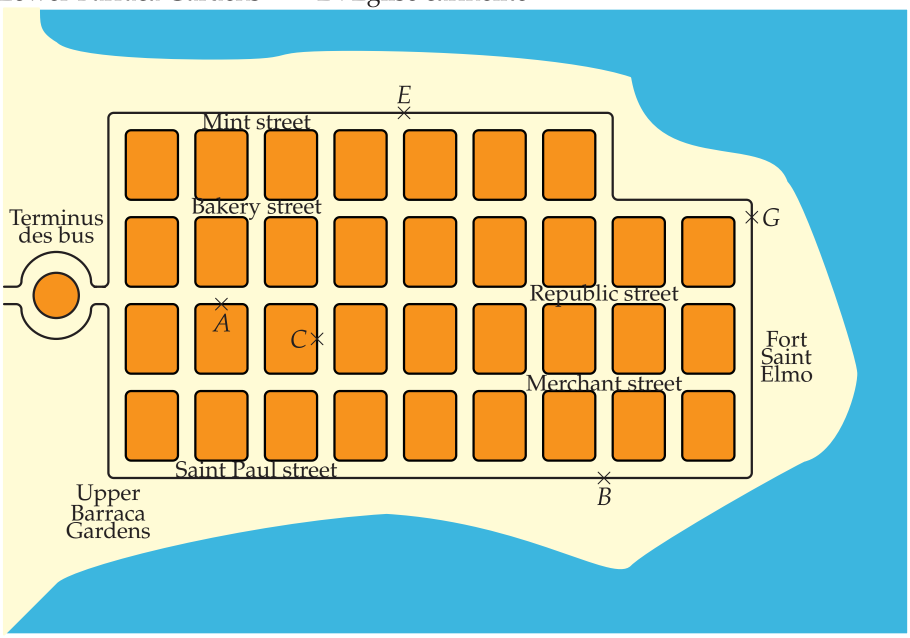


1) Construire le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v} + \vec{v}$.
2) Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

DÉBAT 4 La Valette

L'île de Malte, de par sa position stratégique dans la mer Méditerranée, a fait l'objet de grandes convoitises et invasions avant d'obtenir son indépendance en 1964.
Théotime a été fasciné par ce mélange de cultures dès sa première visite de l'île et conseille le voyage à tous ses amis. Il se fait un plaisir de fournir à ceux qui le désirent le plan ci-dessous de La Valette, capitale de l'île. Il y a marqué d'une croix quelques sites à visiter :

- A : Musée Archéologique
- C : Cathédrale Saint John
- G : Musée de la guerre
- B : Lower Barraca Gardens
- E : Église carmélite



Naïm veut visiter le musée d'archéologie, la cathédrale Saint John, Lower Baccara Gardens, le musée de la Guerre, l'église Carmélite dans cet ordre.
Naïm arrive à la Valette, au terminus des bus, avec le plan de Théotime et a la désagréable surprise de constater que le gouvernement maltais a remplacé tous les noms de rues en anglais par des noms maltais. Il n'arrive plus à se repérer.

1) Proposer une méthode pour repérer les sites sélectionnés par Naïm.
2) Proposer une méthode pour définir les déplacements entre chacun des sites.

Activités d'approche

ACTIVITÉ 5 Coordonnées

Partie 1 : coordonnées d'un vecteur

1) Construire un repère $(O; I, J)$. On notera $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$.

2) Placer dans ce repère les points M, P, R tels que :

a) $\overrightarrow{OM} = 2\vec{\imath}$ **b)** $\overrightarrow{OP} = 3\vec{\jmath}$ **c)** $\overrightarrow{OR} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

3) Quelles semblent être les relations entre les égalités vectorielles et les coordonnées des points ?

4) Placer dans le repère le point N de coordonnées $(-5; 1)$.

5) Donner une égalité vectorielle liant $\overrightarrow{ON}$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

6) On considère un point quelconque E de coordonnées $(x_E; y_E)$.
Donner une égalité vectorielle liant $\overrightarrow{OE}$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

> Les coefficients obtenus dans la décomposition du vecteur $\overrightarrow{OE}$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont appelés coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OE}$.

Partie 2 : coordonnées de deux vecteurs

Compléter la figure de la partie **1** .

1) Placer le point S tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NS}$. Lire les coordonnées du point S.

2) Conjecturer une relation liant les coordonnées des points M, N, S.

3) Conjecturer une relation liant les coordonnées de deux vecteurs égaux.

ACTIVITÉ 6 Opérations

Partie 1 : coordonnées d'une somme

1) Dans un repère $(O; I, J)$, placer les points suivants.

- $A(1; 5)$ • $B(-4; 2)$ • $C(-2; -1)$ • $D(1; -2)$ • $E(4; 2)$

2) Construire les points R, S et T tels que :

a) $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}$ **c)** $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

3) Lire les coordonnées des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AR}$ **b)** $\overrightarrow{AB}$ **c)** $\overrightarrow{AC}$ **d)** $\overrightarrow{AS}$ **e)** $\overrightarrow{ED}$ **f)** $\overrightarrow{DB}$ **g)** $\overrightarrow{CT}$ **h)** $\overrightarrow{BC}$

4) Quelles relations lient les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ à celles des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Partie 2 : vecteurs colinéaires

On considère un repère $(O; I, J)$.

1) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

a) $\vec{w} = 2\vec{u}$ **b)** $\vec{t} = -3\vec{v}$ **c)** $\vec{z} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

2) Un cas simple et pratique

a) Placer un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur $\overrightarrow{CD}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) Que peut-on dire de ces coordonnées ?

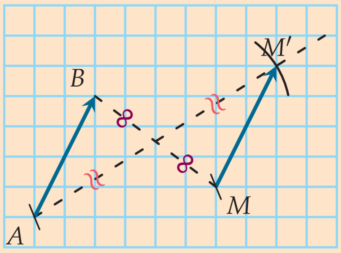
3) Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont colinéaires ?

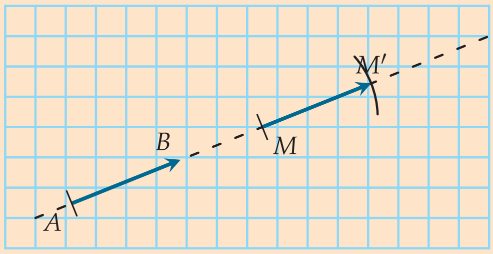
- $\vec{a}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ • $\vec{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ • $\vec{c}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ • $\vec{d}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ • $\vec{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

1. Translations - Vecteurs associés

DÉFINITION : Translation

On considère deux points A et B du plan.
On appelle **translation qui transforme A en B** la transformation qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.





VOCABULAIRE :
- Le point M' est appelé **image** du point M.
- On dit également que M' est le **translaté** de M.

REMARQUE : Une **transformation** sert à **modéliser** mathématiquement un mouvement.
- La **symétrie centrale** est la transformation qui modélise le demi-tour.
- La **translation** est la transformation qui modélise le glissement rectiligne. Pour la définir, on indique la direction, le sens et la longueur du mouvement.

PROPRIÉTÉ

On considère quatre points A, B, C et D.
Dire que la translation qui transforme A en B transforme C en D
équivaut à dire que $ABDC$ est un **parallélogramme** (éventuellement aplati).

PREUVE C'est la conséquence de la propriété : « *un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu* ».

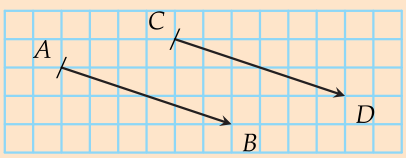
DÉFINITION : Vecteurs associés

À chaque translation est associé un **vecteur**.
Pour A et B deux points, le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est associé à la translation qui transforme A en B.
La **notation** « vecteur $\overrightarrow{AB}$ » regroupe les trois informations la définissant :
la direction (celle de la droite (AB)), le sens (de A vers B) et la longueur AB.
A est l'**origine** du vecteur et B son **extrémité**.

DÉFINITION

Deux vecteurs qui définissent la même translation sont dits **égaux**.

Deux vecteurs égaux ont
- même direction ;
- même sens ;
- même longueur.



■ PROPRIÉTÉ

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

MÉTHODE 1 **Construire un vecteur**

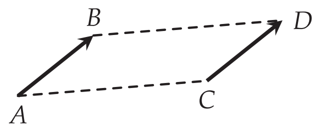
► Ex. 15 p. 210

Exercice d'application

Placer trois points A, B et C non alignés. Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Correction

On construit le parallélogramme $ABDC$.



Remarque : Une translation peut être définie par un point quelconque et son translaté.
Il existe donc une **infinité** de vecteurs associés à une translation. Ils sont tous égaux.
Le vecteur choisi pour définir la translation est un **représentant** de tous ces vecteurs.
La translation **ne dépend pas** du représentant choisi pour la définir. On le note souvent $\vec{u}$.

■ DÉFINITION : **Vecteur nul**

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point quelconque en lui-même est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$. Ainsi, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots = \vec{0}$

■ DÉFINITION : **Vecteur opposé**

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ de la translation qui transforme B en A est appelé **vecteur opposé** à $\overrightarrow{AB}$.

Notation :

- Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ se note $-\overrightarrow{AB}$ et on a l'égalité $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
- La notation $\overleftarrow{AB}$ n'existe pas.

Remarque :
Deux vecteurs **opposés** ont même direction, même longueur mais sont de sens contraires.

2. Opérations sur les vecteurs

A. Additions

■ PROPRIÉTÉ : **Enchaînement de translations**

L'enchaînement de deux translations est également une translation.

■ PROPRIÉTÉ : **Relation de Chasles**

Soit A, B, C trois points.
L'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Remarque : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

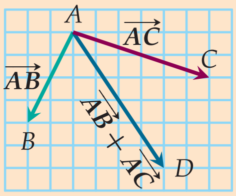
■ PROPRIÉTÉ

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs. Alors :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$

PROPRIÉTÉ : Propriété du parallélogramme

Soit A, B, C, D quatre points.
Dire que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ équivaut à dire que $ABDC$ est un parallélogramme.



PREUVE

On suppose que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
On utilise la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
On ajoute $\overrightarrow{CA}$ aux deux membres de l'égalité : $\underbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}}$.
On utilise à nouveau la relation de Chasles avec $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
Donc, la relation de départ est équivalente à : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $ABDC$ est un parallélogramme.

MÉTHODE 2 Construire la somme de deux vecteurs

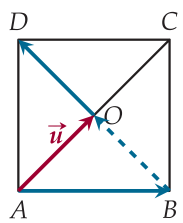
► Ex. 21 p. 211

On remplace l'un des deux vecteurs par un représentant :
- soit de même origine afin d'utiliser la règle du parallélogramme ;
- soit d'origine l'extrémité de l'autre afin d'utiliser la relation de Chasles.

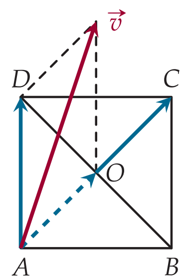
Exercice d'application

1) Construire un carré $ABCD$ de centre O.
2) Construire les vecteurs
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ et
$\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OC}$

Correction



Avec la relation de Chasles



Avec la règle du parallélogramme

REMARQUE : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ si et seulement si A est le milieu du segment $[BC]$.

B. Soustraction

DÉFINITION

Soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

Exemple

Soit trois points A, B et C non alignés.
Donner un représentant du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

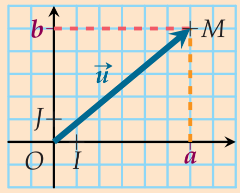
Correction

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$
$\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$
$\vec{u} = \overrightarrow{CB}$ en utilisant la relation de Chasles.

3. Coordonnées d'un vecteur

DÉFINITION

Dans un repère $(O; I, J)$, on considère la translation de vecteur $\vec{u}$ qui translate l'origine O en un point M de coordonnées $(a; b)$.
Les **coordonnées du vecteur $\vec{u}$** sont les coordonnées du point M.
On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère $(O; I, J)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

PREUVE Soit A, B et M de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ et $(x_M; y_M)$ dans un repère $(O; I, J)$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $OMBA$ est un parallélogramme.
Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont même milieu.

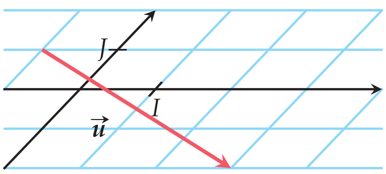
$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{x_B + x_O}{2} \\ \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$$

MÉTHODE 3 Lire les coordonnées d'un vecteur

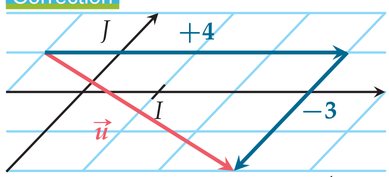
► Ex. 38 p. 213

Exercice d'application

Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sur la figure ci-dessous.



Correction



Les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

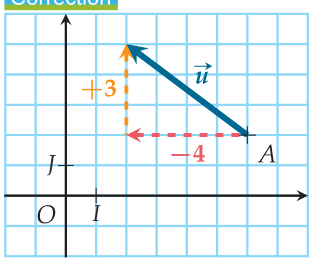
MÉTHODE 4 Construire un vecteur à partir de ses coordonnées

► Ex. 42 p. 213

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé, construire le représentant d'origine $A(6; 2)$ du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Correction



MÉTHODE 5 Repérer un point défini par une égalité vectorielle

► Ex. 44 p. 213

Exercice d'application

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on a les points $A(-2; 3)$, $B(4; -1)$ et $C(5; 3)$.
Calculer les coordonnées
1) du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
2) du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Correction

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ -1-3 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2) On cherche $(x_D; y_D)$, les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Or, « *si deux vecteurs sont égaux alors ils ont mêmes coordonnées* ».
Donc le couple $(x_D; y_D)$ est la solution du système :
$$\begin{cases} x_D - x_C = x_B - x_A \\ y_D - y_C = y_B - y_A \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_D - 5 = 6 \\ y_D - 3 = -4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_D = 6 + 5 = 11 \\ y_D = -4 + 3 = -1 \end{cases}$$
Les coordonnées du point D sont $(11; -1)$.

PROPRIÉTÉ : Somme de deux vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

alors les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

MÉTHODE 6 Repérer un point défini par une somme vectorielle

► Ex. 50 p. 214

Exercice d'application

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on place les points $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(5; 3)$ et $D(-2; -1)$. Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$?

Correction

On cherche les coordonnées $(x_E; y_E)$ du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
Donc le couple $(x_E; y_E)$ est solution du système :
$$\begin{cases} x_E - x_A = (x_D - x_A) + (x_B - x_C) \\ y_E - y_A = (y_D - y_A) + (y_B - y_C) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_E - 2 = (-2-2) + (4-5) \\ y_E - 3 = (-1-3) + (-1-3) \end{cases}$$
$$\text{soit } \begin{cases} x_E - 2 = -5 \\ y_E - 3 = -8 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_E = -5 + 2 = -3 \\ y_E = -8 + 3 = -5 \end{cases}$$
Les coordonnées du point E sont $(-3; -5)$.

4. Multiplication par un réel

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x; y)$ et λ un réel. La **multiplication de $\vec{u}$ par λ** est le vecteur $\lambda\vec{u}$ de coordonnées $(\lambda x; \lambda y)$.

MÉTHODE 7 Repérer le produit d'un vecteur par un réel

► Ex. 61 p. 215

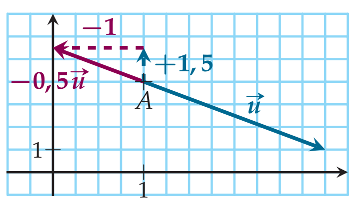
Exercice d'application

Dans un repère orthogonal, construire le représentant d'origine $A(1; 4)$ du vecteur $-0{,}5\vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Correction

$\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc $-0{,}5\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -0{,}5 \times 2 \\ -0{,}5 \times (-3) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$.



PROPRIÉTÉ

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et λ un réel tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

- si $\lambda > 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens et $AB = \lambda CD$.
- si $\lambda < 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraires et $AB = -\lambda CD$.

REMARQUE : $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de λ.

5. Colinéarité

DÉFINITION

On dit que deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**
si et seulement si leurs coordonnées dans un même repère sont proportionnelles.

REMARQUE : Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires lorsqu'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

MÉTHODE 8 Vérifier la colinéarité de deux vecteurs

► Ex. 74 p. 216

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, il suffit de :

possibilité 1 trouver un réel λ non nul tel que $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$;

possibilité 2 vérifier que les produits en croix, xy' et $x'y$, sont égaux.

Exercice d'application

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$.

2) $\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Correction

1) $-6 = -3 \times 2$ et $-18 = -3 \times 6$ donc $\vec{v} = -3\vec{u}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2) $-5 \times (-7) = 35$ et $3 \times 12 = 36$.
Les produits en croix ne sont pas égaux.
Donc $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

PROPRIÉTÉ

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple

$A(1; 2)$; $B(3; 1)$ et $C(5; 3)$ sont-ils alignés ?

Correction

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis les produits en croix : $(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (3-1)(3-2) = 2 \times 1 = 2$ et ainsi : $(y_B - y_A)(x_C - x_A) = (1-2)(5-1) = -1 \times 4 = -4$
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.
Donc A, B, C ne sont pas alignés.

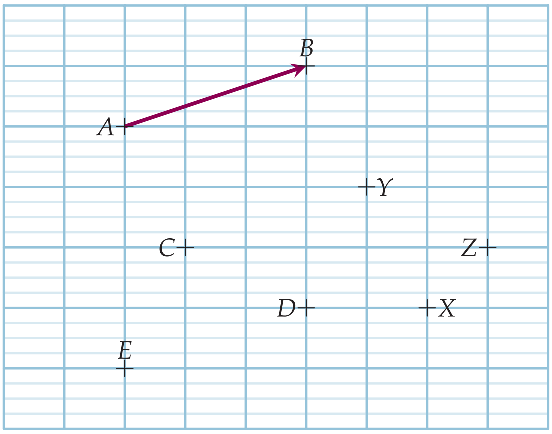
Activités mentales

1 À partir de la figure ci-dessous,

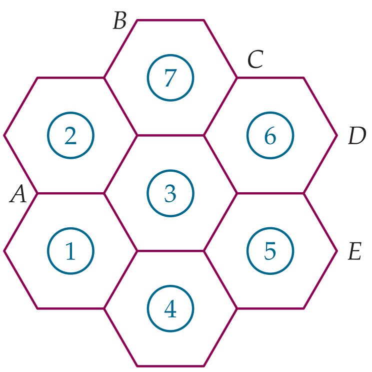
1) donner les images des points C, D, E dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;

2) citer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$;

3) citer les trois parallélogrammes définis par les trois égalités vectorielles du **2**.



2 La figure ci-dessous représente sept hexagones réguliers et numérotés.



Déterminer l'image :

1) de l'hexagone 1 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;

2) de l'hexagone 4 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;

3) de l'hexagone 7 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$.

3 Compléter avec les lettres qui conviennent.

1) $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{\dots C} + \overrightarrow{\dots\ \ \dots}$ **3)** $\overrightarrow{\dots E} = \overrightarrow{A\dots} + \overrightarrow{K\dots}$

2) $\overrightarrow{A\dots} = \overrightarrow{\dots C} + \overrightarrow{\dots B}$ **4)** $\overrightarrow{O\dots} = \overrightarrow{\dots\ \ \dots} + \overrightarrow{\dots M}$

4 Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour :

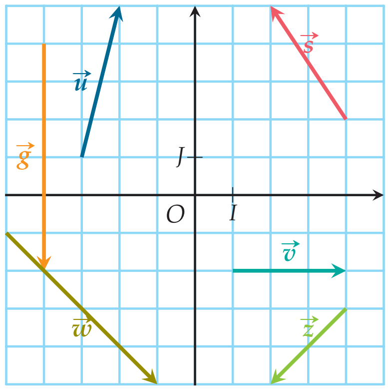
1) $A(2;5)$ et $B(6;7)$;

2) $A(-1;2)$ et $B(-2;-3)$.

5 Lire les coordonnées des vecteurs.

1) $\vec{u}$ **3)** $\vec{w}$ **5)** $\vec{z}$

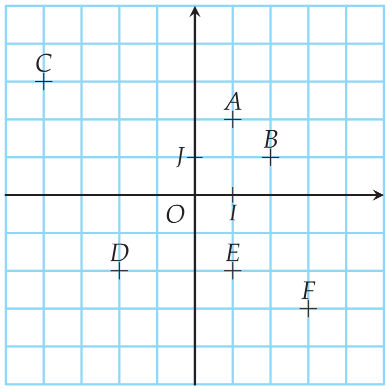
2) $\vec{v}$ **4)** $\vec{s}$ **6)** $\vec{g}$



6 Lire les coordonnées des points et des vecteurs.

1) A **3)** $\overrightarrow{OC}$ **5)** $\overrightarrow{FC}$

2) B **4)** $\overrightarrow{AE}$ **6)** $\overrightarrow{DO}$



7 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, celles du point $A(5;2)$.
Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

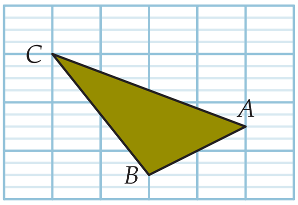
8 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, celles du point $A(1;-2)$.
Calculer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{CA} = \vec{v}$.

9 Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $K(-2;-3)$, $L(3;-4)$ et $M(-1;5)$.
Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM}$?

S'entraîner

Translation et vecteurs associés

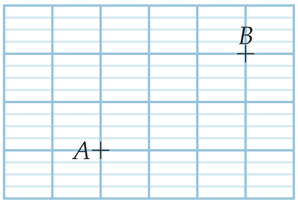
10 Reproduire la figure puis construire le translaté du triangle ABC dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



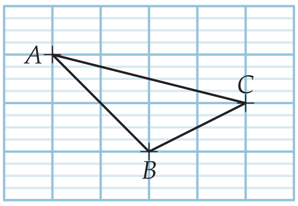
11 Construire un carré $ABCD$ de côté 5 cm et de centre O. Construire l'image de ce carré :

1) dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
2) dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;
3) dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

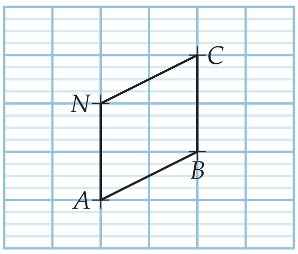
12 Reproduire la figure ci-dessous et construire deux représentants du vecteur de la translation qui transforme A en B.



13 Reproduire la figure ci-dessous et construire deux représentants du vecteur de la translation qui transforme A en B.



14 Reproduire la figure ci-dessous et construire trois représentants du vecteur de la translation qui transforme A en B.



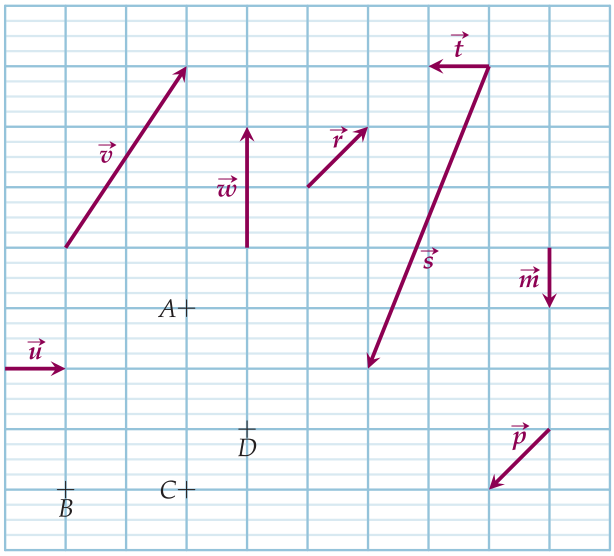
15 ► MÉTHODE 1 p. 204

Construire un triangle ABC rectangle en A.
Construire le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

16 Construire un losange $ABCD$.
Construire le représentant d'extrémité C de $\overrightarrow{BD}$.

17 À partir de la figure ci-dessous, citer un vecteur :

1) opposé à $\overrightarrow{CD}$;
2) de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$;
3) de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire ;
4) égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$.



18 Placer deux points A et B et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Construire un vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$.
2) Construire un vecteur de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et qui n'est pas égal à $\overrightarrow{AB}$.
3) Construire un vecteur de même direction que $\overrightarrow{AB}$ mais de sens contraire et qui n'est pas égal à $\overrightarrow{BA}$.

19 Avec la figure de l'exercice **17** :

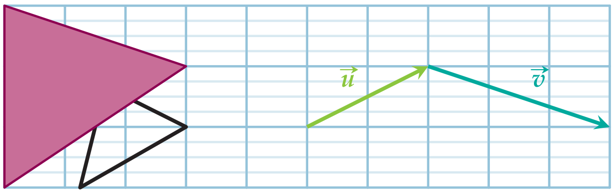
1) Placer les points E, F, G et H, images respectives du point A par les translations de vecteurs suivants.
   a) $\vec{w}$ b) $\vec{v}$ c) $\vec{p}$ d) $\vec{m}$
2) Placer les points I, J, K et L, images respectives du point B par les translations de vecteurs suivants.
   a) $\vec{r}$ b) $\vec{u}$ c) $\vec{w}$ d) $\vec{m}$
3) En utilisant les lettres de la figure,
   a) citer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$;
   b) citer deux vecteurs opposés à $\overrightarrow{AB}$.

Opérations sur les vecteurs

20 Un deltaplane se déplace suivant la translation de vecteur $\vec{u}$ puis celle de vecteur $\vec{v}$.

1) Reproduire la figure ci-dessous.

2) Construire l’image du nouveau deltaplane dans sa position finale.

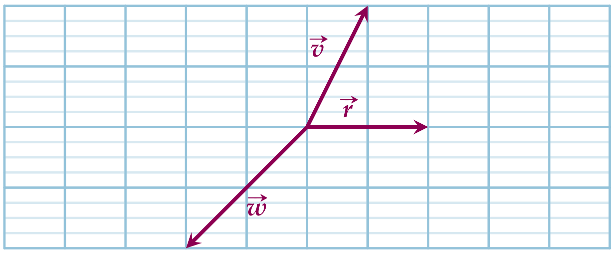


21 ► MÉTHODE 2 p. 205

1) Reproduire la figure ci-dessous.

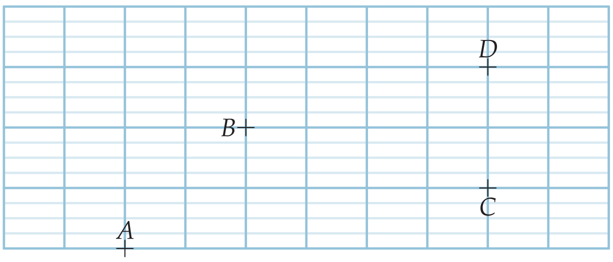
2) Construire les vecteurs suivants.

a) $\vec{w} + \vec{r}$ b) $\vec{r} + \vec{v}$ c) $\vec{v} + \vec{w}$



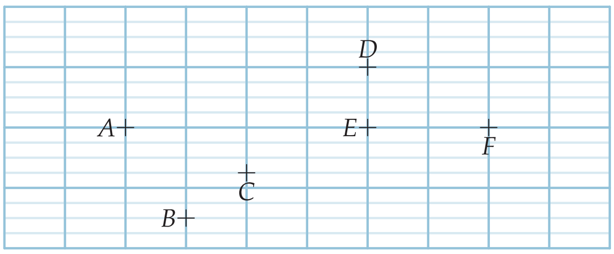
22 Même consigne qu’à l’exercice **21**.

1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ 2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$



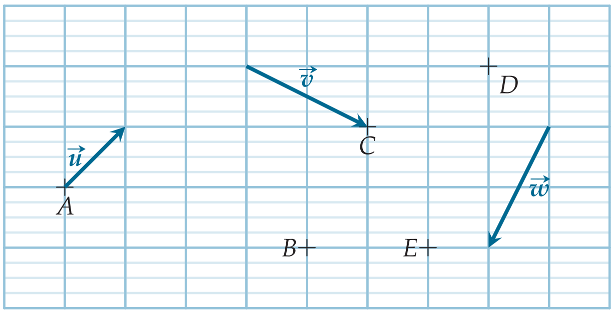
23 Même consigne qu’à l’exercice **21**.

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ 2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EF}$ 3) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE}$



24 Reproduire la figure ci-dessous et construire un représentant des vecteurs suivants.

1) $\vec{u} + \overrightarrow{AB}$ 2) $\vec{v} + \overrightarrow{CB}$ 3) $\vec{w} + \overrightarrow{DE}$



25 Compléter les égalités en n’utilisant que les points de la figure ci-dessous.

1) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$

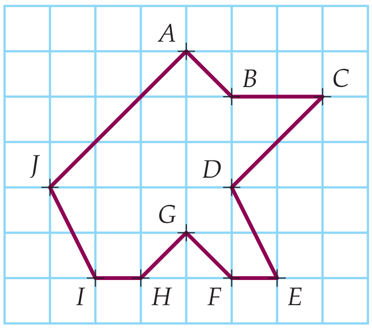
2) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\ldots} = \overrightarrow{HF}$

3) $\overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{\ldots B}$

4) $\overrightarrow{E\ldots} + \overrightarrow{\ldots E} = \overrightarrow{\ldots}$

5) $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{CM}$

6) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{\ldots} = \vec{0}$



26 Écrire le plus simplement possible.

1) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$

2) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA}$

3) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}$

4) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}$

5) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$

6) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$

27 Écrire le plus simplement possible.

1) $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}$

2) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$

3) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$

4) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DB}$

5) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{EM} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{EC}$

6) $-\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{SH} - \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{MU}$

28 En utilisant le motif de l’exercice **25** : donner un vecteur égal à :

1) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HI}$

2) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CB}$

3) $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IE}$

4) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}$

5) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}$

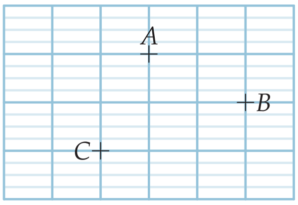
6) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{FE}$

7) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE}$

8) $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CD}$

S'entraîner

29 Vecteurs et représentants



1) Reproduire la figure ci-dessus.
2) Placer les points E et F tels que :
   - $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$
   - $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BC}$
3) Déterminer le représentant :
   a) du vecteur $\overrightarrow{BC}$ d'origine A ;
   b) du vecteur $\overrightarrow{BA}$ d'extrémité C.
4) Représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
   - $\vec{u} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$
   - $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
5) Quelle est la nature du quadrilatère $AEBF$? Justifier.

30 Petites démonstrations

Soit A, B et C trois points.

1) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
2) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$.
3) Que peut-on dire du point E ? Justifier.

31 Dans un parallélogramme...

$EFGH$ est un parallélogramme de centre O.

1) Construire les points S et T vérifiant :
   - $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$
   - $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}$
2) Démontrer que $\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OS} = \vec{0}$.
   Que peut-on en déduire ?

32 Dans un triangle rectangle...

Soit ABC un triangle rectangle en A.

1) Construire les points D et E tels que :
   - $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$
   - $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$
2) Quelle est la nature du quadrilatère $BCDE$? Justifier.

33 Démonstration

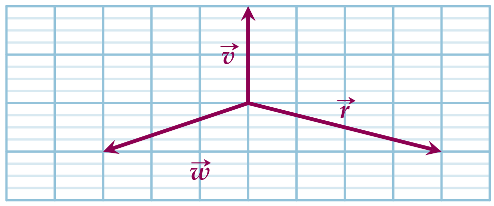
Tous les résultats devront être démontrés.

1) Construire un parallélogramme $ABCD$ de centre O.
   Nommer I le milieu de $[OC]$.
2) Construire A' le symétrique de A par rapport à D et O' le symétrique de O par rapport à B.
3) a) Démontrer que $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DB}$.
   b) Démontrer que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OO'}$.
   c) En déduire que I est le milieu de $[A'O']$.

34

Reproduire la figure ci-dessous et construire les vecteurs suivants.

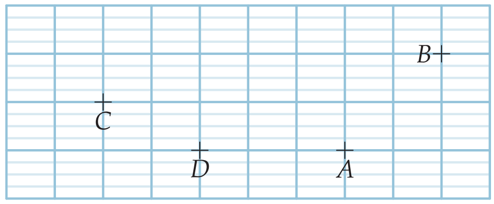
1) $\vec{u_1} = \vec{w} - \vec{r}$
2) $\vec{u_2} = \vec{r} - \vec{v}$
3) $\vec{u_3} = \vec{v} - \vec{w}$
4) $\vec{u_4} = \vec{r} - \vec{w}$
5) $\vec{u_5} = \vec{v} - \vec{r}$
6) $\vec{u_6} = \vec{w} - \vec{r}$
7) Quelles remarques peut-on faire ?



35

Même consigne qu'à l'exercice 34.

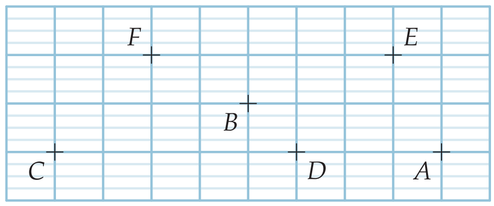
1) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$
2) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$
3) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$



36

Même consigne qu'à l'exercice 34.

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$
2) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EF}$
3) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FE}$
4) Que dire du quadrilatère $CEFD$?



37

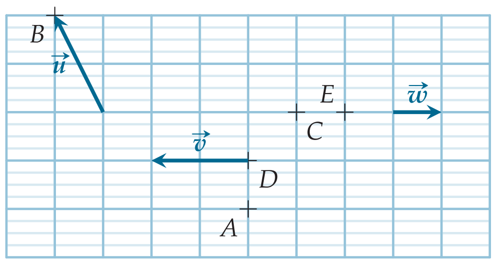
Reproduire la figure ci-dessous.

On considère les vecteurs suivants.

- $\vec{u_1} = \vec{u} - \overrightarrow{AB}$
- $\vec{u_2} = \vec{v} - \overrightarrow{CD}$
- $\vec{u_3} = \vec{w} - \overrightarrow{DE}$

Construire un représentant de :

1) $\vec{u_1}$ d'origine E ;
2) $\vec{u_2}$ d'origine A ;
3) $\vec{u_3}$ d'origine C ;
4) $\vec{u_1}$ d'extrémité C ;
5) $\vec{u_2}$ d'extrémité E ;
6) $\vec{u_3}$ d'extrémité A.



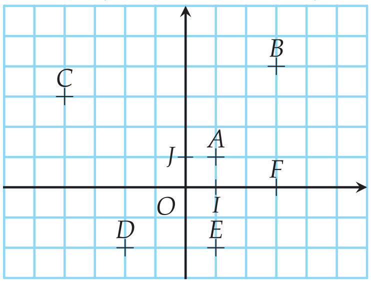
Coordonnées d’un vecteur

38 ► MÉTHODE 3 p. 206

Lire les coordonnées des vecteurs suivants.

1) $\overrightarrow{AB}$ 3) $\overrightarrow{CA}$ 5) $\overrightarrow{AE}$

2) $\overrightarrow{AC}$ 4) $\overrightarrow{DE}$ 6) $\overrightarrow{AF}$



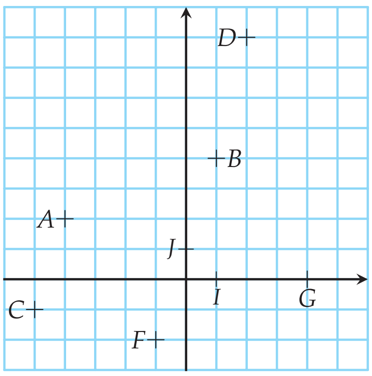
39 Dans le repère $(O; I, J)$ ci-dessous,

1) lire les coordonnées des points ;

2) calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

- $\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{BJ}$ • $\overrightarrow{FA}$ • $\overrightarrow{GF}$
- $\overrightarrow{AC}$ • $\overrightarrow{BD}$ • $\overrightarrow{FJ}$ • $\overrightarrow{BG}$

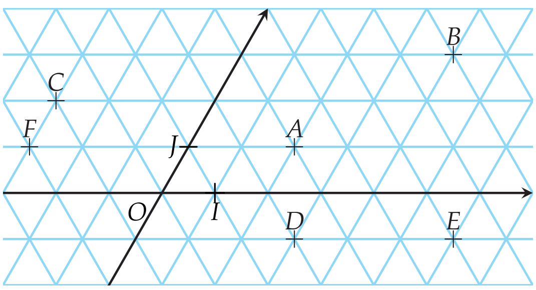
3) Dans cette liste, quels vecteurs sont égaux ? Lesquels sont opposés ?



40 Lire les coordonnées des vecteurs suivants dans le repère $(O; I, J)$ ci-dessous.

1) $\overrightarrow{AB}$ 3) $\overrightarrow{CA}$ 5) $\overrightarrow{AE}$

2) $\overrightarrow{AD}$ 4) $\overrightarrow{DE}$ 6) $\overrightarrow{CF}$



41 Construire un repère $(O; I, J)$ orthogonal.

1) Placer le point $A(-3; 4)$.

2) Construire un représentant du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3) Placer les points B et C tels que :
- $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$
- $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$

4) Calculer les coordonnées des points B et C.

5) Que peut-on dire du point A ? Justifier.

42 ► MÉTHODE 4 p. 206

Construire un repère $(O; I, J)$ et tracer deux représentants du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, l’un d’origine I et l’autre d’extrémité J.

43 **Coordonnées de vecteurs**

Dans le plan muni d’un repère, on considère les points $A(1; 2)$, $B(-2; 5)$ et $C(-3; -3)$.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

44 ► MÉTHODE 5 p. 207

Dans le plan muni d’un repère, on considère les points $E(2; -1)$, $F(-3; 4)$ et $G(1; 4)$.

Déterminer les coordonnées du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.

45 **Parallélogramme**

Dans un plan muni d’un repère, on considère les points $A(3; 5)$, $B(2; -1)$, $C(-2; -4)$ et $D(-1; 2)$.

Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.

46 Construire un repère $(O; I, J)$ orthogonal.

1) Placer les points $A(3; -9)$ et $B(-1; -5)$.

2) Placer les points C et D tels que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme de centre I.

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants.
- $\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{DC}$ • $\overrightarrow{AD}$

47 Dans le plan muni d’un repère, les coordonnées des points A et B sont respectivement $(5; -6)$ et $(-2; 6)$.

Le point A est le milieu de $[BC]$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$.

48 Dans le plan muni d’un repère orthonormal, on considère les points A, B et C respectivement de coordonnées $(1; 4)$, $(4; 6)$ et $(2; 3)$.

1) Quelles sont les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?

2) Prouver que $ABCD$ est aussi un losange.

S'entraîner

49 Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées des points A, B et D sont respectivement $(-2;5)$, $(0;9)$ et $(8;0)$.

1) Quelles sont les coordonnées du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?

2) Prouver que $ABCD$ est aussi un rectangle.

50 ► MÉTHODE 6 p. 207

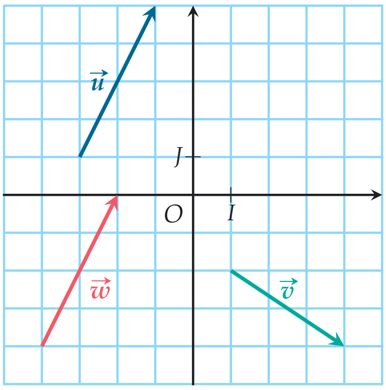
Le plan est muni d'un repère $(O; I, J)$.

1) Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

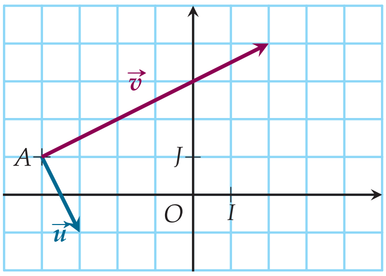
a) $\vec{u} + \vec{v}$ **c)** $\vec{u} + \vec{w}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$ **d)** $\vec{u} - \vec{w}$

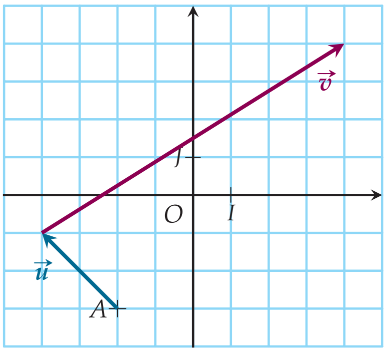


51 Reproduire la figure suivante et placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$.

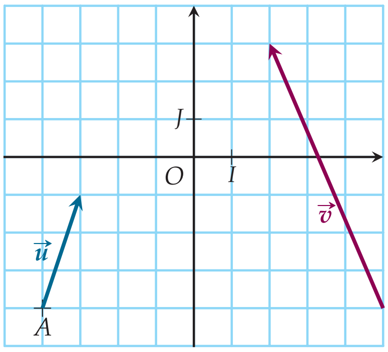
Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



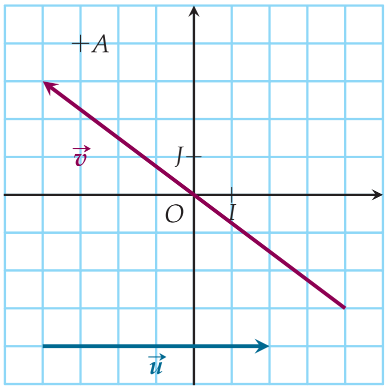
52 Même consigne que l'exercice **51**.



53 Même consigne que l'exercice **51**.



54 Même consigne que l'exercice **51**.



55 Reproduire la figure ci-dessous.

1) La compléter avec les points suivants.

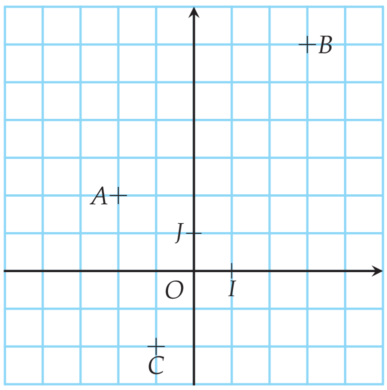
- $D(4,2)$
- $E(1;-2)$
- $F(-3;1)$

2) Placer les points G, H et K tels que :

- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}$
- $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}$
- $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}$

3) Lire leurs coordonnées.

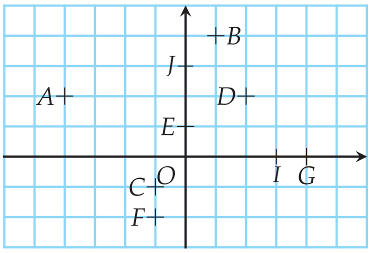
4) Les vérifier par le calcul.



56 Reproduire le graphique ci-dessous. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants et les représenter.

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ **3)** $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}$ **5)** $\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{BD}$

2) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BC}$ **4)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ **6)** $\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{CG}$



57 Construire un repère orthogonal.

1) Placer les points suivants.

- $A(-2;3)$ • $C(3;2)$ • $E(-3;1)$ • $G(2;3)$
- $B(-1;-2)$ • $D(4;-2)$ • $F(3;-3)$ • $H(5;1)$

2) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et un représentant de $-\overrightarrow{AB}$. Lire leurs coordonnées.

3) Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants et lire leurs coordonnées.

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$ **b)** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{GH}$

58 Dans le plan muni d'un repère, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées de $\vec{w}$, $\vec{m}$ et $\vec{z}$ tels que :

- $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}$ • $\vec{u}-\vec{m}=\vec{v}$ • $\vec{z}-\vec{u}=\vec{v}$

59 Construire un repère orthogonal.

1) Placer les points suivants.

- $A(0;0)$ • $C(2;-3)$ • $E(-3;1)$ • $G(1;5)$
- $B(1;-2)$ • $D(-5;-4)$ • $F(3;-3)$ • $H(-7;-2)$

2) Construire un représentant des vecteurs suivants et lire leurs coordonnées.

- Le vecteur qui, ajouté à $\overrightarrow{DC}$, donne $\overrightarrow{DA}$.
- Le vecteur qui, ajouté à $\overrightarrow{EF}$, donne $\overrightarrow{EH}$.
- Le vecteur qui, ajouté à $\overrightarrow{BC}$, donne $\overrightarrow{GH}$.
- Le vecteur qui, ajouté à $-\overrightarrow{AB}$, donne $\overrightarrow{EF}$.

60 Construire un repère orthogonal.

1) Placer les points suivants.

- $A(-2;2)$ • $D(4;0)$ • $F(2;-2)$
- $C(3;3)$ • $E(-2;0)$

2) Calculer les coordonnées des points B, G, H et K qui vérifient les relations vectorielles suivantes.

- $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ • $\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$
- $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$ • $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AD}$

Multiplication par un réel

61 ► MÉTHODE 7 p. 207

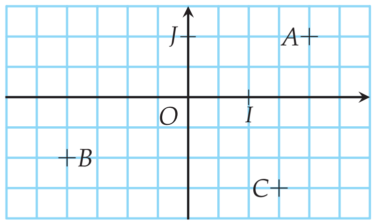
1) Reproduire la figure.

2) Construire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

- $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}$ • $\vec{v}=-3\overrightarrow{BC}$ • $\vec{w}=0,5\overrightarrow{AB}$

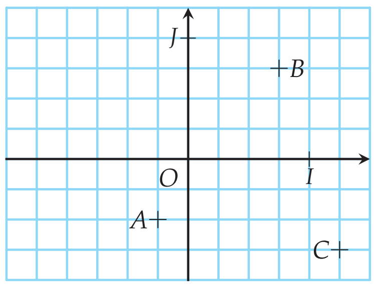
3) Lire leurs coordonnées.

4) Les vérifier par le calcul.



62 Même consigne qu'à l'exercice **61** avec :

- $\vec{u}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ • $\vec{v}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ • $\vec{w}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



63 Dans le plan muni d'un repère, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

1) $3\vec{u}$ **2)** $-4\vec{u}$ **3)** $\frac{2}{3}\vec{u}$ **4)** $-4,5\vec{u}$

64 Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on considère les points $P(-3;-1)$ et $R(2;3)$.

Quelles sont les coordonnées du point N qui vérifie l'égalité $\overrightarrow{ON}=4\overrightarrow{PR}$?

65 Dans un repère, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(3;-4)$ et $(-1;2)$. Quelles sont les coordonnées de C tel que $\overrightarrow{AB}=-5\overrightarrow{AC}$?

66 Dans un repère, on considère les points suivants : $A\left(\frac{2}{9};\frac{6}{25}\right)$ et $B\left(-\frac{5}{6};\frac{9}{20}\right)$.

Calculer les coordonnées de C tel que $\overrightarrow{AC}=\frac{15}{2}\overrightarrow{AB}$.

S'entraîner

67 Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $E\left(\frac{5}{6};-\frac{3}{5}\right)$ et $F\left(-\frac{1}{8};\frac{7}{10}\right)$.
Quelles sont les coordonnées du point G pour que l'égalité $\overrightarrow{EG}=\frac{4}{7}\overrightarrow{EF}$ soit vérifiée ?

68 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(3;2)$, $(9;-5)$ et $(-9;16)$. Ces points sont alignés.
Calculer le nombre k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

69 **Points et vecteurs**

Dans un repère, on considère les points suivants.

- $A(3;-1)$
- $B(-5;5)$
- $M\ (-1,2)$

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
2) Montrer que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$, λ réel à déterminer.
3) Que peut-on dire du point M ?

70 Soient les points $A(3;-2)$, $B(-1;7)$, $C(2;3)$.
1) Calculer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
2) Soit le point $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
Calculer les coordonnées du point M.

71 **Construction et calculs**

Dans un repère on considère les points suivants.

- $A(3;-2)$
- $B(-1;2)$
- $C(2;3)$

1) Construire les vecteurs suivants.
   a) $\overrightarrow{AB}$ c) $2\overrightarrow{AB}$ e) $2\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{BC}$
   b) $\overrightarrow{BC}$ d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ f) $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$
2) Vérifier leurs coordonnées par le calcul.

72 Dans un repère, on considère les points :

- $A(-3;2)$
- $B(1;-3)$
- $C(1;2)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :
   a) $2\overrightarrow{AB}$ c) $2\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{BC}$
   b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

73 **Avec des racines carrées**

Dans un repère, on considère les points suivants.

- $A(2\sqrt{2};3)$
- $C(\sqrt{2};-3)$
- $B(2;-\sqrt{2})$
- $D(3\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :
1) $\overrightarrow{AB}$ 3) $\overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{CA}$ 4) $\overrightarrow{BD}$

Colinéarité

74 ► MÉTHODE 8 p. 208

Dans le plan muni d'un repère, les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?
1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4,5\end{pmatrix}$
2) $\vec{s}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$
3) $\vec{w}\begin{pmatrix}-1,5\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix}3\\-10\end{pmatrix}$

75 Dans un repère orthogonal, placer les points :

- $A(-3;1)$
- $B(1;3)$
- $C(1,-4)$
- $D(7;-1)$

Les droites suivantes sont-elles parallèles ?
1) (AB) et (CD)
2) (AC) et (BD)

76 Dans un repère orthogonal, placer les points :

- $A\left(-\frac{1}{3};0\right)$
- $B\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$
- $C\left(\frac{4}{3};-1\right)$
- $D\left(0;-\frac{2}{3}\right)$

Les droites suivantes sont-elles parallèles ?
1) (AB) et (CD)
2) (BC) et (AD)

77 **Vérification de parallélisme** ALGO

Proposer un algorithme qui vérifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles à partir des coordonnées des points A, B, C et D entrées par l'utilisateur.

78 Dans un repère, on considère les points S, E et L dont les coordonnées sont respectivement $(2;5)$, $(-4;-3)$ et $(5;9)$.
Les points S, E et L sont-ils alignés ?
Si oui, quelle égalité vectorielle lie $\overrightarrow{SE}$ et $\overrightarrow{SL}$?

79 Dans un repère orthogonal, les points M, E et R ont pour coordonnées respectives :

- $\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{8}\right)$
- $\left(\frac{5}{9};\frac{5}{2}\right)$
- $\left(-\frac{7}{6};\frac{7}{6}\right)$

Les points M, E et R sont-ils alignés ?
Si oui, quelle égalité vectorielle lie $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MR}$?

80 **Vérification d'alignement** ALGO

Proposer un algorithme qui vérifie que les points A, B et C sont alignés à partir de leurs coordonnées entrées par l'utilisateur.

81 Dans le plan muni d'un repère, on considère les vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ vérifiant l'égalité $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$?

82 Le plan est muni d'un repère.

1) Placer les points $V(-1;-1,5)$, $A(-2;0)$ et $T(5;0)$.
2) Placer E tel que $\overrightarrow{VA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{VE}$.
3) Placer U tel que $\overrightarrow{TU}$ ait pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\0,5\end{pmatrix}$.
4) Que peut-on dire des droites (OU) et (ET) ? Justifier.

83 Dans un plan muni d'un repère, on place les points $A(1;-2)$, $B(-3;1)$, $C(-17;15)$ et $D(-5;6)$. Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

84 Dans un plan muni d'un repère, on place les points $A(3;-2)$, $B(-5;4)$ et $C(-2;-1)$.

1) Calculer les coordonnées de :
   - B' milieu de $[AC]$;
   - C' milieu de $[AB]$.
2) Prouver que $\overrightarrow{C'B'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
3) Calculer les coordonnées de G vérifiant $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.
4) Les points B, G et B' sont-ils alignés ?
   Si oui, déterminer le nombre k tel que $\overrightarrow{BG}=k\overrightarrow{BB'}$.

85 Construire un triangle ABC.

1) Placer les points M, P et N :
   a) $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$
   b) $\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MA}$
   c) $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MC}$
2) Prouver que $\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{PB}$.
   Que peut-on en déduire pour les points M, N et P ?

86 Placer trois points A, B et C dans un repère.

1) Représenter les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que :
   - $\vec{a}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC}$
   - $\vec{b}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CB}$
2) Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\overrightarrow{AB}$.
3) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\vec{b}-\overrightarrow{AC}$.
4) Prouver que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$.
   Que peut-on en déduire pour les points A, C et D ?
5) Prouver que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}$.
   Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABEC$?

87 Soit I le milieu d'un segment [AB].

1) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$?
2) Démontrer que $\overrightarrow{MI}=0,5(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$ pour tout point M.

88 **Le petit chaperon rouge**

Le petit chaperon rouge rend visite à sa mère-grand dans les bois. Il doit d'abord se rendre au village pour récupérer un pot de beurre puis passer par la clairière pour faire un bouquet de fleurs.

Dans un repère $(O;I,J)$, on a représenté la maison du petit chaperon rouge par le point $D(-1;-2)$, le village par le point $V(2;1)$, la clairière par le point $C(3;0)$ et enfin la maison de mère-grand par le point $M(0;-3)$.

Partie A

1) Faire une figure qui sera complétée par la suite.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs de déplacement du petit chaperon rouge : $\overrightarrow{DV}$, $\overrightarrow{VC}$, $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{DM}$.

Partie B

1) Calculer les distances DV, VC, CM parcourues par le petit chaperon rouge depuis le village jusqu'à la maison de sa mère-grand, ainsi que la distance DM correspondant au trajet direct.
2) Montrer que le quadrilatère $DVCM$ sur lequel chemine le chaperon rouge est un rectangle.

Partie C

Le grand méchant loup fait peur au petit chaperon rouge. Afin de sécuriser la forêt, un chasseur part à la recherche de la tanière du loup. Une vielle sorcière lui dit qu'elle se situe au point T qui vérifie la relation

$\overrightarrow{CT}=2\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{VM}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DV}$.

On cherche maintenant les coordonnées du point T.

1) Placer le point T sur la figure en laissant les traits de construction apparents.
2) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CT}$.
3) En déduire les coordonnées de T.

89 **Vers la droite d'Euler**

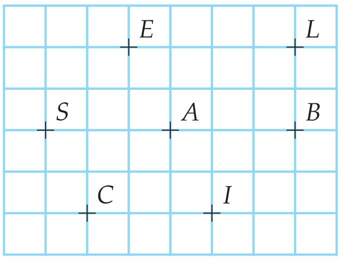
ABC est un triangle et A', B', C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1) Appliquer la formule établie à l'exercice **87** aux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.
2) En déduire que $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.
3) On note G le centre de gravité de ABC.
   En déduire que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

90 Sommes algébriques dans une grille

Le réseau ci-dessous a un maillage rectangulaire.
Exprimer chacun des vecteurs suivants sous la forme d'un seul vecteur.

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AL}$
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LA}$
3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AL}$
4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AE}$
5) $\overrightarrow{CL} - \overrightarrow{IB}$
6) $\overrightarrow{AE} - \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{SC}\right)$



91 Sommes algébriques sans grille

Soit A, B, C et D quatre points quelconques.

1) Démontrer les égalités suivantes.
   a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{DA}$
   b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
2) Simplifier l'écriture des vecteurs suivants.
   a) $\vec{u} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}\right)$
   b) $\vec{v} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

92 Autour d'un triangle

Soient T, R et I trois points non alignés.
Les points U et V sont définis par :

- $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1) Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2) Que peut-on conjecturer ?
3) a) Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$.
   b) Conclure.

93 Autour d'un triangle (bis)

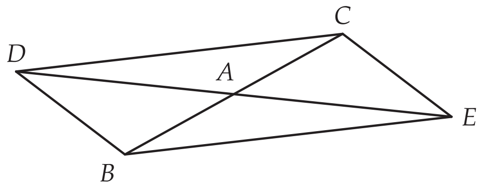
Soient T, R et I trois points non alignés. On définit les points A, B et C par :

- $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{IT}$
- $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RI}$
- $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{TI}$

1) Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2) Que peut-on conjecturer ?
3) a) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.
   b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

94 Vrai ou faux

$CDBE$ est un parallélogramme.
$[BC]$ et $[DE]$ sont sécants en A.



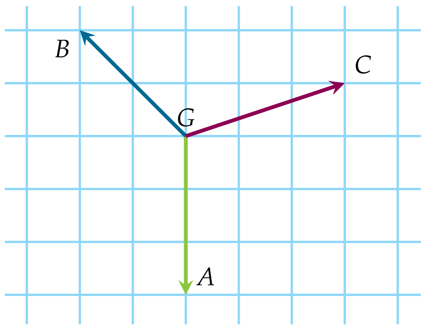
Des élèves ont écrit les phrases suivantes.
Indiquer celles qui sont fausses et les corriger pour qu'elles deviennent vraies.

1) D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.
2) A est le milieu $[DE]$ donc D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$.
3) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ donc A est le milieu de $[AC]$.
4) $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CB}$.

95 Forces

L'action de trois forces sur un objet est modélisée par l'action des trois vecteurs appliquée sur le point G qui représente le centre de gravité.

1) Recopier sur un quadrillage la figure ci-dessous.
2) Rajouter une force, c'est-à-dire un vecteur d'origine G, de telle sorte que la somme des forces soit égale au vecteur nul. L'objet est ainsi en équilibre.



96 Faire apparaître un point

Soit ABC un triangle et soit M un point quelconque du plan. On pose $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$.

Montrer que :

1) $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$
2) $\vec{v} = 3\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{CB}$
3) $\vec{v} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

97 **Alignement**

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par :

- $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

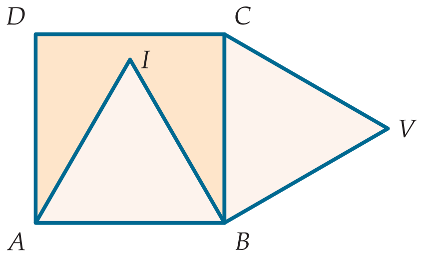
1) Faire une figure.
2) Que peut-on conjecturer sur les points B, F et E ?

On choisit $(A; D, B)$ comme repère.

3) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
4) En déduire les coordonnées du point C.
5) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}$?
6) En déduire les coordonnées du point F.
7) Calculer les coordonnées du point E.
8) Démontrer que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires. Conclure.

98 **Un classique**

Sur la figure ci-dessous, on considère le carré $ABCD$ de côté 5 cm et les triangles équilatéraux ABI et BCV.



1) Construire la figure en vraie grandeur.

On se place dans le repère $(A; B, D)$.

2) Calculer les coordonnées des points I et V.
3) Démontrer que les points D, I et V sont alignés.

99 **Prendre des initiatives**

On considère un parallélogramme $OIJK$. Les points A, B et G sont définis par :

- $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$
- $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$
- $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Faire une figure.
2) Choisir un repère pour démontrer que les points O, G et J sont alignés.

100 On considère trois points dans un repère tel que :

- $A\left(\frac{5}{3}; -\frac{7}{12}\right)$
- $B\left(\frac{-3}{4}; \frac{5}{6}\right)$
- $C\left(\frac{-1}{6}; \frac{-14}{3}\right)$

Calculer les coordonnées des points D, E et F tel que :

1) ABDC soit un parallélogramme ;
2) ABEC soit un parallélogramme ;
3) AFBC soit un parallélogramme.

101 **Parallélisme** INFO

On considère un triangle OST tel que :

- T' est le milieu de $[OS]$;
- S' est milieu de $[OT]$;
- O' est le milieu de $[TS]$;
- Δ et Δ' sont les droites perpendiculaires à la droite (OS) respectivement en O et en S ;
- la droite $(S'T')$ coupe la droite Δ en un point X ;
- la droite (XT) coupe la droite Δ' en un point Y.

Partie A : conjecture

1) Avec un logiciel de géométrie, construire la figure.
2) Déplacer le point T. Que dire de (OT) et $(O'Y)$?

Partie B : un exemple

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, les coordonnées des points S et T sont respectivement $(6; 0)$ et $(2; 4)$.

1) Déterminer les coordonnées des points T', S' et O'.
2) Quelle est l'abscisse de X ?
3) En exprimant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{T'S'}$ et $\overrightarrow{T'X}$, calculer l'ordonnée de X.
4) Vérifier que le point Y a pour coordonnées $(6; 6)$.
5) Vérifier la conjecture de la partie **A**.

102 **Colinéarité ?** ALGO

On considère l'algorithme ci-dessous qui vérifie si deux vecteurs $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(c; d)$ sont colinéaires.

```
1.  Liste des variables utilisées
2.    a,b,c,d : nombres
3.  Entrées
4.    Demander a, b, c, d
5.  Traitements
6.    Si ··· Alors
7.      Afficher ('colinéaires')
8.    Sinon
9.      Afficher ('non colinéaires')
10.   Fin Si
```

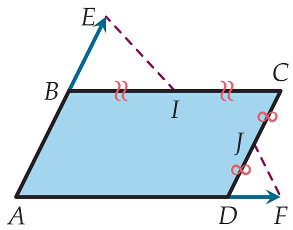
1) Compléter la ligne 6.
2) Modifier l'algorithme précédent pour qu'il décide si 3 points sont alignés à partir de leurs coordonnées.
3) Les points suivants sont-ils alignés ?
  a) $A(2; -7)$, $B(-2; 3)$ et $C(1; -7,5)$
  b) $J(0; 1)$, $K\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $L\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Approfondir

103 Avec des paramètres

Soit $ABCD$ un parallélogramme. I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[DC]$. a et b sont deux nombres réels et on considère les points E et F définis par

- $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{DF} = b\overrightarrow{AD}$



On se place dans le repère $(A; D, B)$.

1) Calculer en fonction de a et de b :
   a) les coordonnées des points E et F ;
   b) les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$.
2) Établir une relation entre a et b afin que les droites (EI) et (FJ) soient parallèles.

104 Parallélisme et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A, B et C.
Le point E est défini par $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure.
2) Établir une conjecture sur les droites (CE) et (AB).
3) Démontrer que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$.
4) Conclure.

105 Milieu et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A, B et C.
Les points P et Q sont définis par :

- $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure.
2) Que peut-on conjecturer sur le point Q ? Et sur B ?
3) Démontrer que $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
   En déduire la position du point B.
4) Exprimer $\overrightarrow{BQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
   En déduire la position du point C.

106 Parallélogramme et alignement

On considère un parallélogramme $ABCD$.

1) Construire les points M et N définis par :
   - $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD}$
   - $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
2) Exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4) Montrer que les points C, M et N sont alignés.

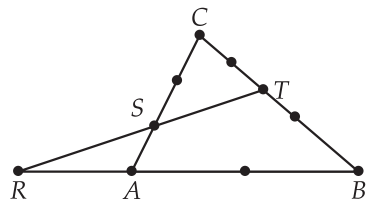
107 Médiane et calcul vectoriel

On considère un triangle MUV et I le milieu de $[UV]$.

1) Faire une figure.
2) Que dire de la somme vectorielle $\overrightarrow{IU} + \overrightarrow{IV}$? Justifier.
3) Démontrer que $\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV} = 2\overrightarrow{MI}$.

108 Points alignés : deux méthodes

On considère le triangle ABC. R est un point de (AB), S un point de (AC) et T un point de (BC).



À partir de la figure, déterminer les valeurs des réels α, β et γ tels que :

- $\overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AS} = \beta\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BT} = \gamma\overrightarrow{BC}$

Dans la suite, on se propose de démontrer que les points R, S et T sont alignés en utilisant deux méthodes.

Partie A : méthode géométrique

Dans cette partie, on utilise des égalités vectorielles.

1) Montrer que
   a) $\overrightarrow{RS} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AT} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.
2) En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{RT}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.

Partie B : méthode analytique

On considère le repère $(A; B, C)$.

1) Donner les coordonnées des points suivants : A, B, C, S et R.
2) Calculer les coordonnées du point T.
3) Montrer que les coordonnées de $\overrightarrow{ST}$ sont $\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{4}{15}\right)$.
4) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires.
5) Conclure.

109 Pour aller plus loin

On considère le triangle ABC et a un nombre réel. M, S et T sont définis par :

- $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AS} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BT} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{BC}$

Trouver la position du point M sur la droite (AB) afin que les points S, T et M soient alignés.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Géométriquement

- Construire l'image d'une figure par une translation
- Construire un représentant d'un vecteur défini par
  - une translation
  - la somme ou la différence de vecteurs
  - le produit d'un vecteur par un nombre
- Utiliser la relation de Chasles

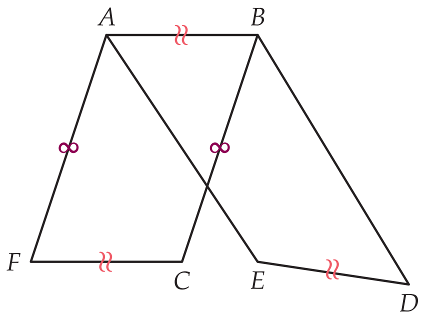
Analytiquement

- Calculer les coordonnées :
  - d'un vecteur à partir des coordonnées de deux points
  - de la somme ou la différence de deux vecteurs
  - du produit d'un vecteur par un nombre
  - d'un point défini par une condition vectorielle
- Reconnaître et utiliser la colinéarité de deux vecteurs

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net @

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.



110 L'image de F dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point :

(a) C (b) E

111 L'image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$

(a) est F

(b) n'est pas tracée sur la figure

112 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

(a) vrai (b) faux

113 $AB+BD=AD$

(a) vrai (b) faux

114 $ABDE$ est un parallélogramme.

(a) vrai (b) faux

115 $FCBA$ est un parallélogramme.

(a) vrai (b) faux

116 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BD}$

(a) vrai (b) faux

117 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CF}$

(a) vrai (b) faux

118 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}$

(a) vrai (b) faux

119 $DE=BA$

(a) vrai (b) faux

120 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}$

(a) vrai (b) faux

121 $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$

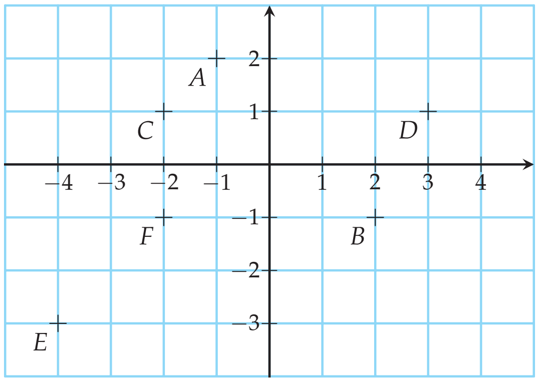
(a) vrai (b) faux

122 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CE}$

(a) vrai (b) faux

123 $\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$

(a) vrai (b) faux



124 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

ⓐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

125 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont :

ⓐ $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

126 Les coordonnées du vecteur $\vec{p} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FE}$ sont :

ⓐ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

127 Les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{FA}$ sont :

ⓐ $(1;3)$ ⓑ $(3;2)$ ⓒ $(2;3)$ ⓓ $(1;-4)$

128 Les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AD}$ sont :

ⓐ $(-8;-2)$ ⓑ $(0;4)$ ⓒ $(4;-2)$ ⓓ $(-2;8)$

129 Les coordonnées du point I tel que $ACBI$ soit un parallélogramme sont :

ⓐ $(-1;1)$ ⓑ $(3;0)$ ⓒ $(1;-2)$ ⓓ $(-5;4)$

130 Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$ sont :

ⓐ $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

131 Les coordonnées du vecteur $\vec{k}$ tel que $\vec{k} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD}$ sont :

ⓐ $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

132 Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est colinéaire au vecteur :

ⓐ $\overrightarrow{CA}$ ⓑ $\overrightarrow{AC}$ ⓒ $\overrightarrow{BD}$ ⓓ $\overrightarrow{ED}$

133 Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est colinéaire au vecteur :

ⓐ $\overrightarrow{AD}$ ⓑ $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ⓒ $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⓓ $\vec{z}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

TP 1 Soyons affine

INFO

On étudie un déplacement de points dans le plan muni d'un repère.

(Pour le dessin on prendra un repère orthonormé $(O\,;I,J)$ d'unité 1 cm ou 1 carreau).

On se donne un couple de nombres $(a\,;b)$ et on déplace un point en ajoutant le nombre a à son abscisse et le nombre b à son ordonnée. À partir d'un point M on obtient un point M', appelé image de M par ce déplacement.

1 On pose $a = 3$ et $b = -2$

On donne les points $A(-1\,;1)$, $B(2\,;3)$ et $C(-2\,;4)$.

1) Calculer les coordonnées des points A', B' et C', images des points A, B et C.

2) Quelles sont les coordonnées du point D qui a pour image $D'(-0,4\,;-1,6)$?

3) D'une manière générale, quelles sont les coordonnées de M', l'image de $M(x\,;y)$?

4) Démontrer que le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme.

5) Démontrer que ce déplacement est une translation
en démontrant que $AA'M'M$ est un parallélogramme.

2 Avec un logiciel de géométrie dynamique

Dans cette seconde partie, le couple $(a\,;b)$ n'est pas donné : c'est une variable grâce à une figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique.

Ouvrir un tel logiciel puis suivre les instructions.

1) Créer deux variables réelles a et b variant avec un pas de 0,1.

2) Construire l'image de $A(-1;1)$.

3) Régler les variables a et b afin que l'image de A, notée A', ait pour coordonnées $(1\,;-2)$.
Noter ces valeurs. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{AA'}$.

4) Soit B le point de coordonnées $(2\,;0)$.
Déterminer les coordonnées de B', image de B par la même translation.

5) Montrer que $ABB'A'$ est un parallélogramme.

6) Construire un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a\,;b)$ et le colorier en rouge.
(Rentrer dans la zone de saisie :"u=(a,b)".)

7) Faire varier a et b jusqu'à obtenir l'alignement des points A, B, A', B'.
Le parallélogramme $ABB'A'$ est alors aplati. Noter le couple $(a;b)$ correspondant.

8) Recommencer pour obtenir un autre couple $(a;b)$ tel que ces points soient à nouveau alignés.
Noter tous les couples $(a;b)$ qui semblent convenir.

9) Quelle conjecture peut-on émettre sur le vecteur $\vec{u}$ pour obtenir cet alignement ?

10) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

11) Prouver la conjecture par le calcul.

Travaux pratiques

TP 2 Dans la peau d'un programmeur

ALGO

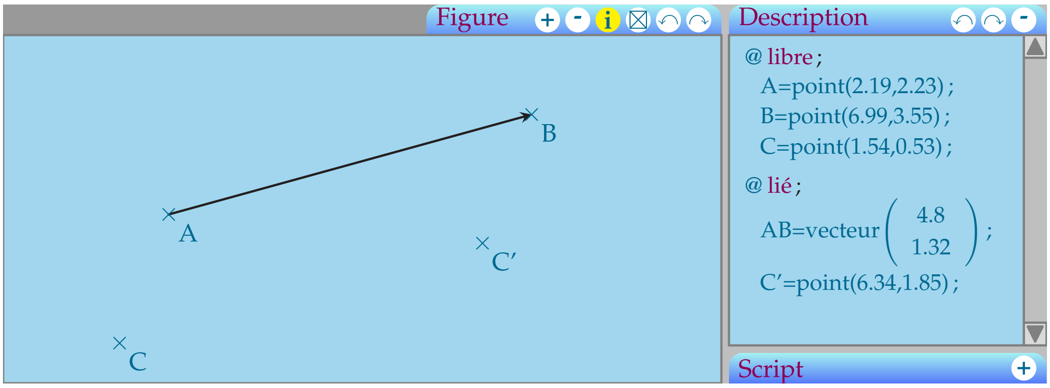
Vous êtes programmeur pour un concepteur de logiciel de géométrie dynamique.

1 Vecteur et translation

Voici une capture d'écran du logiciel sur lequel vous travaillez.

Votre mission : gérer l'affichage des coordonnées des objets dans le menu **Description**.

L'utilisateur a placé trois points libres A, B, C. Il a utilisé l'icône « vecteur » pour tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Il a utilisé l'icône « translation » pour tracer C' le translaté de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Proposer un algorithme qui calcule les nouvelles coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du point C' à partir des nouvelles coordonnées des points A, B et C quand l'utilisateur déplace l'un de ces trois points à la souris.

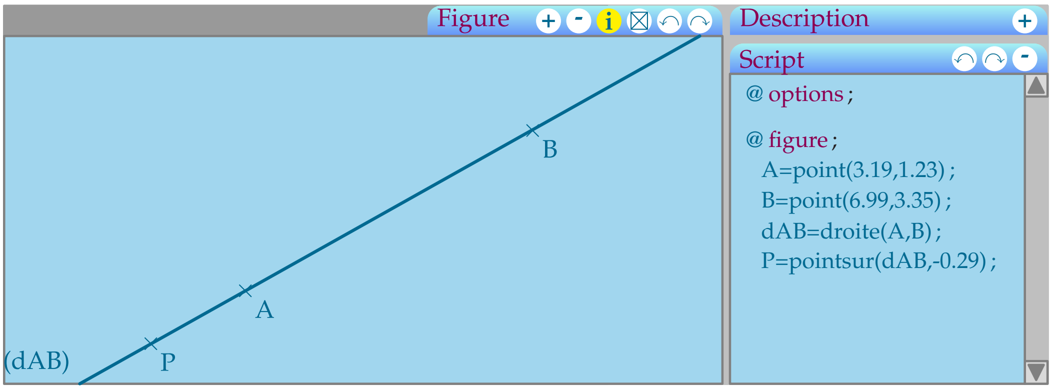
2 Point sur

Voici une deuxième capture d'écran du logiciel sur lequel vous travaillez.

Votre mission : gérer l'affichage des objets dans la fenêtre **figure** .

L'utilisateur a placé deux points libres A et B.

Il a tracé la droite (AB). Il a placé le point P sur la droite (AB).



Dans la fenêtre `script`, le point P est défini par `P=pointsur(dAB,-0.29)`.

$-0,29$ indique que $\overrightarrow{AP} = -0,29\overrightarrow{AB}$.

L'utilisateur substitue une nouvelle valeur, que l'on notera k, au -0.29 dans la fenêtre script et met la figure à jour. Proposer un algorithme qui calcule les nouvelles coordonnées du point P, en vue de l'affichage du point, à partir de k.

TP 3 Droite d'Euler

1 Préliminaires

Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(A; I, J)$.

1) Placer les points $B(6; 6)$ et $C(18; 0)$.

2) Construire le triangle ABC.

3) Placer les points A', le milieu de $[BC]$, B', le milieu de $[AC]$, et C', le milieu de $[AB]$.

2 Un point spécial

1) Calculer les coordonnées de A', B' et C'.

2) Calculer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. Le placer sur la figure.

3) Vérifier que le point G est aligné avec B et B'.

4) Vérifier que le point G est aligné avec C et C'.

5) Que représente le point G pour le triangle ABC ?

3 Centre du cercle circonscrit

1) Construire les trois médiatrices du triangle ABC.

2) Placer O leur point de concours, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) L'une des médiatrices est parallèle à l'un des axes du repère.
Lequel ? Et pourquoi ? En déduire l'une des coordonnées du point O.

4) Sachant que $OA = OB$, calculer l'autre coordonnée du point O.

4 Orthocentre

1) Construire les trois hauteurs du triangle.

2) Placer leur point de concours, H, orthocentre du triangle ABC.

3) L'une des hauteurs est parallèle à l'un des axes du repère.
Lequel ? Et pourquoi ? En déduire l'une des coordonnées du point H.

4) Expliquer pourquoi les droites (AH) et (OA') sont parallèles.

5) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires.

6) Déterminer le nombre k tel que $\overrightarrow{AH} = k \times \overrightarrow{OA'}$.

7) En déduire la deuxième coordonnée du point H.

5 Droite d'Euler

À partir de leurs coordonnées déterminées dans les parties 1 à 4,
vérifier que les points G, O et H sont alignés sur une droite qu'on appelle **la droite d'Euler**.

Leonhard Paul Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans, le 18 septembre 1783, à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse. Il a aussi montré que, pour tout triangle, les neuf points suivants : les pieds des trois hauteurs, les milieux des trois côtés et les milieux de chacun des segments reliant l'orthocentre aux sommets du triangle sont situés sur un même cercle dit « cercle d'Euler ».

Travaux pratiques

TP 4 Aller plus loin avec la translation

INFO

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et rechercher l'icône translation.

1) Placer trois points A, B et C.

2) Créer un vecteur $\vec{u}$.

3) Faire construire les translatés des points A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$.

4) En faisant des simulations judicieuses que vous décrirez, émettre des hypothèses quant aux propriétés suivantes :

a) la translation conserve les longueurs ;

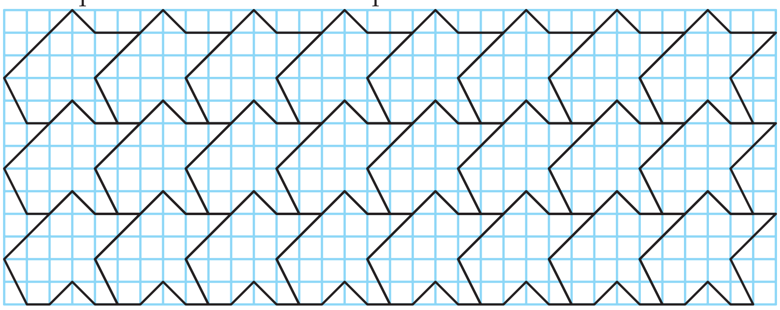
b) la translation conserve l'alignement ;

c) la translation conserve les angles.

TP 5 Pavage

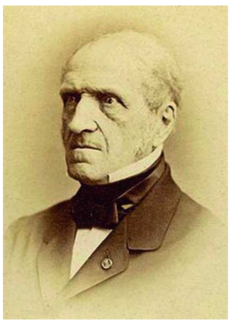
INFO ALGO

À l'aide du logiciel Algobox, programmer un algorithme qui permette de créer le motif de l'activité **2**, en indiquant les coordonnées des points d'un seul motif et en le translatant.



Récréation, énigmes

Chasles, l'histoire...



Michel Chasles fut un mathématicien français de la fin du XIXe siècle. La relation qui porte son nom est plus un hommage qui lui est rendu qu'une découverte de sa part car cette égalité était connue bien avant lui. Marc Bloch (grand historien français, 1886-1944) raconte dans son ouvrage posthume « *Apologie pour l'Histoire, ou métier d'historien* »Ed Armand Colin – p 98, une anecdote peu connue sur lui.

En 1857, Chasles présenta à l'Académie des sciences une série de lettres soit-disant inédites de Blaise Pascal (mathématicien philosophe du XVIIe). Ces documents établissaient que c'était Blaise Pascal qui avait découvert la fameuse loi sur l'attraction universelle, plus de trente ans avant Isaac Newton. Quel scoop ! Des scientifiques de l'Académie furent sceptiques, les anglais vexés, mais Chasles, mathématicien de renom avait du crédit et il s'embourba dans sa théorie fumeuse en ramenant régulièrement de nouveaux trésors pour répondre à ses critiques. Il rapporta aussi des lettres inédites de Pythagore, d'Alexandre le Grand à Aristote, de Cléopâtre à Jules César, etc. En fait, sans doute imbu de son savoir et de son rang, Chasles achetait en toute confiance ces documents à un faussaire, Vrain-Lucas, qui se faisait passer pour ignorant. Celui-ci fut jugé et condamné en 1870. Chasles quant à lui fût ridiculisé.

GÉOMÉTRIE

4

Équations de droites

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Évaluer la valeur d'une expression littérale
- Résoudre des équations
- Placer des points dans un repère
- Lire les coordonnées d'un point

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Soit l'expression $y = -3x + 2$.

1) Quelle est la valeur de y si :

a) $x = -6$? **b)** $x = \dfrac{2}{3}$?

2) Quelle est la valeur de x si :

a) $y = -5$? **b)** $y = -\dfrac{1}{4}$?

4 Sur le graphique ci-contre :

1) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de la **droite** (HE) avec l'axe des ordonnées ?

2) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de la **droite** (AF) avec l'axe des abscisses ?

3) Repérer les points de la **droite** (AF) qui ont des coordonnées entières et citer-les.

4) Quelle est l'abscisse du point d'intersection des droites (HE) et (AF) ?

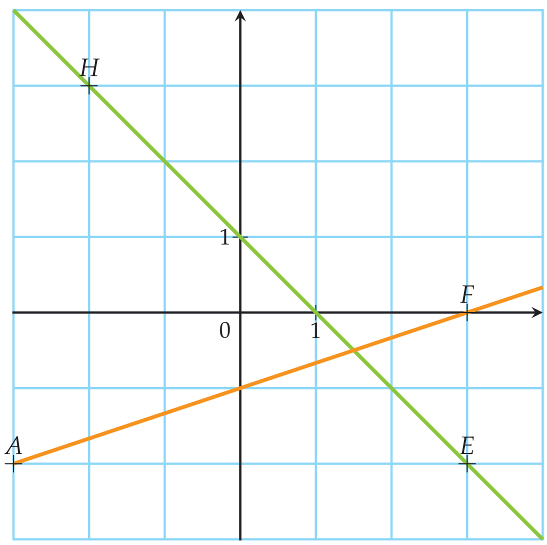
2 Soit l'expression $y = 0,4x - 0,8$.

1) Le couple $(-2; 5)$ vérifie-t-il cette égalité ?

2) Le couple $(0; -0,8)$ vérifie-t-il cette égalité ?

3 Soit la relation $-5y - 2x + 4 = 0$.

Exprimer y en fonction de x.



Voir solutions p. 259

Activités d'approche

DÉBAT 1 Zoom

Dans un repère orthonormal $(O; I, J)$, construire la droite (d) passant par les points $A(67; 41)$ et $B(-23; -4)$ pour des abscisses de -5 à 5. Présenter, en argumentant, la méthode choisie.

ACTIVITÉ 2 Équations

Soient $A(1; 3)$, $B(-2; 3)$ et $C(1; 1)$ trois points du plan.

1) Quels sont, parmi les points A, B et C, ceux dont les coordonnées vérifient les équations suivantes ? Justifier chacune des réponses.

- $\mathscr{E}_1 : x = 1$
- $\mathscr{E}_2 : y = 3$
- $\mathscr{E}_3 : y = 2x + 1$
- $\mathscr{E}_4 : y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$
- $\mathscr{E}_5 : y^2 = 4x^2 + 4x + 1$
- $\mathscr{E}_6 : x^2 + y^2 = 2$

2) Où se trouvent les points du plan dont les coordonnées vérifient $\mathscr{E}_1$?
Les représenter dans un repère orthogonal.

3) Reprendre la question précédente avec, dans l'ordre : $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, $\mathscr{E}_4$, $\mathscr{E}_5$ et $\mathscr{E}_6$.

4) Classer les équations précédentes selon des critères à expliciter.

DÉBAT 3 Deux ?

Il suffit de deux points distincts pour définir une droite mais est-ce vraiment nécessaire ?

1) Tracer la droite (d_1) passant par les points $A(-2; 4)$ et $B(3; 6)$.

2) Tracer la droite (d_2) passant par le point $C(-3; -1)$ et de coefficient directeur $a = -1$.

3) Tracer la droite (d_3) passant par le point $D(2; -1)$ et d'ordonnée à l'origine $b = 3$.

4) Tracer la droite (d_4) passant par le point $F(3; 4)$ et perpendiculaire à l'axe des abscisses.

5) De combien d'informations a-t-on besoin pour tracer chacune de ces droites ?

ACTIVITÉ 4 Démonstration version 2.0

On définit la droite (AB) comme l'ensemble des points M alignés avec A et B. Samir, depuis qu'il a suivi le cours de Maths de son professeur M. Apa, préfère comme définition :
« *la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$* ».

1) Dans cette question, on considère les points $A(-40; -155)$ et $B(20; 25)$.
$M(x, y)$ est un point pris au hasard dans le plan mais distinct de A.
Traduire, avec ses coordonnées, la condition : « *$\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$* ».
En déduire une équation de la droite (AB).

2) Peut-on trouver l'équation de n'importe quelle droite à partir de deux de ses points ?

DÉBAT 5 Point commun

1) Dresser un tableau de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = 5x - 4$ sur $[-4; 4]$ avec un pas de 1. Quelle relation semble lier les images de deux nombres consécutifs de la 2e ligne du tableau ?

2) Étudier de même la fonction g définie par $g(x) = -2x + 3$ pour confirmer votre conjecture.

3) Prouver votre conjecture.

1. Équations de droites

DÉFINITION : Équation de courbe

Une **équation de courbe** est une relation qui lie les coordonnées de tous les points de la courbe. Autrement dit : un point appartient à une courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe.

REMARQUE : Une courbe peut avoir plusieurs équations.
Par exemple, « $xy = 4$ »et « $2xy = 8$ »sont des équations de la même courbe.

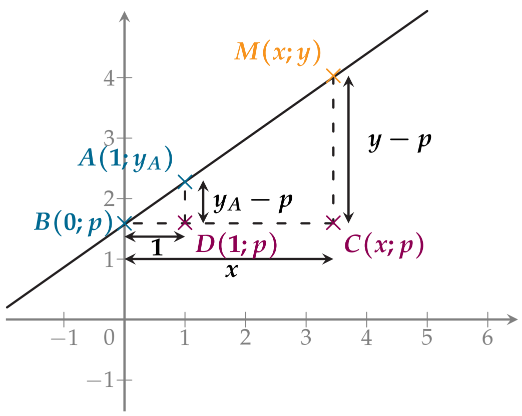
PROPRIÉTÉ : Équation d'une droite

Soit (d), une droite dans un repère $(O; I, J)$.

- Si (d) est **parallèle à l'axe des ordonnées** alors
  (d) admet une équation de la forme $x = c$ où c est un nombre réel.
- Si (d) **n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées** alors
  (d) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$, m et p étant des nombres réels.

PREUVE On se place dans un repère orthonormal (O ;I,J).

- Si (d) est **parallèle** à l'axe des ordonnées, alors elle coupe l'axe des abscisses en un seul point, C, de coordonnées $(c; 0)$. Un point M de coordonnées $(x; y)$ pris au hasard sur cette droite aura la même abscisse que C.
  Donc **la droite (d) admet $x = c$ comme équation.**
- Si (d) **n'est pas parallèle** à l'axe des ordonnées, (d) et l'axe des ordonnées se coupent en un point B, de coordonnées $(0; p)$.
  A est le point de la droite (d) d'abscisse 1. et M un point de coordonnées $(x; y)$ pris au hasard sur la demi-droite [BA) et n'appartenant pas au segment [AB].
  Les autres positions du point M et la réciproque seront étudiées dans l'exercice 67.



On place les points C et D d'ordonnée p de manière à ce que BMC soit rectangle en C et BAD soit rectangle en D.
Ces deux triangles sont en configuration de Thalès.
Il vient donc $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{DA}{CM} = \dfrac{BA}{BM}$.
Comme le repère est orthonormal, on évalue ces longueurs à partir des coordonnées des points et l'égalité des deux premiers rapports devient : $\dfrac{1}{x} = \dfrac{y_A - p}{y - p}$.

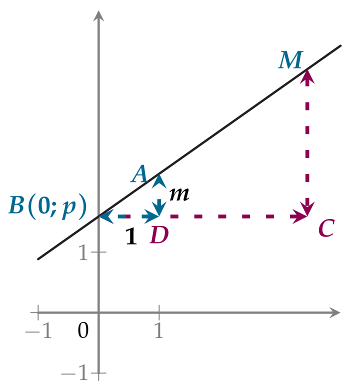
L'égalité des produits en croix donne : $(y_A - p)x = y - p$.
Les nombres p et $y_A - p$ ne dépendent que de la position de la droite (d) dans le repère.
Ils sont fixes et on note $m = y_A - p$.
$(y_A - p)x = y - p$ devient alors $mx = y - p$ soit $y = mx + p$.
Donc **tous les points de la droite (d) vérifient l'équation $y = mx + p$.**

Cours - Méthodes

REMARQUES :

On considère le cas des droites non parallèles à l'axe des ordonnées.

- Une droite a une infinité d'équations.
  L'équation de la forme $y = mx + p$ est appelée **équation réduite**.
- Dans la démonstration précédente, le point B d'ordonnée p est l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
  p est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite (d).
- L'égalité $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{DA}{CM}$ permet aussi d'écrire que $\dfrac{DA}{BD} = \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{m}{1} = m$.
  m est appelé le **coefficient directeur** de la droite (d).
- Les accroissements des ordonnées sont proportionnels aux accroissements des abscisses et m est le coefficient de proportionnalité.



Exemple On considère la droite (d) d'équation $y = 2x - 3$.
Les points $A(1;4)$ et $B(-1;-5)$ appartiennent-ils à la droite (d) ?

Correction

$2x_A - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1$. Or, $-1 \neq y_A$. Donc $A \notin (d)$.
$2x_B - 3 = 2 \times (-1) - 3 = -5 = y_B$. Donc $B \in (d)$.

MÉTHODE 1 Trouver l'équation réduite d'une droite par le calcul

► Ex. 20 p. 234

Lorsque l'on connaît les coordonnées $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ de deux points distincts d'une droite,

- si $x_1 = x_2$, la droite est **parallèle** à l'axe des ordonnées.
  Son équation réduite est $x = x_1$.
- si $x_1 \neq x_2$, la droite **n'est pas parallèle** à l'axe des ordonnées.
  Son équation réduite est de la forme $y = mx + p$.
  - Le **coefficient directeur** se calcule comme suit : $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ou $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
  - On calcule **l'ordonnée à l'origine** p avec les coordonnées de l'un ou l'autre des points en résolvant une équation d'inconnue p : $y_1 = mx_1 + p$ ou $y_2 = mx_2 + p$.

Exercice d'application Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(4;6)$ et $(1;-2)$.
Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

Correction

$A(4;6)$ et $B(1;-2)$ n'ont pas la même abscisse. Donc la droite (AB) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$.

$m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ soit $m = \dfrac{6-(-2)}{4-1} = \dfrac{8}{3}$.

Ensuite, p est solution de $y_A = mx_A + p$ soit

$6 = \dfrac{8}{3} \times 4 + p$ donc $p = 6 - \dfrac{32}{3} = -\dfrac{14}{3}$.

L'équation réduite de (AB) est $y = \dfrac{8}{3}x - \dfrac{14}{3}$.

Exemple Les points $A(-1;1)$, $B(2;10)$ et $C(30;94)$ sont-ils alignés ?

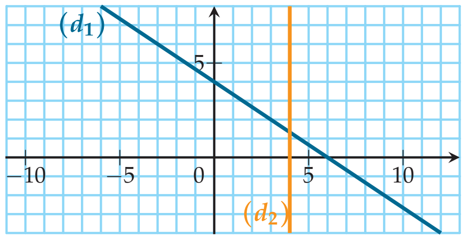
Correction Les points A et B n'ont pas la même abscisse, donc l'équation réduite de la droite (AB) est de la forme $y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{10-1}{2-(-1)} = \dfrac{9}{3} = 3$.

$p = y_A - mx_A = 1 - 3 \times (-1) = 1 + 3 = 4$.
L'équation réduite de la droite (AB) est $y = 3x + 4$.
$mx_C + p = 3 \times 30 + 4 = 94 = y_C$. Donc $C \in (AB)$.
Donc, les points A, B et C sont alignés.

MÉTHODE 2 Trouver l'équation réduite d'une droite par lecture graphique ► Ex. 17 p. 234

- Si la droite est **verticale**, il suffit de lire c, l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses. L'équation réduite de la droite est alors $x = c$.
- Sinon, l'équation réduite de la droite est de la forme $y = mx + p$.
  - p est l'**ordonnée** du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
  - m est l'**accroissement des ordonnées** (positif ou négatif) lorsque l'on passe d'un point de la droite à un autre point dont l'abscisse est augmentée d'une unité.

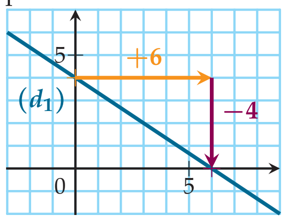
Exercice d'application Quelles sont les équations des droites (d_1) et (d_2) ?



Correction

- La droite (d_1) **n'est pas parallèle** à l'axe des ordonnées donc son équation réduite est de la forme $y = mx + p$.

Elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $A(0;4)$ donc $p = 4$.
Pour déterminer m, on choisit un autre point de la droite de coordonnées entières.



$m = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$.

L'équation de la droite (d_1) est : $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

- La droite (d_2) est **parallèle** à l'axe des ordonnées. Elle coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(4;0)$.
L'équation de la droite (d_2) est $x = 4$.

2. Représentation graphique d'une fonction affine

PROPRIÉTÉ : Représentation graphique d'une fonction affine

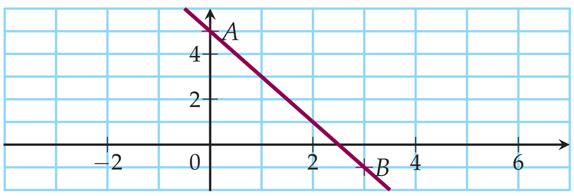
Soit m et p deux nombres réels et f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.
Les coordonnées $(x;y)$ de tous les points de la représentation graphique de la fonction f sont liées par la relation $y = mx + p$. Il s'agit d'une droite **non parallèle** à l'axe des ordonnées.
Si $m = 0$, la fonction est dite **constante** et sa représentation graphique a pour équation $y = p$.
Si $p = 0$, la fonction est **linéaire** et sa représentation graphique a pour équation $y = mx$.

MÉTHODE 3 Construire la courbe représentative d'une fonction affine ► Ex. 30 p. 235

Exercice d'application Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = -2x + 5$.

Correction La fonction f est affine, sa représentation graphique est une droite et il suffit de connaître deux de ses points.

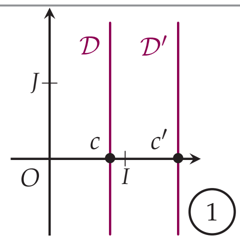
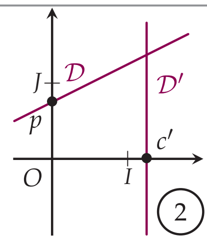
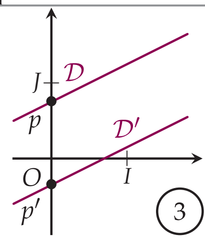
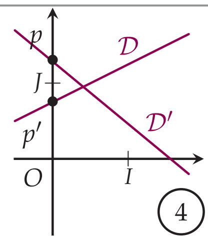
x	0	3
$f(x)$	5	-1
Points à placer	$A(0;5)$	$B(3;-1)$



Cours - Méthodes

3. Droites parallèles, droites sécantes

Voici un tableau récapitulatif des positions relatives de deux droites à partir de leur équation réduite.

Équation de $\mathcal{D}$	$x = c$	$y = mx + p$		
Équation de $\mathcal{D}'$	$x = c'$	$x = c'$	$y = m'x + p'$	
Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes	$m = m'$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles	$m \neq m'$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes
Représentation				

MÉTHODE 4 Interpréter un système de deux équations linéaires

► Ex. 49 p. 236

Lors de la **résolution** d'un système de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues avec des coefficients non nuls, chaque équation peut se transformer en une équation réduite de droite. **Résoudre un tel système** revient à chercher les éventuels points d'intersection de deux droites à partir de leurs équations réduites. Ces deux droites peuvent être :

- **sécantes** (coefficients directeurs différents). Le système a une **unique** solution.
- **confondues** (même équation réduite). Le système a une **infinité** de solutions.
- **strictement parallèles**. Le système n'a **aucune** solution.

Exercice d'application Résoudre les systèmes.

1) $\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 15x + 6y = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x + 2y = 9 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 6y = 18 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

Correction

1) Le système devient $\begin{cases} y = -\dfrac{5}{2}x + 1 \\ y = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{2}{3} \end{cases}$

On reconnaît deux équations de droites parallèles non confondues (figure 3), ce système n'a pas de solution.

2) $\begin{cases} 6x + 2y = 9 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ devient $\begin{cases} y = -3x + \dfrac{9}{2} \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

On reconnaît deux équations de droites sécantes (figure 4).

La solution de ce système est unique.

$-3x + \dfrac{9}{2} = 2x + 3$ donne $x = \dfrac{3}{10}$

et $y = 2x + 3$ donne $y = \dfrac{18}{5}$.

La solution est le couple $\left(\dfrac{3}{10}; \dfrac{18}{5}\right)$.

3) $\begin{cases} 3x - 6y = 18 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ devient $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x - 3 \\ y = \dfrac{1}{2}x - 3 \end{cases}$

Il s'agit de la même équation de droite. Les solutions sont les couples de coordonnées de tous les points de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 3$.

Activités mentales

1 Parmi les équations suivantes, lesquelles sont des équations de droites ?

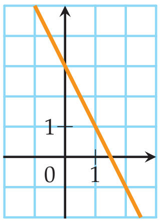
1) $y = \sqrt{3}x - 2$

2) $yx = 2$

3) $x = \dfrac{5}{7}$

4) $y = (x-2)^2 - (x+6)^2$

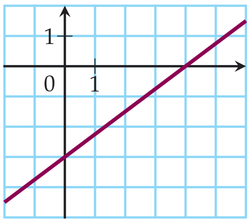
2 On donne le graphique ci-contre.

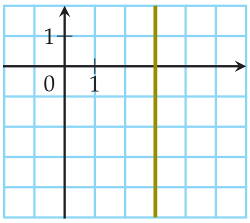


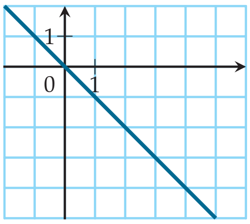
1) Quelle est l'ordonnée à l'origine de cette droite ?

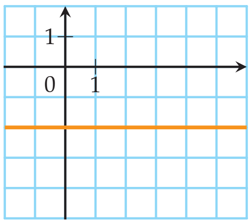
2) Quel est le coefficient directeur de cette droite ?

3 Donner les équations réduites des droites.

1)


3)


2)


4)


4 Quelle est l'équation réduite de la droite d'équation : $3x - 6y = 2$?

5 Le point A de coordonnées $(-2;3)$ appartient-il à la droite d'équation $y = 4x + 5$?

6 La droite $(\mathcal{D}_1)$ d'équation $y = \dfrac{15}{6}x - 5$ et la droite $(\mathcal{D}_2)$ d'équation $y = \dfrac{20}{8}x + 5$ sont-elles parallèles ?

7 Déterminer l'intersection des droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ d'équations respectives $y = 5x - 7$ et $x = -4$.

8 Quel est le nombre de solutions des systèmes ?

1) $\begin{cases} y = -1{,}5\,x + 2{,}4 \\ y = -1{,}5\,x - 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = 5\,x - 1 \\ y = 7\,x - 1 \end{cases}$

Équations de droites

9 Indiquer si l'équation proposée est une équation de droites. Préciser l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur le cas échéant.

1) $y^2 = 3x - 2$

2) $y = -5x + 7$

3) $x^4 = 1$

4) $x = 3$

5) $y = 5x^2 + 5$

6) $y = \dfrac{-3x+1}{5}$

10 Même consigne que l'exercice **9**.

1) $-23x + 57 = y$

2) $2y = -5x + 7$

3) $x = -31$

4) $x - 3 = 5$

5) $0 = 17x$

6) $\dfrac{-3x+1}{y} = 1$

11 Vérifier si le point $C(3;7)$ appartient à chacune des droites dont les équations sont données ci-dessous.

1) $y = 3x + 2$

2) $y = 3x - 2$

3) $y = -2x - 2$

4) $y = -2x + 13$

12 Vérifier si le point $D(-4;1)$ appartient à chacune des droites dont les équations sont données ci-dessous.

1) $y = 2x + 1$

2) $y = 2x + 9$

3) $y = -3x - 11$

4) $y = -x + 3$

13 Vérifier si le point $E\left(-\dfrac{5}{6}; -\dfrac{7}{3}\right)$ appartient aux droites dont les équations sont données ci-dessous.

1) $y = 2x + 1$

2) $y = 2x - 9$

3) $y = -6x - 15$

4) $y = -5x + 3$

14 Vérifier si le point $F(-1;-2)$ appartient à chacune des droites dont les équations sont données ci-dessous.

1) $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{4}{5}$

2) $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$

3) $y = \dfrac{-6}{7}x - \dfrac{15}{14}$

4) $y = \dfrac{12}{17}x + \dfrac{3}{11}$

15 Indiquer si l'équation proposée est celle d'une droite parallèle à un axe du repère et préciser lequel, le cas échéant.

1) $y = 5x - 17$

2) $x = 2{,}5$

3) $y = -3x - 12$

4) $y = 5$

5) $y = -\dfrac{1}{2}x + 7$

6) $y = 2x$

16 Même consigne que l'exercice **15**.

1) $y = 3x + 7$

2) $y = -3$

3) $y = x$

4) $x = \sqrt{2}$

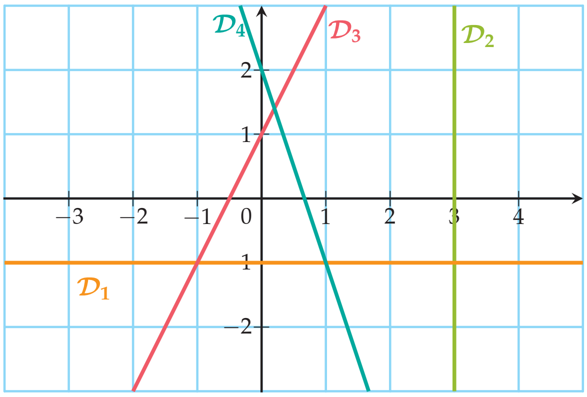
5) $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{7}$

6) $y = -\dfrac{3x+5}{2}$

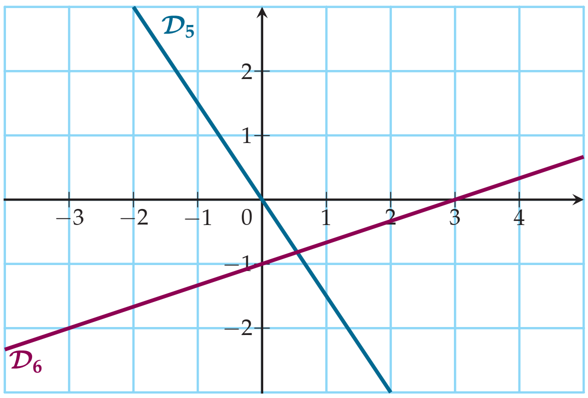
S'entraîner

17 ► **MÉTHODE 2** p. 231

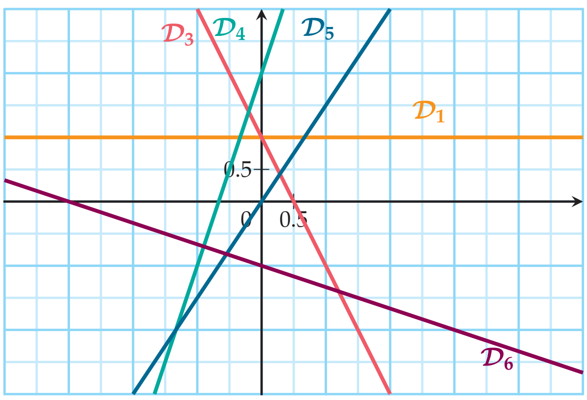
Déterminer une équation de chacune des droites tracées dans le repère ci-dessous.



18 Même énoncé que l'exercice **17**.



19 Même énoncé que l'exercice **??**.



20 ► **MÉTHODE 1** p. 230

Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les deux points proposés.

1) $A(3;5)$ et $B(1;1)$
2) $C(8;12)$ et $D(3;2)$
3) $G(2;-6)$ et $H(2;8)$
4) $K(2;3)$ et $L(2;7)$

21 Même consigne qu'à l'exercice **20**.

1) $E(-2;4)$ et $F(2;-5)$
2) $M\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $N\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$
3) $P\left(-\sqrt{2};3\sqrt{8}\right)$ et $Q\left(5\sqrt{32};-2\sqrt{128}\right)$

22 **Point connu** ALGO

On considère le point $A(5;-7)$.

1) Donner une équation de la droite verticale et une équation de la droite horizontale passant toutes deux par le point A.
2) Donner une équation d'une droite oblique passant par le point A.
3) Donner une équation d'une droite oblique qui ne contienne pas le point A.
4) Écrire un algorithme qui demande une équation de droite en entrée puis qui indique si A appartient à cette droite ou pas.

23 **Droite connue** ALGO

On considère la droite $(\mathcal{D}) : y = -3x + 7$.

1) Déterminer deux points :
  a) qui appartiennent à la droite $(\mathcal{D})$;
  b) qui n'appartiennent pas à la droite $(\mathcal{D})$.
2) Écrire un algorithme qui demande les coordonnées d'un point en entrée puis qui indique si le point est sur $(\mathcal{D})$ ou pas.

24 Tracer dans un même repère les droites d'équations réduites proposées.

1) $y = 2x - 1$
2) $y = -3x + 4$
3) $y = x$
4) $y = -0,5x + 2$
5) $y = -5x - 3$
6) $y = 5x - 3$

25 Même consigne qu'à l'exercice **24**.

1) $y = -4x$
2) $y = 3$
3) $y = x - 2$
4) $x = 5$
5) $y = -x$
6) $x = y$

26 Même consigne qu'à l'exercice **24**.

1) $y = \dfrac{2}{3}x - 1$
2) $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{2}{5}$
3) $y = 2x - \dfrac{1}{3}$
4) $y = \sqrt{5}x - \sqrt{2}$
5) $y = \dfrac{7}{3}x + 2$
6) $y = \dfrac{-2}{7}x$

Courbe d'une fonction affine

27 Pour chacune des droites dont les équations sont ci-dessous, dire s'il existe une fonction représentée par cette droite.

1) $y = 2$ **2)** $x = -2$ **3)** $2x - 3y = 5$

28 Pour chacune des équations de droites ci-dessous, donner la nature de la fonction qu'elle représente.

1) $y = 3$ **2)** $y = -x + 5$ **3)** $y = -4x$

29 Même consigne qu'à l'exercice **28**.

1) $y = (x-3)(x+3) - x^2$ **2)** $y = (3-x)^2 - (x^2+9)$

30 ► MÉTHODE 3 p. 231

Tracer, dans un même repère orthonormal, les droites représentant les fonctions affines suivantes.

1) $f(x) = x + 2$ **3)** $h(x) = 2x + 1$

2) $g(x) = -x + 2$ **4)** $l(x) = 2x - 1$

31 Même consigne qu'à l'exercice **30**.

1) $n(x) = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{1}{3}$ **2)** $q(x) = -\dfrac{3}{4}x - 2$

32 Même consigne qu'à l'exercice **30**.

1) $r(x) = \dfrac{2}{3}x + 3$ **2)** $q(x) = -\dfrac{4}{5}x - 2$

33 **Algorithme mystère** ALGO

```
Algorithme : Mystère
Liste des variables utilisées
  x1, x2, y1, y2 : réel
  m : réel
Entrées
  Demander x1, x2, y1 et y2
Traitements
  Si x1≠x2 Alors
    Calculer (y1-y2)/(x1-x2)
    Stocker la réponse dans m
    Afficher la valeur de m
  Sinon
    Afficher « m n'existe pas »
  Fin Si
Fin de l'algorithme
```

1) Que fait l'algorithme ci-dessus ?

2) Comment le modifier pour afficher une équation de droite ?

Droites parallèles, droites sécantes

34 Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = 2x - 5$. Donner une équation réduite pour chaque type de droite suivante.

1) droite sécante à $(\mathcal{D})$;

2) droite parallèle à $(\mathcal{D})$;

3) droite parallèle à $(\mathcal{D})$ et passant par $A(2;1)$;

4) droite sécante à $(\mathcal{D})$ et passant par A.

35 Même consigne qu'à l'exercice **34** avec la droite $(\mathcal{D})$, d'équation $x = 5$.

1) droite sécante à $(\mathcal{D})$;

2) droite parallèle à $(\mathcal{D})$;

3) droite parallèle à $(\mathcal{D})$ et passant par $B(-2;5)$;

4) droite sécante à $(\mathcal{D})$ et passant par B.

36 Décrire la position relative des droites d'équations suivantes.

1) $y = -3x + 5$ **3)** $x = 3$ **5)** $y = -3x + 7$

2) $y = 3x$ **4)** $y = 3x + 5$ **6)** $y = 3$

37 Même consigne qu'à l'exercice **36**.

1) $y = 2x - 5$ **3)** $x = \dfrac{-14}{2}$ **5)** $y = \dfrac{4}{2}x - \dfrac{25}{5}$

2) $y = \dfrac{4}{5}x - 2$ **4)** $y = \dfrac{6}{3}$ **6)** $y = \dfrac{8}{10}x$

38 Les droites (AB) et $(\mathcal{D})$ sont-elles parallèles ?

1) $A(5;-10)$, $B(7;-2)$ et $(\mathcal{D}) : y = 4x + 5$

2) $A(91;-280)$, $B(277;830)$ et $(\mathcal{D}) : y = 6x - 2$

3) $A(13\,351;17\,630)$, $B(-7\,432;5\,754)$ et $(\mathcal{D}) : y = \dfrac{4}{7}x$

4) $a(0;1)$, $B(3;1)$ et $(\mathcal{D}) : 6y - 4x + 1 = 0$

39 **Automatisation** ALGO

Écrire un algorithme demandant les coordonnées de deux points, l'équation d'une droite et qui détermine si cette droite est parallèle à la droite passant par les deux points donnés.

40 Pour chacune des droites dont une équation est proposée ci-dessous, donner une équation réduite des droites symétriques :

- par rapport à l'axe des ordonnées ;
- par rapport à l'axe des abscisses ;
- par rapport à l'origine du repère.

1) $(\mathcal{D}_1) : x = 2$ **3)** $(\mathcal{D}_3) : y = 2x - 1$

2) $(\mathcal{D}_2) : y = -4$ **4)** $(\mathcal{D}_4) : y = -3x + 4$

S'entraîner

41 Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

1) $A(2;-1)$, $B(3;5)$, $C(3;-5)$ et $D(5;7)$.

2) $A(15;30)$, $B(5;20)$, $C(-10;-20)$ et $D(50;40)$.

3) $A(8;210)$, $B(177;14)$, $C(88;312)$ et $D(86;222)$.

42 **Automatisation – bis** ALGO

Écrire un algorithme qui demande les coordonnées de quatre points en entrée et qui détermine si la droite passant par les deux premiers points est parallèle à celle passant par les deux derniers.

43 On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(8;3)$, $(3;5)$ et $(3;2)$.

Déterminer y, ordonnée du point D de coordonnées $(-3;y)$ tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

44 Les points A, B et C sont-ils alignés ?

1) $A(0;6)$, $B(6;0)$ et $C(3;3)$;

2) $A(1;7)$, $B(-2;-9)$ et $C(3;2)$;

3) $A(-21;-61)$, $B(-1;-1)$ et $C(23;71)$;

45 **Automatisation – come-back** ALGO

Écrire un algorithme qui demande les coordonnées de trois points en entrée et qui détermine si les trois points sont alignés.

46 On considère les points A et B de coordonnées respectives $(1;-5)$ et $(-1;3)$.

Déterminer y, ordonnée du point C de coordonnées $(2;y)$ tel que A, B et C soient alignés.

47 **Droites parallèles**

On considère le point $A(-7;1)$ et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation réduite $y=-5x+1$.

Déterminer x, abscisse du point B de coordonnées $(x;8)$ tel que les droites (AB) et $(\mathcal{D})$ soient parallèles.

48 Soit A, B et C trois points de coordonnées respectives $(2;-1)$, $(7;1)$ et $(2;2,5)$.

Déterminer les coordonnées d'un point D pour que ABDC soit un parallélogramme.

49 ► MÉTHODE 4 p. 232

Déterminer le nombre de solutions des systèmes.

1) $\begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} y=3x+5 \\ y=2x-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y=2x-3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 3x-5y=9 \\ 6x-9y=18 \end{cases}$

50 Pour chacun des systèmes suivants :

- déterminer le nombre de solutions ;
- résoudre les systèmes ayant des solutions.

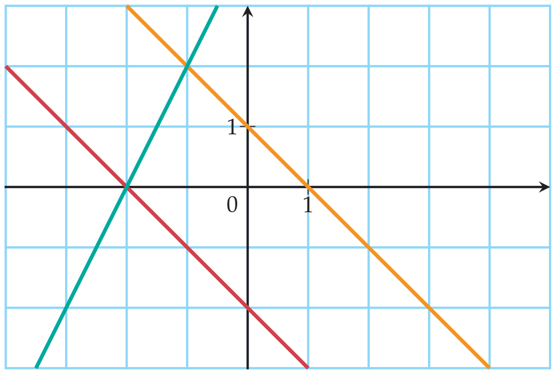
1) $\begin{cases} y=-x+2 \\ y=-3x+4 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y=-2x+\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

51 Même consigne qu'à l'exercice **50**.

1) $\begin{cases} 3y+6x=-3 \\ 2y-4x=6 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} y=3x-5 \\ 2y-6x=4 \end{cases}$

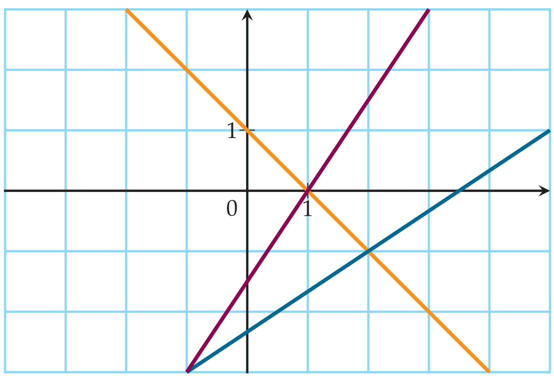
2) $\begin{cases} y=2x+3 \\ x=-3x-4 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}x-2 \\ x=4 \end{cases}$

52 À l'aide du graphique ci-dessous, donner les solutions des systèmes suivants.



1) $\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x+1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=-x-2 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x-2 \end{cases}$

53 Même consigne qu'à l'exercice **52**.



1) $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3} \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2} \\ y=-x+1 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Problèmes

54 Au bar de la poste, 5 amis profitent de la terrasse au soleil. Ils ont commandé 2 cafés et 3 thés. Le serveur leur demande 10,10 €.
Ils sont rejoints par 4 amis qui commandent 3 cafés et 1 thé. Cette fois-ci, le serveur leur demande 7,10 €.
Afin que les amis puissent payer chacun leur part, déterminer le prix d'un thé et le prix d'un café.

55 Problème de différence ALGO

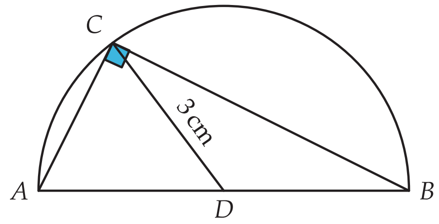
1) Trouver deux nombres dont la différence est 7 et dont la différence de leurs carrés est 21.
2) Proposer un algorithme qui, à partir de la différence de deux nombres et de la différence de leurs carrés, retrouve les deux nombres.

56 Équation diophantienne
Une équation diophantienne du premier degré est une équation de la forme $ax + by = c$ où a, b et c sont des nombres entiers et où les solutions $(x; y)$ sont des entiers également.
1) Donner des exemples d'équations diophantiennes.
2) Représenter graphiquement les solutions réelles de l'équation $3x + 7y = 1$.
3) Indiquer des solutions particulières de l'équation diophantienne $3x + 7y = 1$.

57 Solde
Amira va faire les boutiques. Elle achète dans un même magasin deux tee-shirts et une jupe pour 119,70 €. La semaine suivante, elle reçoit un texto du magasin pour des ventes privées : réduction de 50 % pour les tee-shirts et de 30 % sur les jupes. Elle décide de faire des cadeaux à sa mère et ses sœurs et achète 6 tee-shirts et 2 jupes. Elle paye 173,56 €.
Quelle somme ces ventes privées lui ont-elles fait économiser ?

58 Vitesse
Kader et Sophie, toujours aussi amoureux, habitent à 4 km l'un de l'autre. Ils décident de se rejoindre à vélo à « mi-chemin ». Kader avance à une vitesse constante de 11 km·h^{-1} et Sophie à une vitesse constante de 8 km·h^{-1}. Quelles distances auront-ils chacun parcourues quand ils se retrouveront, s'ils partent ensemble ?

59 Longueurs
Un triangle rectangle d'aire 8,64 cm^2 est inscrit dans un cercle de rayon 3 cm.



Pour trouver les longueurs de chacun des côtés de l'angle droit, suivre la démarche suivante.
1) Calculer le produit de ces deux longueurs.
2) Utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la somme de leur carré.
3) Utiliser les identités remarquables pour calculer le carré de leur somme et le carré de leur différence.
4) Calculer leur somme et leur différence.
5) Résoudre le système formé de ces deux expressions.
6) Conclure.

60 Concurrence
Lors d'une sortie, l'ensemble des participants est partagé en huit groupes pour une collation dans différents lieux.
- À la boulangerie de la Marine, le groupe 1 commande 3 croissants et 5 brioches pour 15 € et le groupe 2, 3 croissants et 2 brioches 10,50 €.
- À la boulangerie du Pont Neuf, le groupe 3 paie 22,70 € 6 croissants et 5 brioches et le groupe 4 17,80 € 4 croissants et 5 brioches.
- Le groupe 5 se rend au supermarché et achète 6 croissants et 5 brioches pour 21,55 €. Il est accompagné du groupe 6 qui paie 17,75 € 3 croissants et 7 brioches.
- Enfin, les deux derniers groupes se rendent au salon de thé. Ils savourent 4 croissants et 3 brioches pour 14,60 € et 5 croissants et 2 brioches pour 15,80 €.

Sans résoudre de système, déterminer où il est financièrement plus intéressant de se rendre.

61 Problème de division
Trouver deux nombres dont la somme vaut 1 776 et dont la division euclidienne du plus grand des deux par le plus petit a pour quotient 6 et pour reste 19.

Approfondir

62 De grandes coordonnées

Dans un repère $(O; I, J)$ d'unité graphique 1 cm, tracer la droite passant par les points $A(-2\,198; -2\,202)$ et $B(1\,892; 1\,888)$.

La construction sera soigneusement justifiée.

63 Théorème de Pappus

On se place dans un repère $(O; I, J)$ et on considère les points suivants $A_1(0; 0)$, $B_1(1; 1)$, $C_1(4; 4)$, $A_2(1; -3)$, $B_2(4; -3)$ et $C_2(7; -3)$.
On note :

- A l'intersection des droites (B_1C_2) et (B_2C_1) ;
- B l'intersection des droites (A_1C_2) et (A_2C_1) ;
- C l'intersection des droites (A_1B_2) et (A_2B_1).

Montrer que les points A, B et C sont alignés.

> Cette propriété est vraie quelle que soit la position des points A_1, B_1 et C_1 sur une droite (d_1) et A_2, B_2 et C_2 sur une droite (d_2). Elle porte le nom de Pappus d'Alexandrie, mathématicien de la Grèce Antique dont les écrits prennent une grande part dans notre connaissance des mathématiques de l'époque.

64 Une équation pour deux droites

Dans un repère $(O; I, J)$, on considère l'équation suivante : $(E) : x^2 - y^2 = 0$.

1) Déterminer dix points, répartis dans chacun des quatre quadrants, dont les coordonnées vérifient l'équation donnée et les placer dans le repère $(O; I, J)$.
2) Factoriser le membre de gauche de l'équation (E).
3) Trouver deux équations (E_1) et (E_2) telles qu'un couple $(x; y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x; y)$ est solution de (E_1) ou de (E_2).
4) Quel est l'ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation (E) ?
5) Déterminer une équation de la "courbe" formée des deux droites (AB) et (AC) avec $A(1; 3)$, $B(3; -1)$ et $C(-2; 0)$.

65 Une équation, une droite ?

Dans un repère orthonormal $(O; I, J)$, on considère l'équation suivante : $x^2 + y^2 = 1$.
Quel semble être l'ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation (E) ?

66 Un peu de culture

Pour son anniversaire, Emma a reçu un bon de 400 € utilisable au Pagnol, une salle de spectacles. La programmation de cette année propose 20 pièces de théâtre à 14 € par pièce et 40 films à 8 € par film.
Elle appelle x le nombre de pièces et y le nombre de films qu'elle pourra voir.

Partie A

Passionnée par les deux types de spectacle, elle voudrait en voir autant des deux.

1) Déterminer la relation qui lie x et y si Emma dépense la totalité de son bon.
2) Expliquer pourquoi x ne peut pas être égal à y.
3) Dans un repère orthonormal, construire la représentation graphique de cette équation.
4) Déterminer les points de la représentation qui ont des coordonnées entières.
5) Choisir pour Emma la combinaison qui lui permettra de voir presque autant de films que de pièces de théâtre.

Partie B

Emma change d'avis ! Elle voudrait voir deux fois plus de films que de pièces de théâtre.

1) Que faut-il tracer sur le graphique pour répondre à la question ?
2) Quelles seraient les solutions possibles ?

67 La fin d'une démonstration

Partie A : toutes les configurations

Dans la démonstration de l'existence d'une équation réduite de la forme $y = mx + p$ pour toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées, une configuration a été étudiée : $M \in [BA)$ mais $M \notin [AB]$.

1) Que se passe-t-il si $M \in [AB]$?
2) Trouver toutes les autres configurations possibles pour cette situation.
3) Constituer des groupes pour se partager l'étude de chaque configuration.

Partie B : réciproque

On considère un point S sur la droite et un point H n'appartenant pas à la droite mais de même abscisse que le point S.
Calculer les ordonnées de S et H et conclure.

68 Le polygone des E.C.C.

1) Le tableau ci-après donne la répartition des lycées généraux et technologiques en fonction du nombre d'élèves en 2009-2010.

	Nombre de lycées
Moins de 100 élèves	5
De 100 à 199 élèves	10
De 200 à 299 élèves	42
De 300 à 399 élèves	70
De 400 à 499 élèves	110
De 500 à 599 élèves	115
De 600 à 699 élèves	127
De 700 à 799 élèves	150
De 800 à 899 élèves	145
De 900 à 1199 élèves	403
De 1200 à 1499 élèves	227
1500 élèves et plus	167
Total	1 571

source : http ://www.data.gouv.fr/

a) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

b) Soit $A9$ et $A10$ les points de coordonnées respectives $(900;774)$ et $(1200,1177)$.
Déterminer une équation de la droite (AB).

c) En déduire une estimation de la médiane.

d) Déterminer les quartiles.

2) Le tableau suivant donne le nombre d'enfants adoptés selon leur âge. Calculer la médiane et les quartiles sans faire de graphique.

Âge	**Nombre d'enfants adoptés**
0 à 6 mois	88
6 à 12 mois	352
1 an à 2 ans	472
2 ans à 3 ans	271
3 ans à 4 ans	178
4 ans à 5 ans	135
5 ans à 7 ans	214
7 ans et plus	285
Total	**1995**

source : http ://www.data.gouv.fr/

69 Droites paramétrées

On se place dans un repère $(O; I, J)$.
Soit p un nombre réel. On considère :
- la droite (d_p) d'équation $y = (1-p)x+3$;
- la droite (d'_p) d'équation $y = -x+2p$.

1) Représenter, d'une couleur, les droites (d_3) et (d'_3) et, d'une autre couleur, les droites (d_{-1}) et (d'_{-1}).

2) Pour quelle valeur de p les droites (d_p) et (d'_p) sont-elles parallèles ?

3) Lorsque $p \neq 2$, déterminer les coordonnées du point K_p, intersection de (d_p) et (d'_p).

4) En utilisant le résultat précédent, déterminer les coordonnées de K_3 et de K_{-1} et vérifier sur le graphique de la question **1**.

70 Droites concourantes

On considère, dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, trois points $A(1;7)$, $B(-5;-5)$ et $C(7;-1)$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points A', B' et C', milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

b) Déterminer l'équation réduite des droites (AA') et (BB').

c) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection K.

d) Montrer, par le calcul, que K appartient à la droite (CC').

e) Quel théorème classique de géométrie aurait permis de démontrer le résultat précédent ?

f) Montrer que K est situé aux deux-tiers des segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ en partant des points A, B et C.

2) Calculer les distances OA, OB, et OC. Que peut-on en déduire pour le point O ?

3) On considère le point $H(3;1)$.

a) Soit $A_1(4;-2)$.
Montrer que A, H et A_1 sont alignés.

b) Soit $C_1(-1;3)$.
Montrer que C, H et C_1 sont alignés.

c) Montrer que les triangles AA_1C et CC_1A sont des triangles rectangles.

d) Que peut-on en déduire sur le point H ?

4) Montrer que les points O, K et H sont alignés.

5) Rechercher la définition de la droite d'Euler.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Reconnaître

- une équation de droite
- la représentation graphique d'une fonction affine

Une équation d'une droite étant donnée,

- vérifier si un point appartient à la droite
- tracer cette droite

Démontrer

- l'alignement de trois points
- le parallélisme de deux droites

Lire graphiquement

- le coefficient directeur d'une droite
- l'ordonnée à l'origine d'une droite
- l'équation réduite d'une droite
- les coordonnées du point d'intersection de deux droites

Calculer

- la solution d'un système de deux équations
- les coordonnées du point d'intersection de deux droites
- l'équation réduite d'une droite dont on connaît deux points

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

71 Indiquer les équations de droites.

a) $x = 5$ b) $3y - 2x = 3,7$ c) $1,2y - 2x = 5 + 1,2y$ d) $y = -0,5x + 2.6$

72 Indiquer les équations de droites correspondant à la représentation graphique d'une fonction affine.

a) $x = 5$ b) $3y - 2x = 3,7$ c) $1,2y - 2x = 5 + 1,2y$ d) $y = -0,5x + 2.6$

73 La droite (Δ) d'équation $y = 4x + 1,5$ passe par le point :

a) $A(1,5;0)$ b) $B(-1;2,5)$ c) $C(-15;58,5)$ d) $D(0;1,5)$

74 La droite d'équation $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$ coupe l'axe des abscisses au point :

a) $A(0;4)$
b) $B(4;0)$
c) $C(0;6)$
d) $D(6;0)$
e) aucun de ces points

75 La droite (d) passant par le point $A(-5;2,5)$ peut avoir pour équation :

a) $y = -2x - 7,5$
b) $y = \dfrac{4}{5}x + 1,5$
c) $y = -3x + 12$
d) $y = -5x + 2,5$
e) aucune de ces équations

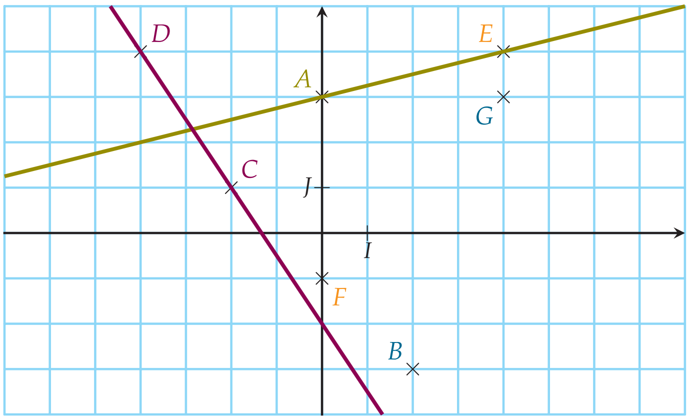
76 La droite (d) passant par les points $A(4;0)$ et $B(0;-3)$ a pour coefficient directeur :

a) $a_1 = -\dfrac{3}{4}$
b) $a_2 = 4$
c) $a_3 = -3$
d) $a_4 = \dfrac{3}{4}$
e) aucun de ces coefficients

77 Indiquer les équations des droites parallèles à la droite d'équation $y = 1,5x + 4$.

a) $d_1 : y = -\dfrac{3}{2}x + 1$ b) $d_2 : y = \dfrac{6}{4}x + 1$ c) $d_3 : y = -1,5x + 7$ d) $d_4 : y = \dfrac{9}{6}x + 7$

Pour la suite des questions, on utilise la figure ci-dessous.



78 Le coefficient directeur de la droite (CA) est :

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) -1

79 L'ordonnée à l'origine de l'équation de la droite (BG) est :

(a) -6 (b) on ne peut pas savoir (c) -9

80 La droite (AG) a pour équation :

(a) $x = 6$ (b) $x = 3$ (c) $y = 6$ (d) $2y = 6$

81 La droite (AE) a pour équation :

(a) $y = 4x + 3$
(b) $y = -4x + 3$
(c) $y = 0,25x + 3$
(d) aucune de ces propositions

82 La droite (DC) admet pour équation :

(a) $y = \frac{2}{3}x - 2$
(b) $y = -2x - \frac{3}{2}$
(c) $y = \frac{3}{2} - 2$
(d) aucune de ces équations

83 La droite parallèle à (AB) passant par C admet pour équation réduite :

(a) $y = -3x - 5$ (b) $y = 3x + 3$ (c) $y = -3x + 3$ (d) $y = 3x + 5$

84 L'affirmation « M, N et P sont alignés donc les droites (MN) et (NP) ont même équation réduite »est :

(a) vraie (b) fausse (c) on ne peut pas savoir

85 Les droites (DA) et (AE) ont des coefficients directeurs :

(a) égaux (b) inverses (c) opposés (d) On ne sait pas

86 Les coordonnées (x, y) du point d'intersection des droites (CD) et (AE) vérifient :

(a) $\frac{-7}{4}x = 5$ (b) $\begin{cases} 4y - x = 3 \\ 2y + 3x = -4 \end{cases}$ (c) $y = \frac{12}{7}$

Travaux pratiques

TP 1 Les impôts

Lorsqu'un contribuable français reçoit une déclaration de revenus à remplir, il reçoit aussi en annexe une formule pour évaluer l'impôt qu'il aura à acquitter en fonction du revenu imposable arrondi à l'euro inférieur et du nombre de personnes dans le foyer fiscal.

L'objet de ce T.P. est de comprendre d'où viennent les formules indiquées dans ce type de document en les établissant dans le cas d'une seule personne dans le foyer fiscal.

1 L'effet de seuil

L'article 13 de la déclaration des droits de l'homme et du citoyen de 1789 indique que : « *Pour l'entretien de la force publique, et pour les dépenses d'administration, une contribution commune est indispensable : elle doit être également répartie entre tous les citoyens, en raison de leurs facultés.* »

Revenu imposable « R »	Taux d'imposition
Jusqu'à 5 963 €	0%
De 5 964 € à 11 896 €	5,5 %
De 11 897 € à 26 420 €	14 %
De 26 421 € à 70 830 €	30 %
De 70 831 € à 150 000 €	41 %
Plus de 150 001 €	45 %

La France a choisi un système d'impôt à taux progressif depuis 1914. Le tableau ci-dessus reproduit les taux d'imposition indiqués par la brochure de 2013. Le taux d'imposition est le pourcentage du revenu qui devra être acquitté au titre de l'impôt.

1) En appliquant tel quel les taux d'imposition, dresser un tableau de valeurs en indiquant l'impôt à acquitter pour des revenus de :
- 5 963 € ;
- 11 896 € ;
- 26 420 € ;
- 70 830 € ;
- 150 000 € ;
- 5 964 € ;
- 11 897 € ;
- 26 421 € ;
- 70 831 € ;
- 150 001 €.

2) Quelles fonctions semblent lier le revenu à l'impôt à acquitter ?
Quelles en seront les représentations graphiques ?

3) Construire le graphique représentant ces fonctions dans un même repère.

4) Expliquer le terme « effet de seuil ».

2 Les tranches d'imposition

Afin d'éviter l'effet de seuil, on fait correspondre les fonctions aux valeurs bornant les tranches. Selon l'article 197 du code des impôts de 2013, l'impôt est calculé en appliquant à la fraction de chaque part de revenu qui excède 5 963 € le taux de :
- 5,50 % pour la fraction supérieure à 5 963 € et inférieure ou égale à 11 896 € ;
- 14 % pour la fraction supérieure à 11 896 € et inférieure ou égale à 26 420 € ;
- 30 % pour la fraction supérieure à 26 420 € et inférieure ou égale à 70 830 € ;
- 41 % pour la fraction supérieure à 70 830 € et inférieure ou égale à 150 000 € ;
- 45 % pour la fraction supérieure à 150 000 €.

1) Dresser un tableau de valeurs pour les mêmes valeurs que dans la partie 1.

2) Construire la représentation graphique de cette nouvelle fonction sur le même graphique.

3) Établir les équations des droites portant les segments représentants chaque tranche d'imposition. Comparer aux formules données sur la brochure du ministère.

4) Refuser une augmentation au motif que cela ferait changer de tranche est-il une opinion raisonnable ?

TP 2 Où sont les célibataires de France ?

INFO

L'objectif de ce TP est de comparer la répartition des célibataires de trois départements français par tranches d'âges en calculant l'âge médian et les quartiles.

1 Une première approximation par le graphique

Voici un extrait des données du recensement de 2009 (`www.insee.fr`) concernant les personnes vivant seules dans leur logement à Paris, dans les Bouches-du-Rhône et le Cantal.

Tranches d'âge	Effectifs à Paris	Effectifs dans les Bouches-du-Rhône	Effectifs dans le Cantal
15 à 19 ans	9 439	5 409	459
20 à 24 ans	57 527	20 985	1 282
25 à 39 ans	192 513	52 010	3 092
40 à 54 ans	111 906	52 370	3 889
55 à 64 ans	82 429	47 136	3 802
65 à 79 ans	84 822	64 039	6 057
80 ans ou plus	55 895	45 260	4 405

1) Pour chacun des trois départements :

a) calculer les fréquences ;

b) calculer les fréquences cumulées croissantes ;

c) construire les polygones des fréquences cumulées croissantes.

2) Déterminer les médianes et quartiles par lecture graphique.

2 Un affinage par interpolation linéaire

1) Le principe pas à pas

a) Repérer sur le polygone des fréquences cumulées de Paris, la tranche d'âge qui contient la médiane.

b) Quelles sont les coordonnées des extrémités du segment représentant cette tranche sur le graphique ?

c) Déterminer l'équation de la droite qui porte ce segment.

d) Déterminer l'abscisse du point d'ordonnée 50 de cette droite.

e) Quel est l'âge médian des célibataires de Paris ?

2) En autonomie

Déterminer l'âge médian des célibataires des Bouches-du-Rhône et du Cantal.

3 Analyse

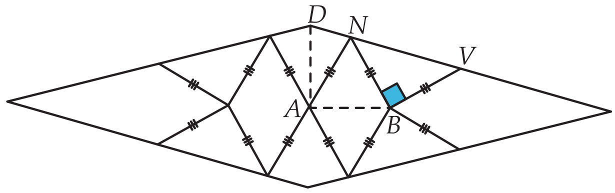
1) Sur trois axes gradués avec la même échelle représentant chacun un département : placer la médiane et les quartiles.

2) Quel phénomène sociétal mettent en évidence les différences entre les caractéristiques des trois départements proposés : Paris, Bouches-du-Rhône et Cantal ?

TP 3 Jardins royaux

INFO

Pedro est jardinier dans une quinta à Sintra au Portugal. Il souhaite réaliser un parterre de fleurs suivant le motif schématisé ci-contre.



Les segments codés de même longueur mesureraient tous 2 m, ainsi que $[AB]$ et $[AD]$. Il souhaite que l'angle $\widehat{VBN}$ soit droit, et il veut s'assurer que les points D, N et V soient alignés.

1) Reproduction d'une partie de cette figure

a) Tracer un triangle ABN équilatéral.

b) Placer D, du même côté de (AB) que N, tel que ABD soit isocèle rectangle en A.

c) Placer V, du même côté de (AB) que N, tel que VBN soit isocèle rectangle en B.

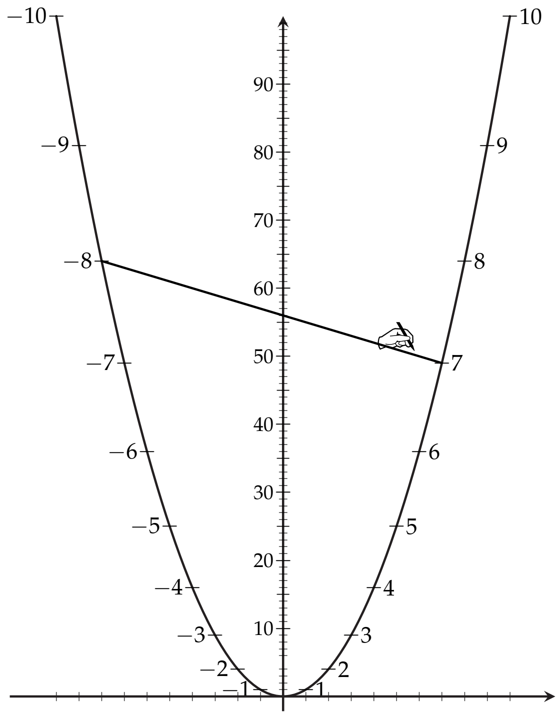
2) Démonstration

a) Déterminer les coordonnées de D, N et V dans le repère $(A; B, D)$.

b) Vérifier que les trois points sont alignés en utilisant un logiciel de calcul formel pour effectuer les simplifications d'écriture.

Récréation, énigmes

Calculatrice en papier



Le schéma ci-contre représente la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthogonal.

Pour la transformer en calculatrice, on choisit deux points de la parabole situés de part et d'autre de l'axe des ordonnées et on lit l'ordonnée à l'origine de la droite qui les relie.

1) Conjecture

a) Construire la parabole et tester la calculatrice.

b) Quels calculs semble-t-elle faire ?

2) Démonstration

On choisit deux points distincts A et B de la parabole d'abscisse x_A et x_B.

a) Calculer :

- l'ordonnée les ordonnées des points A et B ;
- le coefficient directeur de la droite (AB) ;
- l'ordonnée à l'origine de la droite (AB).

b) Conclure.

GÉOMÉTRIE

5

Repérage sur le cercle et trigonométrie

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Calculer des proportions
- Reconnaître des proportions
- Effectuer une division euclidienne
- Calculer des angles

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Calculer

1) $\frac{1}{4}$ de 360 3) $\frac{7}{6}$ de 360 5) $\frac{1}{3}$ de 2π 7) $\frac{6}{5}$ de 2π

2) $\frac{3}{4}$ de 360 4) $\frac{2}{5}$ de 360 6) $\frac{1}{4}$ de 2π 8) $\frac{7}{6}$ de 2π

2 Quelle proportion de 360, les nombres suivants représentent-ils ?

1) 30 3) 60 5) 180 7) 120

2) 45 4) 90 6) 270 8) 480

3 Quelle proportion de 2π les nombres suivants représentent-ils ?

1) $\frac{4\pi}{7}$ 3) $\frac{2\pi}{3}$ 5) $\frac{3\pi}{4}$ 7) $\frac{11\pi}{6}$

2) $\frac{8\pi}{5}$ 4) $\frac{10\pi}{9}$ 6) $\frac{7\pi}{5}$ 8) $\frac{3\pi}{5}$

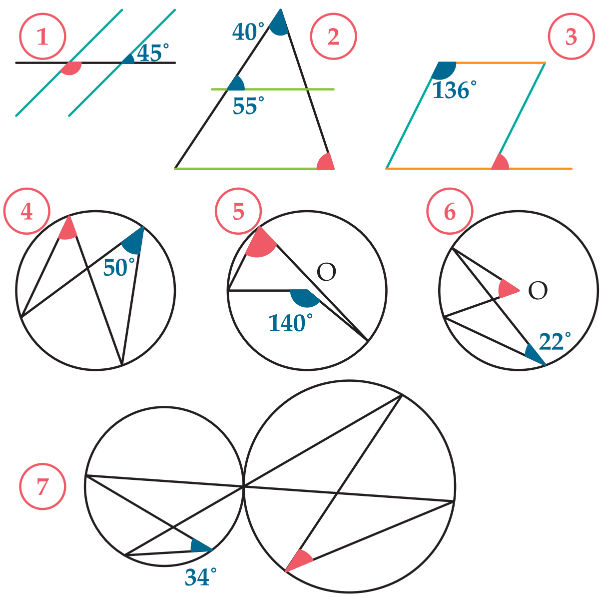
4 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes.

1) 2 014 par 360 3) 12 345 par 360

2) 2 014π par 2π 4) 12 345π par 2π

5 Déterminer les angles marqués en rouge.

Les droites de même couleur sont parallèles.



Voir solutions p. 259

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Tournons

Partie 1 : à chacun son manège

La famille Laplace va à la fête foraine.

1) Fred et Dom montent sur le manège de chevaux de bois qui sont disposés en cercles concentriques. Ils choisissent deux chevaux côte à côte, l'un sur le cercle extérieur, l'autre au trois quarts de la piste. Quand le manège s'arrête, ils ont fait le même nombre de tours.
Auront-ils parcouru la même distance ?

2) Emmanuelle et Laurence choisissent, elles, la grande roue.
Elles montent dans deux nacelles séparées, chacune à la même distance du centre.
Quand elles sortent de la grand roue, elles ont fait le même nombre de tours.
Auront-elles parcouru la même distance ?

Partie 2 : portion

Chaque nacelle se situe à 1 dam du centre de la grand roue.
Quelle est la distance parcourue :

1) en un tour ?
2) En trois tours ?
3) En un demi-tour ?
4) En un tiers de tour ?

Partie 3 : la panne

Après plusieurs tours, la nacelle de la grande roue s'arrête.
Exprimer la distance restant à parcourir en fonction de la mesure de l'angle au centre correspondant à l'arc de cercle parcouru entre la nacelle et le point de départ. (C'est le point le plus bas de la grand roue.)

ACTIVITÉ 2 Accélérons, accélérons

> Les accélérateurs de particules sont des instruments permettant d'amener des particules chargées à des vitesses élevées à l'aide de champs électriques et/ou magnétiques. Instruments pour la recherche, ils sont également utilisés pour le traitement des cancers.

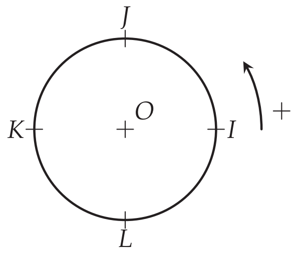
Partie 1 : accélérateur linéaire

Le SLAC (inauguré en 1966) situé en Californie est un accélérateur de particules linéaire qui mesure 3,2 km. On a schématisé cet accélérateur ci-dessous où $AB = 3{,}2$ km. Le départ des particules est toujours situé en I (au milieu). Les protons, chargés positivement, sont accélérés dans le sens de la flèche, et les électrons, chargés négativement, sont accélérés dans le sens inverse.

1) Quelle sera la distance parcourue par un proton lorsqu'il sera situé au point B ?
2) Quelle sera la distance parcourue par un électron lorsqu'il sera situé en A ?
3) Expliquer les limites d'un tel accélérateur de particules.

Partie 2 : accélérateur de particules circulaire

En 1970, Le CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) possédait un SPS (super proton synchrotron), un accélérateur de particules circulaire. Son rayon était de 2 km.
Il est représenté par le schéma ci-contre.
Dans cet accélérateur, les protons tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et les électrons tournent dans l'autre sens.
Toutes les particules partent du point I.



1) Calculer la distance (valeur exacte et approchée) parcourues par un proton, puis par un électron, lorsqu'ils auront effectué un tour.
Où se trouvera alors le proton ? L'électron ?

2) Calculer les distances (valeurs exactes et approchées) parcourues par un proton, puis par un électron, lorsqu'ils seront respectivement en K, en J et en L.

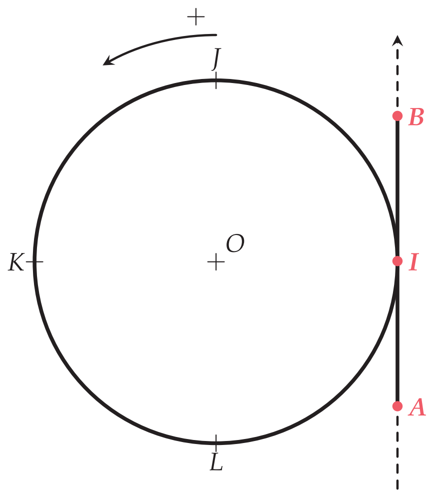
3) Calculer les distances (valeurs exactes et approchées) parcourues par un proton, puis par un électron lorsqu'ils auront effectué :
- un quart de tour ;
- un huitième de tour ;
- cinq huitièmes de tour ;
- un tour et un sixième de tour.

4) Reproduire la figure et placer le plus précisément possible les positions d'un proton et d'un électron à la fin de chacun de leurs parcours.

> Le 10 septembre 2008, le CERN a mis en fonction un nouvel accélérateur de particules circulaire de rayon 4,3 km : le Large Hadron Collider. Situé à la frontière franco-suisse, c'est le plus puissant accélérateur de particules au monde et le plus grand dispositif expérimental pour valider des théories physiques construit à ce jour *source : wikipedia*

Partie 3 : comparaison

On a superposé, sur le dessin ci-contre, le SPS et le SLAC des parties précédentes. On imaginera que l'on a modifié le SLAC en un accélérateur linéaire infini (en pointillé) et que le rayon du SPS mesure 1 km.



1) Reproduire la figure et y placer les points étudiés.

2) Un proton dans le SLAC est en B.
Où serait-il s'il avait été accéléré dans le SPS ?

3) Un électron dans le SLAC est en A.
Où serait-il s'il avait été accéléré dans le SPS ?

4) Une proton est en J dans le SPS.
Où serait-il s'il avait été accélérée dans le SLAC ?
Même question pour un électron.

4) On se place dans le SPS.

a) Où sera situé un proton lorsqu'il aura parcouru $\dfrac{3\pi}{4}$ km ? $\dfrac{11\pi}{4}$ km ? $\dfrac{19\pi}{4}$ km ?

b) Où sera situé un électron lorsqu'il aura parcouru $\dfrac{5\pi}{4}$ km ? $\dfrac{13\pi}{4}$ km ? $\dfrac{21\pi}{4}$ km ?

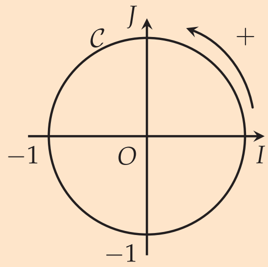
Cours - Méthodes

1. Repérage sur un cercle trigonométrique

DÉFINITION : Cercle trigonométrique

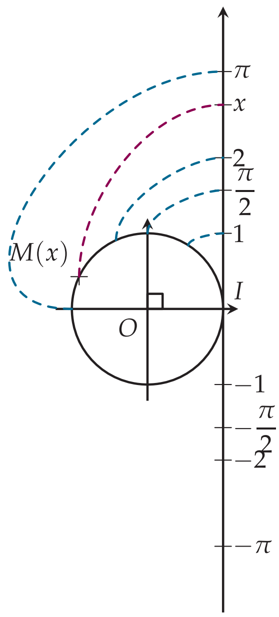
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.
Le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit une orientation :

- le sens **direct** (ou positif ou encore **trigonométrique**) est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre ;
- le sens **indirect** (ou négatif) est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.



PROPRIÉTÉ

Pour **repérer un point M du cercle trigonométrique**, on enroule autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine le point I. On peut alors associer, au point M, un réel x, abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M.



REMARQUE :

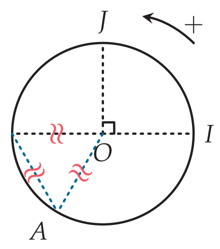
- Lorsqu'on enroule l'axe dans le sens **direct**, ce sont des points d' **abscisses positives** qui se superposent à M, dans le sens **indirect**, ce sont des points d'**abscisses négatives**.
- Tout point sur le cercle trigonométrique se repère par **plusieurs nombres réels**, distants d'un multiple de 2π, selon le nombre de tours complets de l'enroulement de l'axe.

MÉTHODE 1 Lire l'abscisse associée à un point

► Ex. 5 p. 251

Exercice d'application

Donner un nombre associé aux points J et A sur le cercle trigonométrique ci-contre tels que $\widehat{IOJ} = 90^\circ$ et $\widehat{IOA} = 120^\circ$.



Correction $\widehat{IOJ} = 90^\circ$ donc $\overset{\frown}{IJ}$ mesure un quart de la longueur du cercle dans le sens positif.
$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc un nombre associé à J est $\frac{\pi}{2}$.
$\widehat{IOA} = 120^\circ$ donc $\overset{\frown}{IA}$ mesure un tiers de la longueur du cercle dans le sens négatif.
Donc un nombre associé à A est $-\frac{2\pi}{3}$.
Tous les nombres associés à A s'écrivent sous la forme $-\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

MÉTHODE 2 Placer un point sur un cercle

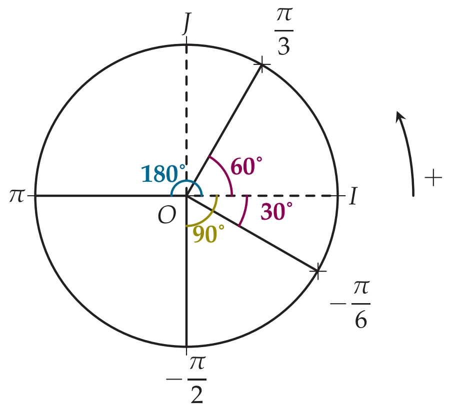
► Ex. 8 p. 252

Exercice d'application

Tracer un cercle trigonométrique et placer les points associés aux réels π ; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

Correction

La longueur d'un cercle de rayon r est donnée par la formule : $\mathcal{L} = 2\pi r$.
Pour le cercle trigonométrique, cette longueur est donc de 2π, car $r = 1$.
Le nombre π correspond à un parcours d'un demi-cercle dans le sens positif soit 180°.
Le nombre $-\frac{\pi}{2}$ correspond à un parcours d'un quart de cercle dans le sens négatif soit 90°.
Le nombre $\frac{\pi}{3}$ correspond à un parcours d'un sixième de cercle dans le sens positif soit 60°.
Le nombre $-\frac{\pi}{6}$ correspond à un parcours d'un douzième de cercle dans le sens négatif soit 30°.



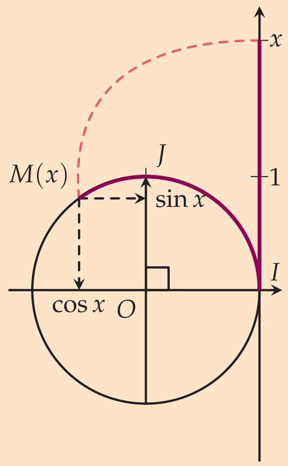
2. Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

DÉFINITION : Sinus, cosinus et tangente

On considère le cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$.

- Pour tout nombre x, le **cosinus** et le **sinus** de x, notés $\cos x$ et $\sin x$, sont les coordonnées du point M du cercle associé à x. On écrit alors $M(\cos x; \sin x)$.
- Pour tout nombre $x \neq \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ (avec k entier relatif), la **tangente** du nombre x est définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$



PROPRIÉTÉ

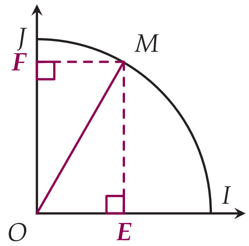
Pour tout nombre réel x :
$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ $\qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ $\qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

PREUVE Dans les conditions de la définition, comme le repère est orthonormé, on peut utiliser la formule suivante :
$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}$ soit $OM = \sqrt{(\cos x - 0)^2 + (\sin x - 0)^2}$
d'où $OM^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$.
Or, le cercle trigonométrique est de rayon 1, donc $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

NOTATION :
Pour simplifier l'écriture, on peut utiliser $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ et $(\sin x)^2 = \sin^2 x$.

REMARQUE :

- Pour x un nombre de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, l'angle $\widehat{IOM}$ est un angle aigu. À partir de la figure ci-contre, dans le triangle OME rectangle en E, on a :
  $\cos \widehat{EOM} = \dfrac{OE}{OM} = OE = \cos x$ d'où $\cos x = \cos \widehat{IOM}$.
  $\sin \widehat{EOM} = \dfrac{ME}{OM} = ME = OF = \sin x$ d'où $\sin x = \sin \widehat{IOM}$.

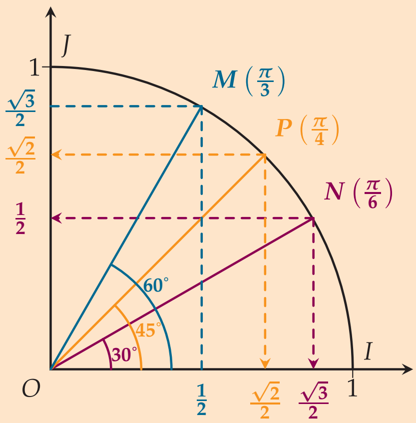


- Le réel x compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ permettant de placer le point M est aussi une mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ dans une nouvelle unité de mesure, le **radian**.

PROPRIÉTÉ : Valeurs remarquables

angle $\widehat{IOM}$	0°	30°	45°	60°	90°
réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$ **$\cos \widehat{IOM}$**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$ **$\sin \widehat{IOM}$**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Le graphique ci-dessous permet de visualiser les valeurs remarquables résumées du tableau.



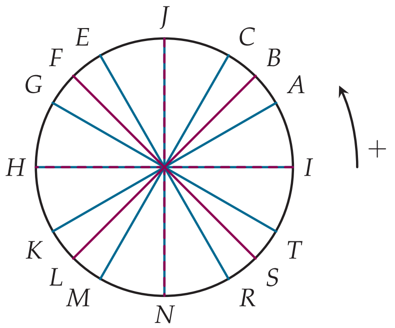
PREUVE Les preuves seront étudiées au T.P. 1

Activités Mentales

1 On considère le cercle trigonométrique ci-dessous. Associer chacun des nombres à un point du cercle.
Les segments rouges partagent le cercle en huit angles de 45°et les bleus partagent le cercle en douze angles de 30°.

1) $\frac{\pi}{2}$ **3)** $\frac{\pi}{4}$ **5)** $-\frac{\pi}{2}$ **7)** $-\frac{\pi}{4}$

2) $\frac{\pi}{3}$ **4)** $\frac{\pi}{6}$ **6)** $-\frac{\pi}{3}$ **8)** $-\frac{\pi}{6}$



2 À partir de la figure de l'exercice **1** :

1) déterminer le réel associé aux points suivants compris dans l'intervalle $[0; 2\pi[$;

a) A **b)** R **c)** H **d)** L

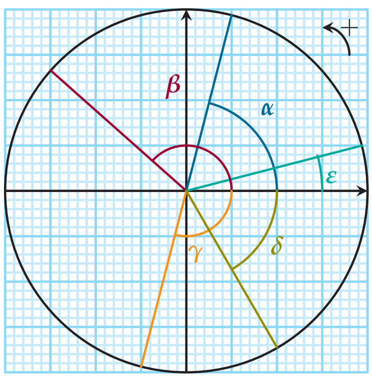
2) déterminer le réel associé aux points suivants compris dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

a) K **b)** N **c)** G **d)** I

3 On considère ci-dessous, dans le repère $(O; I, J)$, le cercle trigonométrique de rayon 1. Déterminer les valeurs approchées des sinus et cosinus des angles suivants.

1) α **3)** γ **5)** ε **7)** 45°

2) β **4)** δ **6)** 30° **8)** 60°



Réel associé à un point d'un cercle

4 Dans le plan muni d'un repère orthonormal, $(O; I, J)$, on construit le cercle de centre O et de rayon 1. Marcel se trouve au point I. Il se déplace sur le cercle et part vers le haut.

1) Il fait un tour complet.
Quelle distance a-t-il parcourue ?

2) S'il s'arrête au point de coordonnées $(0; 1)$, quelle distance a-t-il parcourue ?

3) Il parcourt la moitié du cercle.
Quelle distance a-t-il parcourue ?

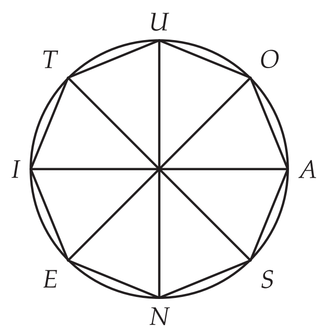
4) Préciser, pour chacune des questions précédentes, le réel associé au point où Marcel s'est arrêté.

5 ► MÉTHODE 1 p. 248

$AOUTIENS$ est un octogone régulier et on considère son cercle circonscrit comme un cercle trigonométrique.

1) Combien mesure chacun des angles au centre formé par deux sommets consécutifs de cet octogone ?

2) A est associé au réel 0. En déduire un réel associé à chacun des autres sommets compris dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.



6 On considère un cercle de centre O et de rayon 1.

1) Faire une figure en prenant 4 cm pour unité.

2) En reportant 6 fois le longueur du rayon sur le cercle, tracer un hexagone $ABCDEFG$ inscrit dans le cercle.

3) Quels sont les réels associés aux sommets de cet hexagone si A est associé à 0 ?

7 On étudie un pentagone régulier $PENTA$ de centre O. On considère son cercle circonscrit comme un cercle trigonométrique de centre O et d'origine A,
le sens positif étant de P vers E.

1) Faire un schéma.

2) Déterminer un réel associé à chacun des sommets.

S'entraîner

8 ► MÉTHODE 2 p. 249

On considère un cercle trigonométrique.

1) Placer les points associés aux réels suivants.

a) $\frac{2\pi}{3}$ **c)** $\frac{3\pi}{4}$ **e)** $\frac{11\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{6}$ **d)** $\frac{5\pi}{4}$ **f)** $\frac{5\pi}{3}$

2) Quel intervalle de longueur 2π contient ces réels ?

9 On considère un cercle trigonométrique.

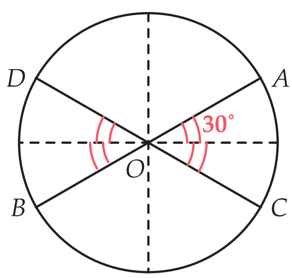
1) Placer les points associés aux réels suivants.

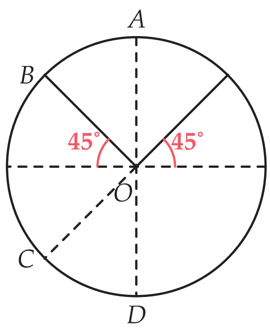
a) $-\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{\pi}{3}$ **e)** $-\frac{5\pi}{6}$

b) $-\frac{3\pi}{4}$ **d)** $-\frac{2\pi}{3}$ **f)** $-\frac{\pi}{6}$

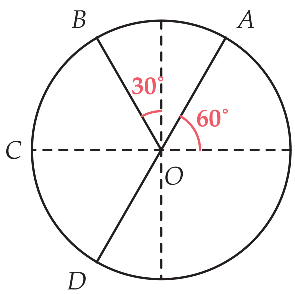
2) Quel intervalle de longueur 2π contient ces réels ?

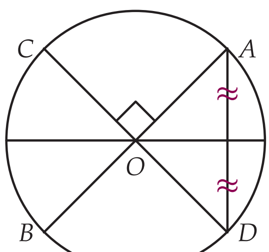
10 Donner un réel associé à chaque point du cercle.



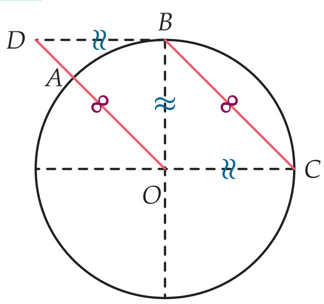


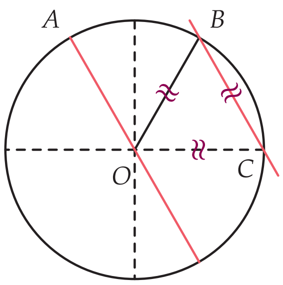
11 Même consigne qu'à l'exercice **10**.





12 Donner un réel associé au point A.

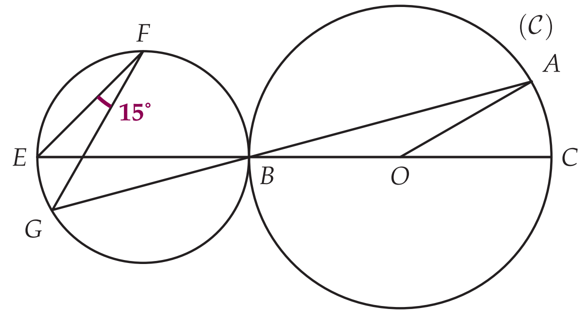




Les droites de la même couleur sont parallèles.

13 Quelle portion de cercle représente un secteur angulaire de 60° ? En déduire la portion représentée par un secteur angulaire de 10°, 15°, 20°.

14 Sur la figure ci-dessous, le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et d'origine C.
Quel est le réel associé au point A sur ce cercle ?



15 On considère $BDFH$ un carré de centre O et son cercle circonscrit $(\mathcal{C})$.

1) Faire un schéma.

2) Tracer la médiatrice de $[BD]$ et la médiatrice de $[DF]$. Elles recoupent le cercle respectivement en C et G et en E et A de telle manière que $ABCDEFGH$ soit un octogone régulier.

3) Déterminer les réels associés aux points A, B, C, D, E, F et G dans les cas où le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique des repères suivants :

a) repère $(O; A, G)$; **b)** repère $(O; H, B)$.

16 On considère un cercle trigonométrique dans un repère de centre O.

1) Placer le point A associé au réel $\frac{\pi}{6}$.

2) Placer ses symétriques :

a) A_1 par rapport à l'axe des ordonnées ;

b) A_2 par rapport à l'axe des abscisses ;

c) A_3 par rapport au point O.

3) Donner les réels associés aux points A_1, A_2 et A_3 :

a) compris dans l'intervalle $[0; 2\pi[$;

b) compris dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

17 Même consigne que l'exercice **16** en prenant A associé au réel $\frac{\pi}{3}$.

18 Même consigne que l'exercice **16** en prenant A associé au réel $\frac{\pi}{4}$.

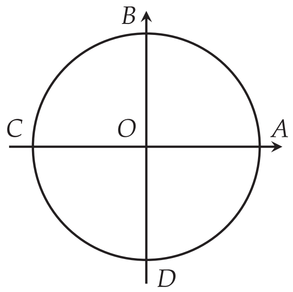
19 On munit le plan d'un repère $(O; I, J)$ et d'un cercle trigonométrique.

1) Placer les points A et B associés aux réels $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$.

2) À l'aide la règle et du compas sans rapporteur, placer les points C, D et E associés aux réels suivants.

a) $\pi + \frac{\pi}{3}$ **b)** $2\pi - \frac{\pi}{6}$ **c)** $\pi - \frac{\pi}{6}$

20 On considère le cercle trigonométrique ci-dessous dans le repère $(O; A, B)$.



1) Donner les points associés à chacun des réels.

a) 0 **d)** 3π **g)** -2π

b) π **e)** 4π **h)** -3π

c) 2π **f)** $-\pi$ **i)** 56π

2) Exprimer tous les nombres pouvant être associés aux points A et C à l'aide d'un entier relatif k.

3) Donner les points du cercle associés aux réels suivants.

a) 125π **c)** $-1\,013\pi$

b) -60π **d)** 256π

21 À partir de la figure de l'exercice **20** : répondre aux questions suivantes.

1) Donner les points associés à chacun des réels.

a) $\frac{\pi}{2}$ **c)** $\frac{3\pi}{2}$ **e)** $\frac{7\pi}{2}$

b) $-\frac{\pi}{2}$ **d)** $-\frac{3\pi}{2}$ **f)** $-\frac{7\pi}{2}$

2) Exprimer tous les nombres pouvant être associés aux points B et D à l'aide d'un entier relatif k.

3) Donner les points du cercle associés aux réels suivants.

a) $\frac{73\pi}{2}$ **c)** $\frac{295\pi}{2}$

b) $-\frac{47\pi}{2}$ **d)** $-\frac{113\pi}{2}$

Coordonnées d'un point du cercle

22 Soit un cercle trigonométrique de centre O et de rayon $[OA]$ avec A de coordonnées $(1; 0)$.

1) Placer le point E sur ce cercle tel que $\widehat{AOE} = 270^\circ$.

2) Donner les coordonnées du point E.

3) Déterminer le réel associé à E et calculer son cosinus.

23 On considère un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$.

1) Placer les points A, B, C et D du cercle tels que :

- $\widehat{IOA} = 150^\circ$
- $\widehat{IOC} = 135^\circ$
- $\widehat{IOB} = 300^\circ$
- $\widehat{IOD} = 300^\circ$

2) Indiquer un réel associé aux points A, B, C et D.

3) Quelles sont les coordonnées de ces points ?

24 **Valeurs approchées**

Soit un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$.

1) Placer les points A et B sur le cercle tels que :

- $\widehat{IOA} = 130^\circ$
- $\widehat{IOB} = 200^\circ$

2) Donner le réel associé à A
et donner une approximation de son cosinus.

3) Donner le réel associé à B
et donner une approximation de son sinus.

25 **Valeurs exactes et approchées**

1) Faire un schéma du cercle trigonométrique partagé en douze secteurs angulaires identiques.

2) Placer les valeurs remarquables des sinus et cosinus.

3) Compléter le tableau ci-dessous.

α	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$				
$\sin(\alpha)$				
2α				
$\cos(2\alpha)$				
$\sin(2\alpha)$				

3) Les égalités suivantes sont-elles vérifiées ?

a) $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)$;

b) $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)$.

4) Comment prévoir les réponses à ces deux questions sans utiliser ni ce tableau ni cette méthode ?

S'entraîner

26 **Valeurs limites**

Quels sont les angles compris entre 0°et 360°qui ont :

1) un cosinus nul ?
2) un cosinus égal à 1 ?
3) un sinus nul ?
4) un sinus égal à 1 ?
5) une tangente nulle ?
6) une tangente égale à 1 ?

27 Donner le signe des nombres suivants.

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
2) $\sin\left(\dfrac{71\pi}{100}\right)$
3) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{23}\right)$
4) $\sin\left(\dfrac{81\pi}{44}\right)$
5) $\cos\left(\dfrac{10\pi}{7}\right)$
6) $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
7) $\cos\left(\dfrac{17\pi}{26}\right)$
8) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{8}\right)$

28 On considère un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$. Un réel x est associé à un point A de ce cercle, d'abscisse 0,6 et d'ordonnée positive.

1) Quelle est l'ordonnée du point A ?
2) Calculer $\tan x$.

29 On considère un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$. Un réel x est associé à un point B du cercle d'ordonnée $\dfrac{3}{4}$ et d'abscisse négative.

1) Quelle est l'abscisse du point B ?
2) Calculer $\tan x$.

30 Les nombres x, y et z respectant les conditions ci-dessous existent-ils ?

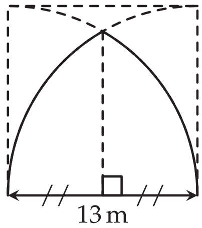
1) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\dfrac{1}{2}$
2) $\cos x = \dfrac{1}{3}$ et $\tan x = -\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$
3) $\tan x = \dfrac{3}{4}$ et $\sin x = -\dfrac{3}{5}$

31 Dans chaque cas, x est un réel différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\tan x$.

1) $\cos x = \sin x$
2) $\sin x = 4 \cos x$
3) $\cos x = \dfrac{4}{5} \sin x$
4) $\sin x = \dfrac{\cos x}{2}$

Problèmes

32 Jean Saigne, conservateur à Mathyville, a en charge les monuments historiques. Il souhaite installer un luminaire dans la voûte en ogive de la Cathédrale. Le schéma ci-contre présente les mesures prises sur place. La voûte est formée par deux arcs de cercle. Calculer :

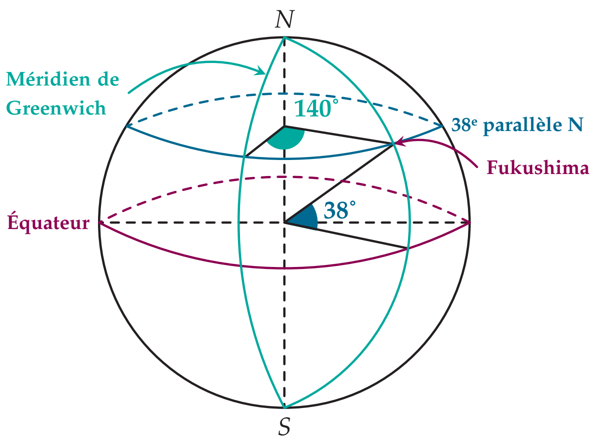


1) la longueur de l'arc de cercle du sol au sommet de la voûte (pour la longueur de fils électriques) ;
2) la hauteur de la voûte (pour choisir le bon échafaudage).

33 On considère que la Terre est une sphère de rayon 6 371 km.

Depuis la catastrophe de Fukushima, Jean-Michel s'inquiète du nuage radio-actif et souhaiterait connaître à quelle distance de la centrale se trouvent deux de ses proches.

La position de Fukushima est 38° Nord et 140° Est.



Partie A : sur un méridien

Mike, son correspondant australien, habite à Naracoorte : 37° Sud et 140° Est.

Quelle est la distance entre Mike et Fukushima ?

Partie B : sur un parallèle

Jean-Michel est d'origine portugaise. Ses grand-parents habitent encore à Beja : 38° Nord et 8° Ouest.

1) Calculer le rayon du 38e parallèle Nord.
2) Calculer la distance entre Beja et Fukushima.

34 On considère un cercle trigonométrique.

1) Placer les points suivants :

- $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

35 Dans un repère $(O; I, J)$, on considère le cercle trigonométrique .

1) Placer les points M et A de coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MOA}$.

3) Placer les points T et H de coordonnées respectives $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4) Quelle est la nature du quadrilatère $MATH$?

36 Calculer les valeurs exactes de :

1) $\sin(173\pi)$ **3)** $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ **5)** $\cos\left(\frac{53\pi}{2}\right)$

2) $\cos(-250\pi)$ **4)** $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$ **6)** $\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$

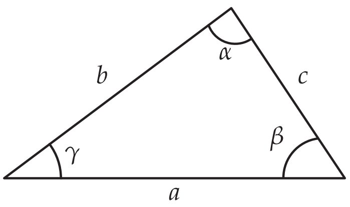
37 **Triangle équilatéral**

Établir la formule donnant l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur de ses côtés.

38 On considère un triangle quelconque non plat.

a, b, c sont les mesures de ses trois côtés.

α, β et γ sont les mesures des trois angles, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



1) Établir la formule $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ qui donne l'aire du triangle en fonction des mesures de deux de ces côtés et de la mesure de l'angle compris entre ces deux côtés.

2) Utiliser cette formule avec les trois angles du triangle et établir une nouvelle formule, *la loi des sinus* :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

39 En utilisant le cercle trigonométrique et les angles remarquables, déterminer la ou les valeurs exactes de l'angle α qui satisfont les conditions imposées dans chacun des cas ci-dessous :

1) $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha \in [-\pi; \pi]$

2) $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ et $\alpha \in [0; 2\pi]$

3) $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha \in [0; 4\pi]$

40 Dans chacun des cas suivants, dessiner en rouge sur un cercle trigonométrique l'ensemble de tous les points associés à α lorsque α satisfait aux deux conditions proposées ci-dessous.

Utiliser la représentation graphique pour résoudre l'inéquation proposée dans l'intervalle donné.

1) $\alpha \in [0; 2\pi[$ et $\cos(\alpha) \leqslant -\frac{1}{2}$

2) $\alpha \in]-\pi; \pi]$ et $\sin(\alpha) < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin(\alpha) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

41 On considère x un réel associé à un angle tel que $\cos x \neq 0$ et $\sin x \neq 0$. Établir les formules trigonométriques suivantes.

1) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ **2)** $1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

1) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

2) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\cos x \sin x$

3) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x$

42 On considère x un réel associé à un angle aigu tel que $\tan x = \frac{3}{4}$. Quelles sont les valeurs possibles des couples $(\cos x; \sin x)$?

43 La Terre est assimilée à une sphère de rayon 6 371 km. Le mille nautique est une unité de mesure utilisé pour la navigation en mer. Elle correspond à la distance entre deux points de même longitude dont les latitudes diffèrent d'une minute de degré. Calculer la longueur d'un mille marin en km.

L'appellation internationale est le mille marin. Mais, en français, il a été choisi mille nautique afin de ne pas confondre avec 1 000 marins !

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Sur un cercle trigonométrique

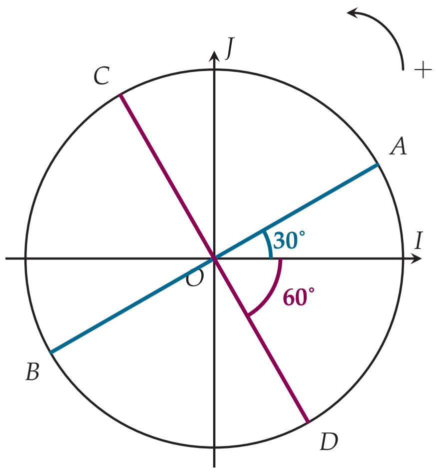
- placer un point à partir du réel associé
- déterminer les réels associés à un point
- déterminer le sinus et le cosinus d'un nombre
- déterminer la tangente d'un nombre
- utiliser les formules trigonométriques.

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Voici un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$



44 Les coordonnées de B sont :

(a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (c) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

(b) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

45 La mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ est :

(a) 60° (b) 90° (c) 30°

46 Citer le ou les réels associés au point A du cercle trigonométrique.

(a) $-\frac{4\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{6}$ (e) $\frac{25\pi}{6}$ (g) $\frac{\pi}{3}$

(b) $-\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$ (f) $\frac{17\pi}{6}$ (h) $\frac{13\pi}{6}$

47 Quel est le point associé au nombre $\frac{5\pi}{3}$?

(a) A (b) B (c) C (d) D

48 Citer le ou les réels associés au point B du cercle trigonométrique.

(a) $2\pi - \frac{2\pi}{3}$ (d) $\pi + \frac{\pi}{6}$ (g) $2\pi + \frac{2\pi}{3}$

(b) $\pi + \frac{\pi}{3}$ (e) $\pi - \frac{\pi}{6}$ (h) $2\pi + \frac{5\pi}{6}$

(c) $\pi - \frac{\pi}{3}$ (f) $2\pi - \frac{5\pi}{6}$

49 Citer le ou les points d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) A (b) B (c) C (d) D

50 Parmi les nombres suivants, lesquels sont solutions de l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$?

(a) 30° (c) 330° (e) 150° (g) 210° (i) 510°

(b) 60° (d) 300° (f) 240° (h) 120° (j) 90°

51 Parmi les nombres suivants lesquels sont égaux à $\cos(330^\circ)$?

(a) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) $\cos(30^\circ)$ (g) $\sin(60^\circ)$

(b) $-\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (f) $\cos(210^\circ)$ (h) $\sin(240^\circ)$

TP 1 Sinus et cosinus remarquables

On va démontrer certaines valeurs particulières du sinus et du cosinus inscrites dans le cours. On considère dans tout le T.P. un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$.

1) Quels points du cercle trigonométrique sont associés aux réels 0 et $\dfrac{\pi}{2}$?

En déduire les valeurs de :

a) $\cos(0)$

b) $\cos\dfrac{\pi}{2}$

c) $\sin(0)$

d) $\sin\dfrac{\pi}{2}$

2) Placer sur le cercle, le point A associé à $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Quelle est la nature du triangle OAI ? Justifier.

b) Placer le point D d'ordonnée nulle qui a la même abscisse que le point A.

Que représente-t-il ? En déduire $\cos\dfrac{\pi}{3}$.

c) Calculer AD. En déduire $\sin\dfrac{\pi}{3}$.

3) Placer sur le cercle le point B associé à $\dfrac{\pi}{4}$.

a) Calculer les mesures des angles $\widehat{IOB}$ et $\widehat{BOJ}$.

b) Que représente (OB) pour l'angle $\widehat{IOJ}$?

c) Que peut-on dire de $\cos\dfrac{\pi}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{4}$?

En déduire leurs valeurs.

4) Placer sur le cercle, le point C associé à $\dfrac{\pi}{6}$.

a) Quelle est la nature du triangle OCJ ? Justifier.

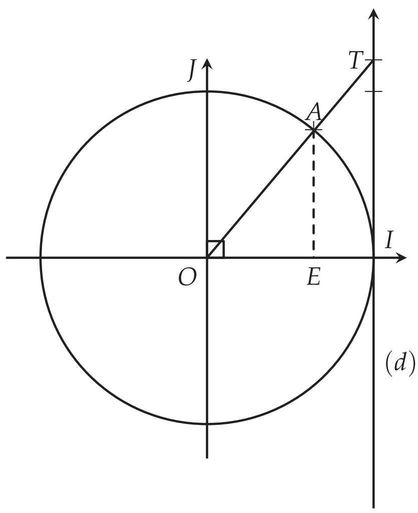
b) Placer le point E sur l'axe des ordonnées de même ordonnée que C. Que représente-t-il ? En déduire $\sin\dfrac{\pi}{6}$.

c) Calculer CE. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{6}$.

TP 2 Prendre la tangente

Sur la figure ci-dessous, on a représenté un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$ et la tangente (d) au cercle en I. On choisit un nombre x et on lui associe le point A par enroulement de la droite (d) sur le cercle. La droite (OA) coupe la tangente en T.

E est le point de l'axe des abscisses de même abscisse que le point A.



1) Que peut-on dire de T si A est le point associé à $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$?

2) Sur la figure, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exprimer TI en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

3) Les calculs diffèrent-ils si $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$?

4) Exprimer, en fonction de x, l'aire des triangles OAE et OTI puis celle du secteur angulaire compris entre le cercle, $[OA]$ et $[OI]$. En déduire que, pour tout x dans l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.

Travaux pratiques

TP 3 Équations trigonométriques

1 Résolution guidée

On donne, dans chaque cas, le cosinus d'un angle de mesure α radians et une contrainte sur α.

1) $\cos(\alpha) = \dfrac{2}{5}$ et $\alpha \in [0;\pi]$

2) $\cos(\alpha) = -\dfrac{3}{10}$ et $\alpha \in [-\pi;0]$

- Sur un cercle trigonométrique, placer le(s) point(s) pouvant être associé(s) à α.
- Utiliser la calculatrice pour déterminer une mesure d'un angle β ayant le même cosinus.
- Sur le même cercle trigonométrique, faire apparaître le point associé à β.
- En déduire α (Réfléchir avant d'écrire $\alpha = \beta$!).

2 En autonomie

Calculer α en utilisant une méthode analogue à celle de la partie précédente.

1) $\sin(\alpha) = -\dfrac{1}{5}$ et $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

2) $\sin(\alpha) = -\dfrac{7}{10}$ et $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$

Récréation, énigmes

Les fonctions trigonométriques INFO

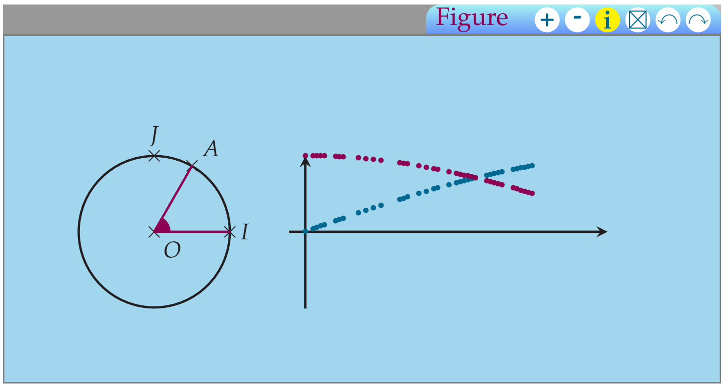
La relation entre un nombre et les coordonnées du point associé permet de définir trois nouvelles fonctions :

- sinus
- cosinus
- tangente

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

1) tracer un cercle trigonométrique de centre O dans un repère $(O; I, J)$ et placer un point A sur le cercle ;

2) déplacer le point A sur le cercle et faire tracer les deux courbes donnant les coordonnées de A en fonction de la mesure de l'angle $\widehat{IOA}$.



Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus obtenues s'appellent des **sinusoïdes**.

3) Ces courbes sont-elles complètes ?

4) Quelles semblent être les propriétés géométriques de ces deux courbes représentatives ?

5) Rechercher des cas de la vie quotidienne qui utilisent des fonctions trigonométriques.

SOLUTIONS

Chapitre SP1
Statistiques descriptives

Auto-évaluation

1

À pied	4
À vélo	7
Bus	13
Voiture	9
Scooter	2

2

1) 12 2) 40

3) 41

3

1) 26/33

2)

a) ≈ 30,3 % b) ≈ 10,6 %

3) H : ≈ 15,2 % ; F : 15 %.

4 1)

note	effectifs	ECC
0	1	1
1	3	4
2	13	17
3	7	24
4	4	28
5	2	30

2) 30

3) 17

S'entraîner

1 11

2 9

3 7

4 14

5 4 ; 8 ; 9

6 Elle augmente.

7

1) $m = 10$; $Q_1 = 8$; $Q_3 = 12$.

2) $m = 8,5$; $Q_1 = 7$; $Q_3 = 10$.

8

1) 39 3) 11

2) 10e valeur

16

1) oui

2) Au moins 17 élèves ont 5/5.

19

1) $m = 1,55$; $Q_1 = 0,3$; $Q_3 = 2,4$.

2) En 26 ans, au moins le quart des températures moyennes était inférieur à 0, 3, au moins un quart était supérieur à 2, 4 et la moitié inférieure à 1, 55.

24 5

Auto-évaluation QCM

48 b
49 a
50 b
51 b c
52 b
53 c
54 d
55 a
56 a
57 a
58 b
59 d
60 b
61 a c

Chapitre SP2
Échantillonnage

Auto-évaluation

1 1) Baltimore

2) Londres

3)

héros	J	T	E
fréquence à Londres	0,27	0,56	0.17
fréquence à Baltimore	0,38	0,34	0,28

2 1) 1/10 4) non

2) non 5) oui

3) non

S'entraîner

1

1) 513 3) 437/513

2) 97/100

2 119/219

3 73/115

4 oui

5 non

6 0,1

7 1) 32,4 2) 100

18 1)

a) $n = 480$, $p = 0,4$, $f_0 = 0,44$

b) oui

c) $[0,35; 0,45]$

d) oui

2) conforme

40

1) oui

2) $p \in [23\,\%; 29\,\%]$

Auto-évaluation QCM

55 b c
56 b c
57 d
58 a
59 c
60 e
61 a
62 c d
63 d
64 c
65 c

Chapitre SP3
Probabilités

Auto-évaluation

1

Couleur	Jaune	Blanc
Fréquences	0,02	0,56
Pourcentage	2	56

Couleur	Rouge	Bleu
Fréquences	0,03	0,01
Pourcentage	3	1

Couleur	Vert	Noir
fréquences	0,06	0,31
pourcentage	6	31

2 1)

a) 12/87 b) 53/87

2) 22/34

3 1) 657 579 2) 700 380

4

1) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

2) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18.

3) 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19.

4) 3, 9, 15.

5

1) 43,9 %

2) 197

S'entraîner

1 $p(6) = 0,2$

2 $p(A \cup B) = 0,8$

3 $p(A \cap B) = 0,3$

4 $p\left(\overline{A \cup B}\right) = 0,1$

5 $2/7$

6 « la pièce est noire et n'est pas une tour.

7 0,5

8

1) $p(A \cap B) = 0$
2) $p(A \cup B) = 0,6$

9 0,5

10

1) « C'est un garçon ou un élève qui n'a pas appris sa leçon »
2) « C'est un garçon qui n'a pas appris sa leçon »

11 « répondre juste à moins deux questions. »

32 2)

a) $1/8$ c) $1/2$
b) $1/2$

45 1) 0,1
2)
a) 0,4 b) 0,4

Auto-évaluation QCM

58 c **59** a d
60 b d **61** a e
62 a c **63** a
64 c d **65** d
66 b c **67** c
68 a c **69** a d

Chapitre F1
Généralités sur les fonctions

Auto-évaluation

1 1) 17 2) -4

2 1) 5,5 2) $23/4$

3 $\dfrac{5}{3}$

4 1) A 3) B et E
2) $(3;0)$ 4) E et H

S'entraîner

1 5

2 5

3 0

4 1) 4 2) 2 ou 10

5 0,5

6 3

7 1) 0 3) $\approx 1,5$
2) 4 4) 4

8 $(3;5)$

9 $k(-1) = 2$

10 non

11 -8

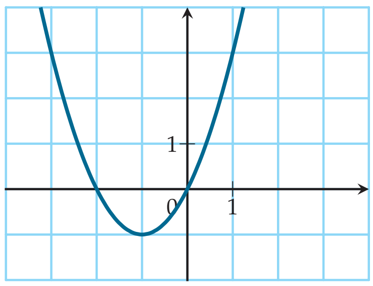
14

1) 2
2) Les entiers de 20 à 29.
3) $x = 31$ et $p(3) = 0$
4) quotient de la division euclidienne de x par 10.

17

x	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	-4	0	-2	0	16

26



37 1) 26 3) 0
2) 6 4) $15 + 7\sqrt{5}$

38

1) $-0,5$
2) $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$
3) -1

46

1) 1,5
2) 3
3) $\approx -1,3$ et $\approx 1,3$
4) 0

Auto-évaluation QCM

58 a **59** c
60 c **61** b
62 c **63** b
64 b **65** b
66 a **67** c
68 b c **69** b

70 c d **71** a

Chapitre F2
Résoudre une (in)équation... ou pas !

Auto-évaluation

1 1) oui 3) oui
2) non 4) oui

2 1) oui 3) non
2) oui

3 1) 2 3) -3 et $5/2$
2) 3 et -3 4) $15/2$

4 1) $x \leqslant -\dfrac{4}{5}$ 3) $x < -18$
2) $x < 16$

S'entraîner

1 1) $5/2$ 6) 3 et -3
2) 2 7) 4 et -4
3) 3 et -2 8) imp
4) 3 et 4 9) 2 et -2
5) $-3/2$ et 1

2 $-0,25$ et $0,66$

3 1) $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ 2) $\dfrac{2}{3}$

4 3 et -3

5 $4/3$

6 $1/4$

7 2 et -2

8 $(2;0)$ et $(0;4)$

21 1) -4 et 7 3) 0 et $5/4$
2) $-3/2$ et $5/4$ 4) $1/5$ et -3

29 1) 2,6 3) 3,4
2) $-3,1$ 4) $-2,1$

39 1)

x	$f(x)$
0	125
0,25	190,109375
0,5	274,625
0,75	381,078125
1	512
1,25	669,921875
1,5	857,375
1,75	1076,890625
2	1331
2,25	1622,234375
2,5	1953,125
2,75	2326,203125
3	2744
3,25	3209,046875
3,5	3723,875
3,75	4291,015625
4	4913
4,25	5592,359375
4,5	6331,625
4,75	7133,328125
5	8000

2) $4,1$

44 64

Auto-évaluation QCM

59 c **60** d
61 a b c **62** d
63 a **64** b
65 d **66** d
67 a b c **68** d
69 a **70** b
71 c **72** a

Chapitre F3
Variations et extrema

Auto-évaluation

1

1) Sur l'axe des ordonnées.
2) a) $f(-4) = 1$
b) $f(-1) = 2$
c) $f(3) = -2$
d) $f(4) = -1$

2

1) -4 2) -2

3

1) oui 3) non
2) oui 4) oui

4

1) $a + 4 \leqslant 12$
2) $a - 4 \leqslant 4$
3) $a \times 4 \leqslant 32$
4) $a \times (-4) \geqslant -32$
5) $a \div 4 \leqslant 2$
6) $a \div (-4) \geqslant -2$

5

1) $a + b < -4$
2) $a - b < 0$
3) $\dfrac{a}{b} > 1$
4) $ab > 4$

S'entraîner

1

1) $(-4,5)^2 > (-2,5)^2$
2) $(\sqrt{5})^2 > (1,7)^2$
3) $\dfrac{1}{5^2} < \dfrac{1}{3^2}$
4) $(-5)^2 > (3,5)^2$

2

1) $\dfrac{1}{25} > \dfrac{1}{35}$
2) $-\dfrac{1}{41} < -\dfrac{1}{92}$
3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
4) $-\dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{3}$

3

1) décroissante sur $\mathbb{R}$
2) croissante sur $\mathbb{R}$
3) décroissante sur $\mathbb{R}$
4) décroissante sur $\mathbb{R}$

4

x	-3		-1		4		5
$f(x)$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	-3	$\nearrow$	7

5

1) Échanger 6 et 4
2) Remplacer -3 par -1
3) Remplacer le 2 de la $f(x)$ par 1

6 1) *d*. 3) *a*.
2) *c*. 4) *b*.

Auto-évaluation QCM

43 a **44** c
45 a **46** a
47 b **48** c
49 c **50** b
51 b **52** c
53 b **54** a
55 c **56** c
57 a **58** b
59 a **60** c
61 a d **62** a
63 d **64** b c
65 a

Chapitre F4
Factorisation et étude de signes

Auto-évaluation

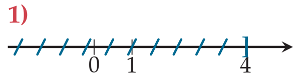
1 1) $1,5$ 3) $4,5$
2) -5

2

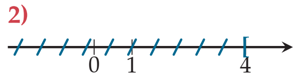
1) $-3,5$ ou $-4/5$
2) $1,5$ ou $-7/3$

3

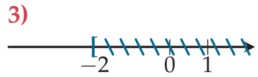
1)



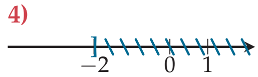
2)



3)



4)



4 1) $x \geqslant \dfrac{5}{4}$

2) $x > \dfrac{13}{3}$

5 **1)** $(x-1)^2$
2) $(5x+6)^2$
3) $(7x-8)(7x+8)$
4) $(x-5)(x+1)$

6 **1)** $4(x-2)$
2) $x(7x-2)$
3) $3(x+1)$
4) $(3x-4)(7x+4)$

S'entraîner

1
1) $f(3)=0$
2) $f(-4)$ n'existe pas.
3) $f(0)<0$
4) $f(4)>0$

2
1)

x	$-\infty$		$4{,}5$		$+\infty$
$2x-9$		$-$	0	$+$	

2)

x	$-\infty$		$-5/11$		$+\infty$
$-11x-5$		$+$	0	$-$	

3
1) $f(x)=x+3$
2) $f(x)=2x$
3) $f(x)=3x-2$
4) $f(x)=6x+7$

4
1) $(2x+3)^2$
2) $(4x-5)(4x+5)$

5
1) $x(3x-7)$
2) $5x(x-1)$

6
1) $(2x+1)(7x+9)$
2) $(6-x)(5x-6)$

7 $x=4/3$ ou $x=-7/5$

8 $x=4$

x	$-\infty$		$-3{,}5$		$5/6$		$+\infty$
$6x-5$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$-2x-7$		$+$	0	$-$	⋮	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

9

10 **1)** $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$
2) $\mathbb{R}$
3) $\mathbb{R}$
4) $]2,5,+\infty[$
5) $]-6,+\infty[$
6) $]-\infty,-5[$

18
1)

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

2) **a)** $f(0,219)>0$
b) $f(-0,517)<0$

30
1) $2(4x-3)(2x-5)$
2) $(5x-7)(5x-6)$
3) $10(2x-5)$
4) $3x(7x-6)$

34

x	$-\infty$		-2		$4/3$		$+\infty$
$3x-4$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

45
1) f n'est pas définie en 0,2 et s'annule en 0,5.
2) g n'est pas définie en $3/4$ et s'annule en $-3/5$.
3) h n'est pas définie en $7/4$ et s'annule en $15/11$.
4) k n'est pas définie en $2/3$ et s'annule en $\sqrt{2}$.
5) l n'est pas définie en $1/3$ et $-1/3$ et s'annule en $1/2$.
6) m est définie sur $\mathbb{R}$ entier et s'annule en $-1/23$

46

x	$-\infty$		0		$0{,}5$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$x-3$		$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	0	$+$	
M		$+$	⋮	$+$	0	$-$	‖	$+$	
O		$+$	⋮	$+$	0	$-$	⋮	$+$	
L		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$-$	
E		$+$	‖	$+$	0	$-$	⋮	$+$	
S		$+$	⋮	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Auto-évaluation QCM

65 b
66 a b
67 b
68 b
69 a
70 b
71 b
72 a c
73 a b
74 b
75 b
76 a b
77 a
78 c
79 b
80 b
81 a
82 c

Chapitre F5
Fonctions polynômes du second degré

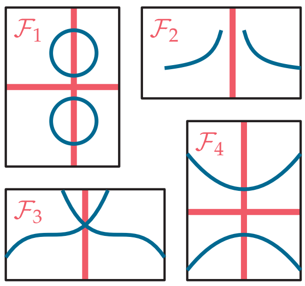
Auto-évaluation

1
1) x^2+2x+1
2) x^2-6x+9
3) $x^2-3x-0,25$
4) $x^2-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{9}$
5) $5x^2-25x+20$
6) $-2x^2+4x+16$
7) $7x^2+70x+147$
8) $-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{13}{20}x-\dfrac{1}{20}$

2
1) $-5/3$
2) $13/42$
3) $-17/18$
4) $-3/48$

3
1) $2/7$
2) $-3/4$
3) -3
4) $5/32$

4



S'entraîner

1
1) $0<x^2<9$
2) $2x^2\geqslant 50$
3) $-3x^2\leqslant -27$
4) $5>2x^2-3\geqslant -3$

2
1) $x\in\,]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$
2) $x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$
3) x n'existe pas.
4) x n'existe pas.

3

1) 0 3) -3

2) 1 4) $-0,25$

4

1) non 2) non, en 4

5 f est croissante sur $[-2; +\infty[$.

6

1) $f(5,6) > f(6,2) > f(9,8)$

2) $f(-1,2) < f(2,8) < f(4,9)$

7

1) La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -2$.

2) $f(2) = f(-6)$

8

1) $x = -4$. 2) $(-4; -1)$

9

1) $x = 3$. 2) $(3; 1)$

10

f est croissante sur $]-\infty; -1[$, décroissante sinon.

12

1) développer l'expression

2) a) canonique :

$3(3-3)^2 + 5 = 5$

b) développer :

$3\left(\sqrt{2}\right)^2 - 18\sqrt{2} + 32 =$

$38 - 18\sqrt{2}$

c) développer :

$0^2 - 18 \times 0 + 32 = 32$

25 a est positif et $\alpha = -4$

Auto-évaluation QCM

57 a d **58** a c

59 c **60** b

61 d **62** a

63 c **64** a

65 a **66** b

67 c **68** b

69 a **70** c

71 c

Chapitre G1
Espace

Auto-évaluation

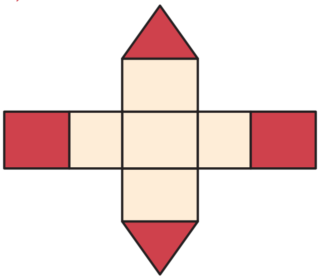
1 1) $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ 3) $9\pi\,\text{cm}^2$

2) $6\,\text{cm}^2$ 4) $36\pi\,\text{cm}^2$

2 1) $24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ 3) $12\,\text{cm}^2$

2) $36\pi\,\text{cm}^2$ 4) $288\pi\,\text{cm}^2$

3 1)



2) $50{,}4\,\text{m}^3$

S'entraîner

1 3 cm

2 $27\,\text{m}^3$

3 1) (ED) et (FC)

2) (ED) et (AH)

3) (ED) et (GB)

4 $AC = 5\sqrt{2}$ et $AG = 5\sqrt{3}$

5 1)

a) (KGC) c) (LIM), (EBC)

b) (ADO)

2)

a) (HC) c) (IJ)

b) (BG) d) (LJ)

3)

a) vrai c) vrai

b) faux

Auto-évaluation QCM

41 c **42** a

43 b **44** a

45 d **46** b

47 b **48** b c

49 a **50** b

51 a **52** c

53 b **54** c

55 d **56** b

57 b c

Chapitre G2
Repérage dans le plan

Auto-évaluation

1 1) $(+2)$; 3) (-11) ;

2) $(+2)$; 4) (-2) ;

2 • $AB = 2$ • $BD = 7$

• $AC = 3$ • $DC = 2$

3 1) $2\sqrt{2}$ 4) $5\sqrt{2}$

2) $2\sqrt{3}$ 5) $9\sqrt{3}$

3) $3\sqrt{5}$ 6) 2

4 $EU^2 = EA^2 + AU^2$

5 non

6 J

7 1) isocèle

2) équilatéral

3) parallélogramme

4) rectangle

5) rectangle

6) losange

7) losange

8) rectangle

9) carré

S'entraîner

1 1) $A(-2; 1)$; $B(1; 2)$; $C(0; -2)$

2) $A(-1,5; 2)$; $B(0,5; -2)$; $C(2; 1)$

3) $A\,(-1,5; 2)$; $B\,(0,5; -2)$; $C\,(2; 1)$

4) $A(3; 1)$; $B(-2; 4)$; $C(-1; 1)$

2 1) C 2) A

3 1) $\sqrt{10}$

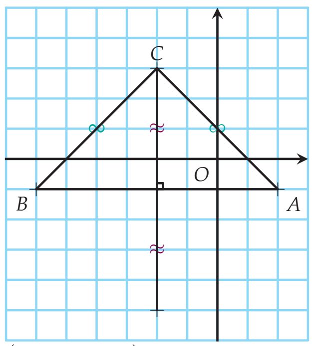
2)

a) $(0,5; 0)$ c) $(-1; -6)$

b) $(-2; -1)$

4 1) $\sqrt{53}$ 2) $(1,5; 0)$

5 • $C(-2; 3)$ • $C'(-2; -5)$



10 $(1,85; -0,6)$

17 $\sqrt{26} \approx 5,1$

Auto-évaluation QCM

36 b c **37** a d

38 b d **39** c

40 a d **41** f
42 b c d **43** b c
44 b **45** d
46 a d **47** d
48 d **49** d

Chapitre G3
Vecteurs

Auto-évaluation

1
1) $A(2;3)$ 5) $O(0;0)$
2) $B(-1;-1)$ 6) $I(1;0)$
3) $C(-1;0)$ 7) $J(0;1)$
4) $D(0;3)$

2
1) 11 3) 11
2) -1 4) 0

3
1) non 3) non
2) non 4) oui

4
1) oui 3) oui
2) non 4) non

S'entraîner

1
1) Y, Z, D.
2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CY}=\overrightarrow{DZ}=\overrightarrow{ED}$
3) $ABYC$, $ABZD$, $CYZD$

2
1) 6
2) 6
3) 3

3
1) $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CL}$
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
3) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KE}$
4) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$

4
1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

5
1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 4) $\vec{s}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
2) $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 5) $\vec{z}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
3) $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ 6) $\vec{g}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

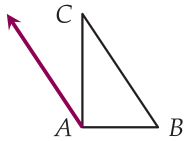
6
1) $A(1;2)$ 4) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
2) $B(2;1)$ 5) $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$
3) $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ 6) $\overrightarrow{DO}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

7 $B(3;5)$

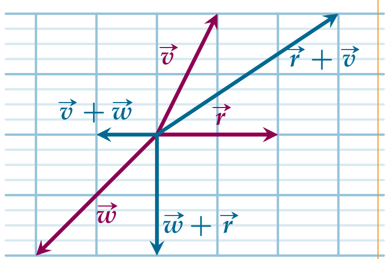
8 $C(-3;3)$

9 $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

15

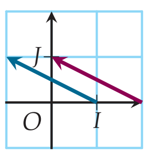


21



38
1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

42



44 $H(6;-1)$

50
1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$,
$\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
2)
a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

61
$\vec{u}\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -10,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$
$\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

74
1) oui 2) non
3) oui

Auto-évaluation QCM

110 a **111** b
112 a **113** b
114 b **115** a
116 a **117** b
118 b **119** a
120 a **121** b
122 a **123** b
124 c **125** d
126 d **127** b
128 a **129** b
130 c **131** d
132 a b **133** b c

Chapitre G4
Équations de droites

Auto-évaluation

1 1)
a) $y = 20$ b) $y = 0$
2)
a) $x = \dfrac{7}{3}$ b) $x = \dfrac{3}{4}$

2 1) non 2) oui

3 $y = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{4}{5}$

4

1) $(0;1)$
2) $(3;0)$
3) $(-3;-2)$, $(0;-1)$, $(3;0)$
4) $1,5$

S'entraîner

1 1, 3 et 4.

2 1) 3 2) -2

3

1) $y = 0,75x - 3$
2) $y = -x$
3) $x = 3$
4) $y = -2$

4 $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}$

5 non

6 oui

7 $(-4;-27)$

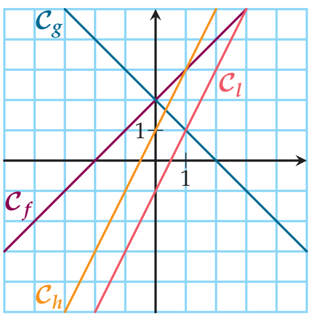
8 1) aucune 2) une unique

17

1) $D_1 : y = -1$
2) $D_2 : x = 3$
3) $D_3 : y = 2x + 1$
4) $D_4 : y = -3x + 2$

20

1) $y = 2x - 1$
2) $y = 2x - 4$
3) $x = 2$
4) $x = 2$



30

49

1) 0
2) une infinité
3) une unique solution
4) une unique solution

Auto-évaluation QCM

71 a b c d **72** b d

73 d **74** d

75 a **76** d

77 b d **78** c

79 c **80** d

81 c **82** d

83 a **84** a

85 c **86** a

Chapitre G5
Repérage sur le cercle et trigonométrie

Auto-évaluation

1 1) 90 5) $\dfrac{2\pi}{3}$
2) 270 6) $\dfrac{\pi}{2}$
3) 420 7) $\dfrac{12\pi}{5}$
4) 144 8) $\dfrac{7\pi}{3}$

2 1) $1/12$ 5) $1/2$
2) $1/8$ 6) $3/4$
3) $1/6$ 7) $1/3$
4) $1/4$ 8) $4/3$

3 1) $2/7$ 5) $3/8$
2) $4/5$ 6) $7/10$
3) $1/3$ 7) $11/12$
4) $5/9$ 8) $3/10$

4

1) $2\,014 = 360 \times 5 + 214$
2) $2\,014\pi = 2\pi \times 1\,007 + 0$
3) $12\,345 = 360 \times 34 + 105$
4) $12\,345\pi = 2\pi \times 6\,172 + \pi$

5

1) 135° 5) 70°
2) 85° 6) 44°
3) 44° 7) 34°
4) 50°

S'entraîner

1 1) J 5) N
2) C 6) R
3) B 7) S
4) A 8) T

2 1)

a) $\dfrac{\pi}{6}$ c) π
b) $\dfrac{5\pi}{3}$ d) $\dfrac{5\pi}{4}$

2)

a) $\dfrac{-5\pi}{6}$ c) $\dfrac{5\pi}{6}$
b) $-\dfrac{\pi}{2}$ d) 0

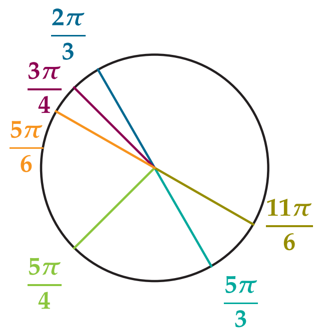
3 1) $\cos\alpha \approx 0,25$; $\sin\alpha \approx 0,95$
2) $\cos\beta \approx -0,75$; $\sin\beta \approx 0,75$
3) $\cos\gamma \approx -0,25$;
$\sin\gamma \approx -0,95$
4) $\cos\delta \approx 0,5$; $\sin\delta \approx -0,85$
5) $\cos\varepsilon \approx 0,95$; $\sin\varepsilon \approx 0,25$
6) $\cos 30^\circ \approx 0,85$;
$\sin 30^\circ \approx 0,5$
7) $\cos 45^\circ \approx 0,7$; $\sin 45^\circ \approx 0,7$
8) $\cos 60^\circ \approx 0,5$;
$\sin 60^\circ \approx 0,85$

5

1) 45°
2)

a) $A(0)$ e) $I(\pi)$
b) $O\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ f) $E\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$
c) $U\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ g) $N\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$
d) $T\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ h) $E\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

8 1)



2) $[0;2\pi]$

Auto-évaluation QCM

44 c **45** b

46 e h **47** d

48 d f **49** a

50 g **51** c e g

PROPRIÉTÉS POUR DÉMONTRER EN GÉOMÉTRIE

Pour démontrer en géométrie, quelques astuces :
- commencer par réaliser un schéma représentant la situation de l'énoncé ;
- penser à coder les milieux, les angles droits et à repasser en couleur les droites ou segments parallèles ;
- parmi les propriétés qui correspondent à la question posée, choisir celle dont la figure de la **première colonne** s'apparente à celle du schéma réalisé.

Pour rédiger au propre, il suffit de réciter la propriété choisie (comme dans la **deuxième colonne**) puis vérifier les hypothèses et conclure en adaptant le texte de la **troisième colonne** avec les lettres de l'énoncé.

Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

PROPRIÉTÉ 1 à **PROPRIÉTÉ** 6

Démontrer que deux droites sont parallèles

PROPRIÉTÉ 7 à **PROPRIÉTÉ** 14

Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

PROPRIÉTÉ 15 à **PROPRIÉTÉ** 22

Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

PROPRIÉTÉ 23 à **PROPRIÉTÉ** 29

Démontrer qu'un quadrilatère est un losange

PROPRIÉTÉ 30 à **PROPRIÉTÉ** 32

Démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle

PROPRIÉTÉ 33 à **PROPRIÉTÉ** 35

Démontrer qu'un quadrilatère est un carré

PROPRIÉTÉ 36 à **PROPRIÉTÉ** 39

Déterminer la mesure d'un segment

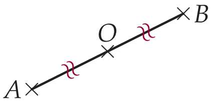
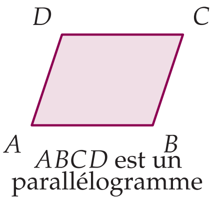
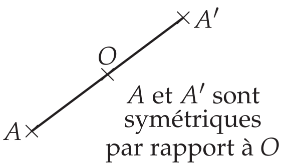
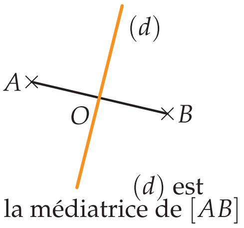
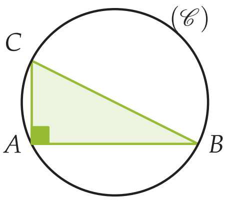
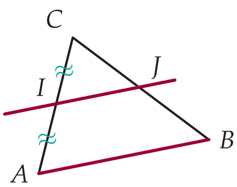
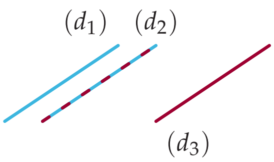
PROPRIÉTÉ 40 à **PROPRIÉTÉ** 53

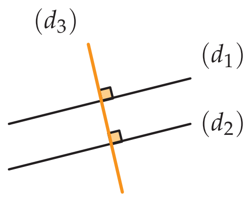
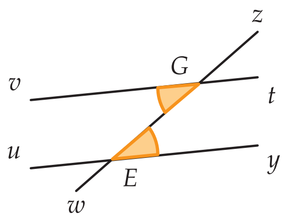
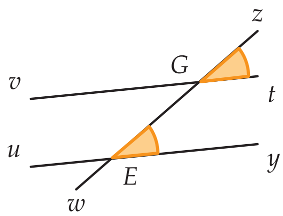
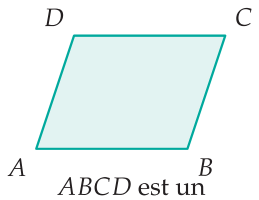
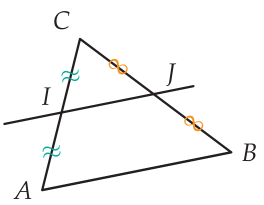
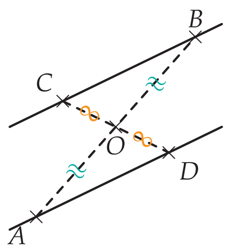
Déterminer la mesure d'un angle

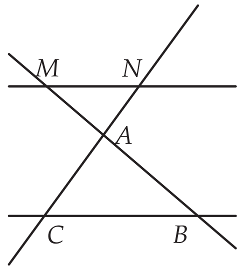
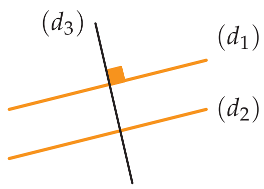
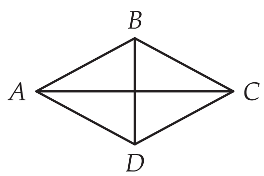
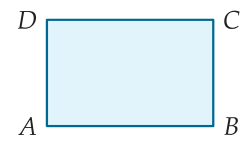
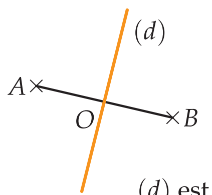
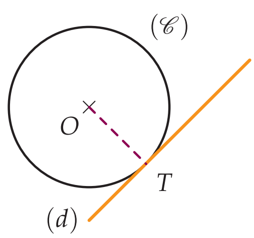
PROPRIÉTÉ 54 à **PROPRIÉTÉ** 62

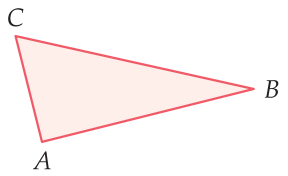
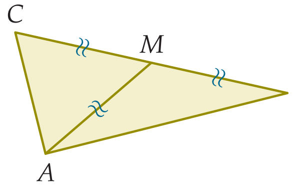
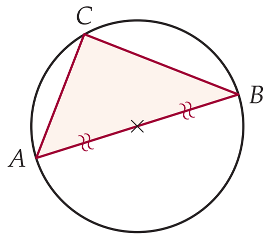
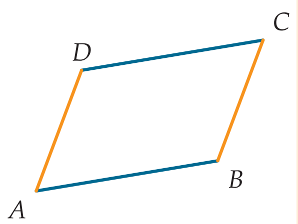
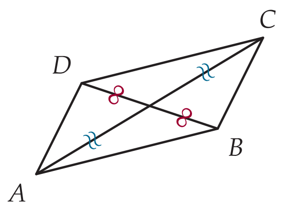
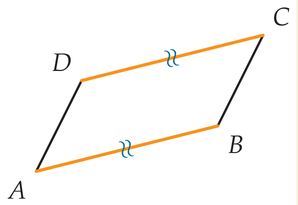
Démontrer avec les droites remarquables du triangle

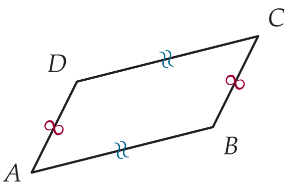
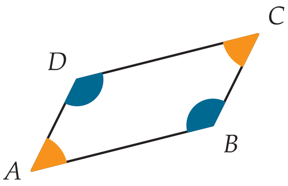
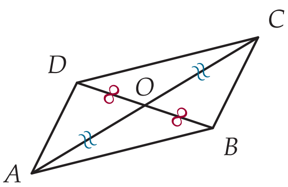
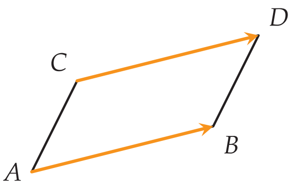
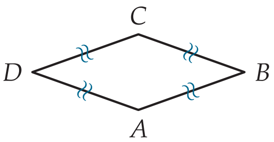
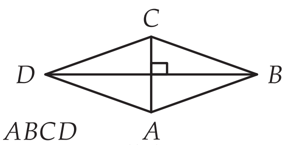
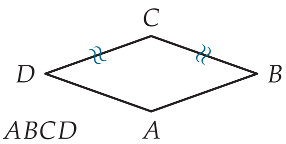
PROPRIÉTÉ 63 à **PROPRIÉTÉ** 69

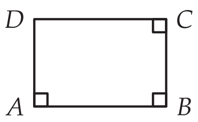
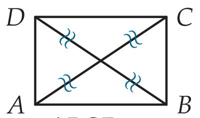
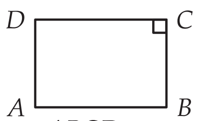
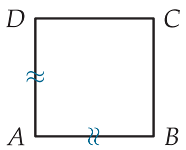
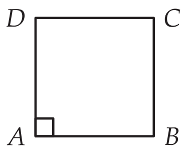
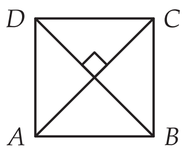
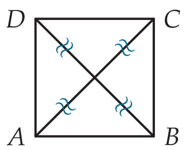
	**PROPRIÉTÉ 1** Si un point, sur un segment, est à égale distance des deux extrémités, alors ce point est le milieu du segment.	Ici, $O \in [AB]$ et $OA = OB$. Donc O est le milieu de $[AB]$.
	**PROPRIÉTÉ 2** Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu. (C'est aussi vrai pour les losanges, rectangles et carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme. Donc ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.
	**PROPRIÉTÉ 3** Si deux points sont symétriques par rapport à un point alors le centre de symétrie est le milieu du segment d'extrémités les deux symétriques.	Ici, A et A' sont symétriques par rapport au point O. Donc O est le milieu du segment $[AA']$.
	**PROPRIÉTÉ 4** Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle coupe ce segment en son milieu.	Ici, la médiatrice de $[AB]$ coupe $[AB]$ en O. Donc O est le milieu de $[AB]$.
	**PROPRIÉTÉ 5** Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour centre le milieu de son hypoténuse.	Ici, ABC est un triangle rectangle en A. Donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse $[AB]$.
	**PROPRIÉTÉ 6** Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.	Ici, dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AC]$ et la parallèle à $[AB]$ passant par I coupe $[BC]$ en J. Donc J est le milieu du segment $[BC]$.
	**PROPRIÉTÉ 7** Si deux droites sont parallèles alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.	Ici, $(d_1)//(d_2)$ et $(d_2)//(d_3)$. Donc $(d_1)//(d_3)$.

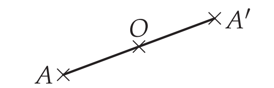
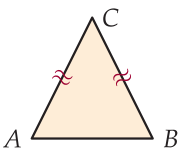
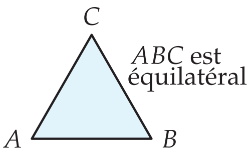
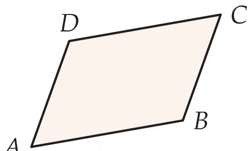
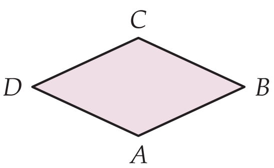
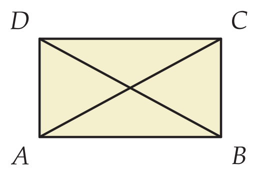
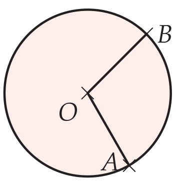
	**PROPRIÉTÉ 8** Si deux droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles entre elles.	Ici, $(d_1) \perp (d_3)$ et $(d_2) \perp (d_3)$. Donc $(d_1)//(d_2)$.
	**PROPRIÉTÉ 9** Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure alors elles sont parallèles.	Ici, les droites (vt) et (uy) sont coupées par la sécante (zw), et les angles $\widehat{vGw}$ et $\widehat{zEy}$ sont alternes-internes de même mesure. Donc $(vt)//(uy)$.
	**PROPRIÉTÉ 10** Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de même mesure alors elles sont parallèles.	Ici, les droites (vt) et (uy) sont coupées par la sécante (zw), et les angles $\widehat{zGt}$ et $\widehat{zEy}$ sont correspondants et de même mesure. Donc $(vt)//(uy)$.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 11** Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles. (C'est aussi vrai pour les losanges, rectangles et carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme. Donc $(AB)//(CD)$ et $(AD)//(BC)$.
	**PROPRIÉTÉ 12** Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.	Ici, dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[BC]$. Donc (IJ) est parallèle à (AB).
	**PROPRIÉTÉ 13** Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles.	Ici, (AD) et (BC) sont symétriques par rapport à O. Donc $(AD)//(BC)$.

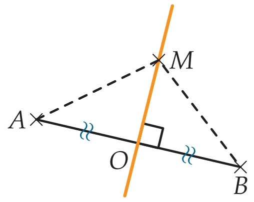
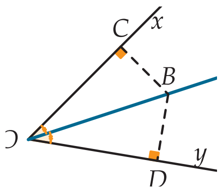
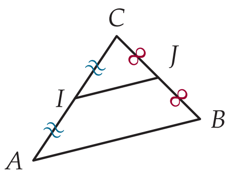
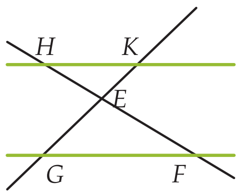
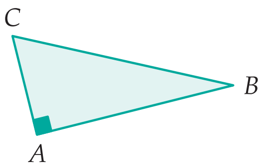
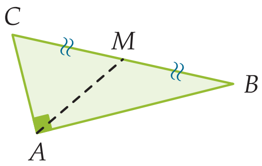
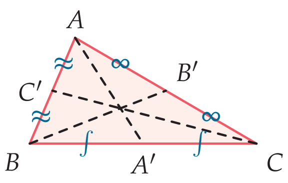
<table>
<tr>
<td></td>
<td>PROPRIÉTÉ 14
Réciproque du théorème de Thalès
Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$
alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.</td>
<td>Ici, les points M, A, B d'une part et les points N, A, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
Si, de plus, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$
alors $(MN)//(BC)$.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>PROPRIÉTÉ 15 Si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.</td>
<td>Ici,
$(d_1)//(d_2)$ et $(d_1) \perp (d_3)$
Donc $(d_2) \perp (d_3)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
$ABCD$ est un losange</td>
<td>PROPRIÉTÉ 16 Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires. (C'est aussi vrai pour le carré qui est un losange particulier.)</td>
<td>Ici, $ABCD$ est un losange.
Donc $(AC) \perp (BD)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
$ABCD$ est un rectangle</td>
<td>PROPRIÉTÉ 17 Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés consécutifs sont perpendiculaires. (C'est aussi vrai pour le carré qui est un rectangle particulier.)</td>
<td>Ici, $ABCD$ est un rectangle.
Donc $(AB) \perp (AD)$, $(AD) \perp (DC)$, $(DC) \perp (BC)$ et $(BC) \perp (AB)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
(d) est la médiatrice de $[AB]$</td>
<td>PROPRIÉTÉ 18 Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment.</td>
<td>Ici, (d) est la médiatrice du segment $[AB]$.
Donc $(d) \perp (AB)$.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>PROPRIÉTÉ 19 Si une droite est tangente à un cercle en un point alors elle est perpendiculaire au rayon de ce cercle qui a pour extrémité ce point.</td>
<td>Ici,
la droite (d) est la tangente en T au cercle de centre O.
Donc $(d) \perp (OT)$.</td>
</tr>
</table>

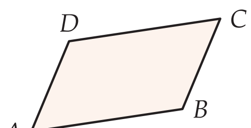
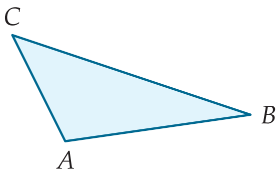
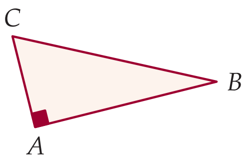
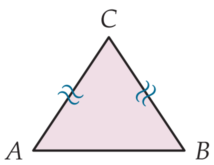
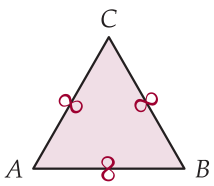
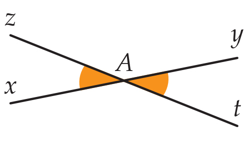
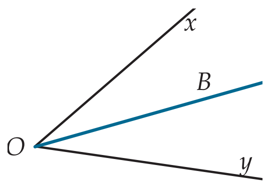
	PROPRIÉTÉ 20 **Réciproque du théorème de Pythagore :** Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors le triangle est rectangle et il a ce côté pour hypoténuse.	Si dans le triangle ABC, $BC^2 = BA^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle d'hypoténuse $[BC]$.
	PROPRIÉTÉ 21 Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté alors ce triangle est rectangle et il admet ce côté pour hypoténuse.	Ici, $[AM]$ est la médiane relative à $[BC]$ et $AM = BC \div 2$. Donc ABC est rectangle en A.
	PROPRIÉTÉ 22 Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors il est rectangle et il admet ce diamètre pour hypoténuse.	Ici, C appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Donc ABC est rectangle en C.
	PROPRIÉTÉ 23 Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.	Ici, $(AB)//(DC)$ et $(AD)//(BC)$. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.
	PROPRIÉTÉ 24 Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.	Ici, $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu. Donc, $ABCD$ est un parallélogramme.
	PROPRIÉTÉ 25 Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles de même longueur alors c'est un parallélogramme.	Ici, $ABCD$ est non croisé avec $AB = DC$ et $(AB)//(CD)$. Donc, $ABCD$ est un parallélogramme.

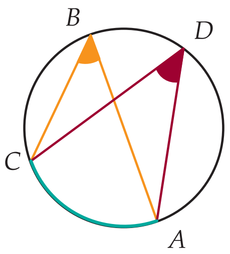
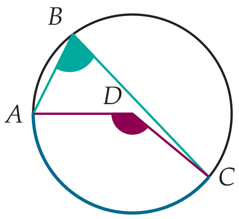
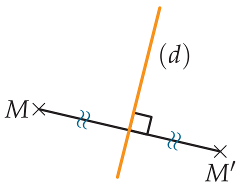
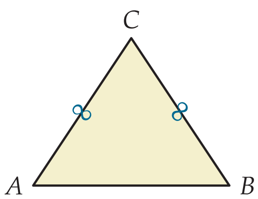
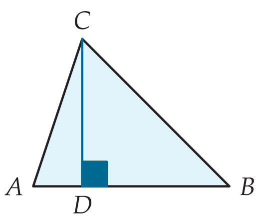
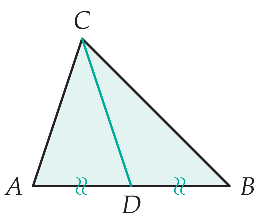
	**PROPRIÉTÉ 26** Si un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.	Ici, $AB = CD$ et $AD = BC$. Donc, $ABCD$ est un parallélogramme.
	**PROPRIÉTÉ 27** Si un quadrilatère a ses angles opposés de la même mesure alors c'est un parallélogramme.	Ici, $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$. Donc, $ABCD$ est un parallélogramme.
	**PROPRIÉTÉ 28** Si un quadrilatère a un centre de symétrie alors c'est un parallélogramme.	Ici, A et C d'une part et B et D d'autre part sont symétriques par rapport à O. Donc, $ABCD$ est un parallélogramme.
	**PROPRIÉTÉ 29** Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme.	Ici, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Donc, $ABDC$ est un parallélogramme.
	**PROPRIÉTÉ 30** Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur alors c'est un losange.	Ici, $AB = BC = CD = DA$. Donc $ABCD$ est un losange.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 31** Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme et $(AC) \perp (BD)$. Donc $ABCD$ est un losange.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 32** Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de la même longueur alors c'est un losange.	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme avec $CD = CB$. Donc $ABCD$ est un losange.

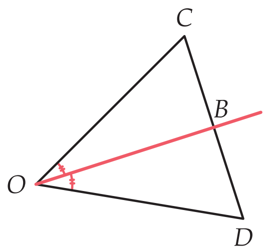
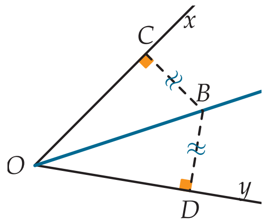
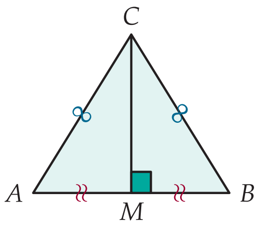
	**PROPRIÉTÉ 33** Si un quadrilatère possède trois angles droits alors c'est un rectangle.	Ici, $(AD) \perp (AB)$, $(AB) \perp (BC)$ et $(BC) \perp (DC)$. Donc $ABCD$ est un rectangle.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 34** Si un parallélogramme a ses diagonales de la même longueur alors c'est un rectangle.	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme avec $AC = BD$. Donc $ABCD$ est un rectangle.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 35** Si un parallélogramme possède deux côtés consécutifs perpendiculaires alors c'est un rectangle.	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme avec $(BC) \perp (CD)$. Donc $ABCD$ est un rectangle.
 $ABCD$ est un rectangle	**PROPRIÉTÉ 36** Si un rectangle possède deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.	Ici, $ABCD$ est un rectangle avec $AB = AD$. Donc $ABCD$ est un carré.
 $ABCD$ est un losange	**PROPRIÉTÉ 37** Si un losange possède deux côtés consécutifs perpendiculaires alors c'est un carré.	Ici, $ABCD$ est un losange avec $(AB) \perp (AD)$. Donc $ABCD$ est un carré.
 $ABCD$ est un rectangle	**PROPRIÉTÉ 38** Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.	Ici, $ABCD$ est un rectangle avec $(AC) \perp (BD)$. Donc $ABCD$ est un carré.
 $ABCD$ est un losange	**PROPRIÉTÉ 39** Si un losange a ses diagonales de même longueur alors c'est un carré.	Ici, $ABCD$ est un losange avec $AC = BD$. Donc $ABCD$ est un carré.

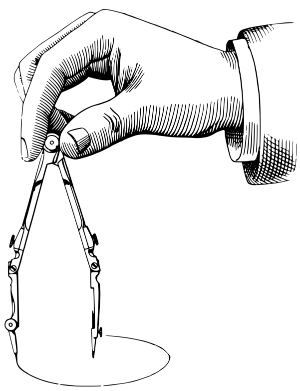
 O est le milieu de $[AA']$	**PROPRIÉTÉ 40** Si un point est le milieu d'un segment alors sa distance aux extrémités du segment est la moitié de la mesure du segment.	Ici, O est le milieu de $[AA']$. Donc $OA = OA' = AA' \div 2$.
	**PROPRIÉTÉ 41** Si un triangle est isocèle alors il a deux côtés de même longueur.	Ici, ABC est isocèle en C. Donc $CA = CB$.
	**PROPRIÉTÉ 42** Si un triangle est équilatéral alors il a tous ses côtés de la même longueur.	Ici, ABC est équilatéral. Donc $AB = BC = CA$.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 43** Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur. (C'est également vrai pour les rectangles, les losanges et les carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme. Donc $AB = DC$ et $AD = BC$.
 $ABCD$ est un losange	**PROPRIÉTÉ 44** Si un quadrilatère est un losange alors tous ses côtés sont de la même longueur. (C'est également vrai pour les carrés qui sont des losanges particuliers.)	Ici, $ABCD$ est un losange. Donc $AB = BC = CD = DA$.
 $ABCD$ est un rectangle	**PROPRIÉTÉ 45** Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont la même longueur. (C'est également vrai pour les carrés qui sont des rectangles particuliers.)	Ici, $ABCD$ est un rectangle. Donc $AC = BD$.
	**PROPRIÉTÉ 46** Si deux points appartiennent à un cercle alors ils sont équidistants du centre de ce cercle.	Ici, A et B appartiennent à un cercle de centre O. Donc $OA = OB$.

	**PROPRIÉTÉ 47** Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.	Ici, M appartient à la médiatrice de $[AB]$. Donc $MA = MB$.
	**PROPRIÉTÉ 48** Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est situé à la même distance des côtés de cet angle.	Ici, B appartient à la bissectrice de $\widehat{xOy}$, $(BD) \perp (OD)$ et $(BC) \perp (OC)$. Donc $BC = BD$.
	**PROPRIÉTÉ 49** Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.	Ici, dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[BC]$. Donc, $IJ = AB \div 2$.
	**PROPRIÉTÉ 50** **Théorème de Thalès** : Si $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ et $(BC)//(MN)$ alors $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$.	Ici, $H \in (EF)$, $K \in (EG)$ et $(HK)//(GF)$. Donc $\dfrac{EF}{EH} = \dfrac{EG}{EK} = \dfrac{GF}{HK}$.
	**PROPRIÉTÉ 51** **Théorème de Pythagore** : Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.	Ici, ABC est rectangle en A. Donc, $BC^2 = BA^2 + AC^2$.
	**PROPRIÉTÉ 52** Si un triangle est rectangle alors la médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.	Ici, ABC est rectangle en A et M est le milieu de $[BC]$. Donc $AM = BC \div 2$.
	**PROPRIÉTÉ 53** Dans un triangle, le centre de gravité se situe au deux tiers des médianes en partant du sommet	Ici, G est le centre de gravité du triangle ABC et $[AA']$ en est une médiane. Donc $AG = \dfrac{2}{3}AA'$.

 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 54** Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure. (C'est également vrai pour les losanges, les rectangles et les carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme. Donc $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$ et $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$.
	**PROPRIÉTÉ 55** Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.	Ici, ABC est un triangle. Donc $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.
	**PROPRIÉTÉ 56** Si un triangle est rectangle alors ses angles aigus sont complémentaires.	Ici, ABC est rectangle en A. Donc $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$.
	**PROPRIÉTÉ 57** Si un triangle est isocèle alors ses angles à la base ont la même mesure.	Ici, ABC est isocèle en C. Donc $\widehat{A} = \widehat{B}$.
	**PROPRIÉTÉ 58** Si un triangle est équilatéral alors ses angles mesurent 60°.	Ici, ABC est équilatéral. Donc $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$.
	**PROPRIÉTÉ 59** Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils ont la même mesure.	Ici, $\widehat{xAz}$ et $\widehat{yAt}$ sont opposés par le sommet. Donc, $\widehat{xAz} = \widehat{yAt}$.
 $[OB)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$	**PROPRIÉTÉ 60** Si une droite est la bissectrice d'un angle alors elle partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure.	Ici, $[OB)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$. Donc $\widehat{xOB} = \widehat{BOy} = \widehat{xOy} \div 2$.

	**PROPRIÉTÉ 61** Si deux angles sont inscrits dans un même cercle et s'ils interceptent le même arc de cercle alors ils ont la même mesure.	Ici, les angles inscrits $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$. Donc, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.
	**PROPRIÉTÉ 62** Si un angle inscrit dans un cercle et un angle au centre interceptent le même arc de cercle, alors l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit.	Ici, l'angle inscrit $\widehat{ABC}$ et l'angle au centre $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$. Donc, $\widehat{ADC} = 2\widehat{ABC}$.
	**PROPRIÉTÉ 63** Si deux points sont symétriques par rapport à une droite alors cette droite est la médiatrice du segment ayant pour extrémités ces deux points.	Ici, M et M' sont symétriques par rapport à la droite (d). Donc (d) est la médiatrice de $[MM']$.
	**PROPRIÉTÉ 64** Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.	Ici, $AC = CB$. Donc C appartient à la médiatrice de $[AB]$.
	**PROPRIÉTÉ 65** Si, dans un triangle, une droite passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé alors c'est une hauteur du triangle.	Ici, $(CD) \perp (AB)$. Donc (CD) est la hauteur issue de C du triangle ABC
	**PROPRIÉTÉ 66** Si, dans un triangle, une droite passe par un sommet et par le milieu du côté opposé alors c'est une médiane du triangle.	Ici, D est le milieu de $[AB]$. Donc, $[CD]$ est la médiane relative à $[AB]$ du triangle ABC.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>PROPRIÉTÉ 67 Si une droite partage un angle en deux angles égaux alors cette droite est la bissectrice de l'angle.</td>
<td>Ici,
la droite (OB) partage l'angle $\widehat{COD}$ en deux angles égaux.
Donc (OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{COD}$.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>PROPRIÉTÉ 68 Si un point est situé à la même distance des côtés d'un angle alors il appartient à la bissectrice de cet angle.</td>
<td>Ici, $BC = BD$, $(OC) \perp (BC)$ et $(BD) \perp (OD)$.
Donc, $[OB)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{COD}$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>PROPRIÉTÉ 69 Si un triangle est isocèle, alors la médiane, la hauteur, la bissectrice issues du sommet principal et la médiatrice de la base sont confondues.</td>
<td>Ici, ABC est isocèle en C, M est le milieu de $[AB]$ et $(CM) \perp (AB)$.
Donc (CM) est :
la médiane relative à $[AB]$,
la médiatrice de $[AB]$,
la hauteur issue de C,
la bissectrice de $\widehat{ACB}$.</td>
</tr>
</table>

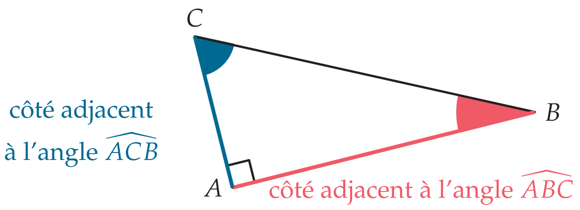


LEXIQUE

A

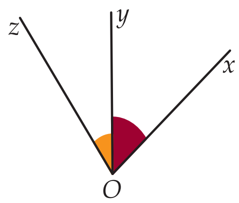
Adjacent (côté)

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à un angle aigu est le côté de cet angle qui n'est pas l'**hypoténuse**.



Adjacents (angles)

Deux angles adjacents sont deux angles qui ont leur sommet en commun, un côté commun et qui sont situés de part et d'autre de ce côté commun.



Affine (fonction)

voir **Fonction affine**

Aire

Les formules d'aire usuelles sont :

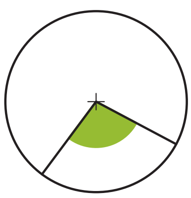
- pour un triangle : $\mathcal{A} = base \times hauteur \div 2$
- pour un parallélogramme : $\mathcal{A} = base \times hauteur$
- pour un rectangle : $\mathcal{A} = Longueur \times largeur$
- pour un carré : $\mathcal{A} = côté^2$
- pour un disque : $\mathcal{A} = \pi \times rayon^2$

Amplitude d'un intervalle

voir **Intervalle**

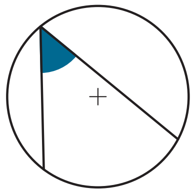
Angle au centre

Un angle au centre a pour sommet le centre d'un cercle et ses côtés coupent le cercle en deux points distincts.



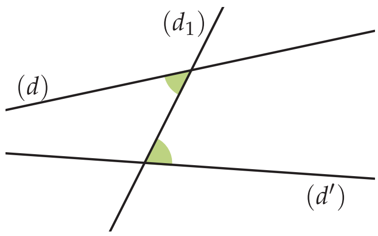
Angle inscrit dans un cercle

Un angle inscrit a pour sommet un point d'un cercle et ses côtés coupent le cercle en deux points distincts.



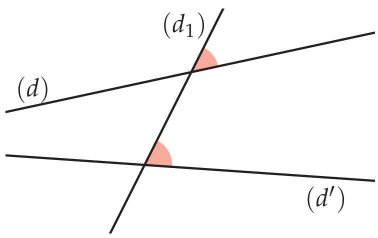
Angles alternes-internes

Les angles verts sont alternes-internes. Ils sont déterminés par les droites (d), (d') et la sécante (d_1).



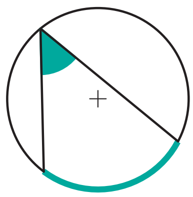
Angles correspondants

Les angles roses sont correspondants. Ils sont déterminés par les droites (d), (d') et la sécante (d_1).



Arc de cercle (intercepté)

Dans un cercle, l'arc intercepté par un angle est la portion de cercle située à l'intérieur des deux côtés de l'angle.

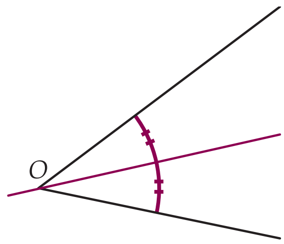


Axe des abscisses .... *Page 187*
Axe des ordonnées .... *Page 187*

B

Bissectrice

La bissectrice d'un angle est la droite (ou la demi-droite) qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure. C'est l'axe de symétrie de l'angle.



C

Canonique

voir **forme canonique**

Caractère (valeur du)

Dans une étude statistique, les valeurs d'un caractère sont les réponses possibles à une question.

- Si ces réponses sont des nombres alors le caractère est dit **quantitatif**.
- Si ces réponses sont des mots alors le caractère est dit **qualitatif**.

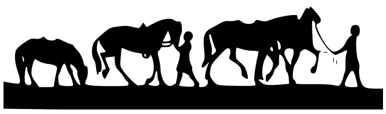
Carrée (fonction)

voir **Fonction carrée**

Carré parfait

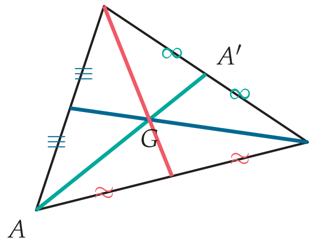
Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.
Voici les 20 premiers : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400.

Centre d'une classe .... *Page 14*



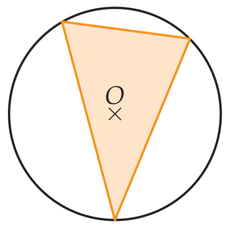
Centre gravité

Dans un triangle, le centre de gravité est le point d'intersection des **médianes**. Il se situe au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet. Par exemple $AG = \frac{2}{3}AA'$



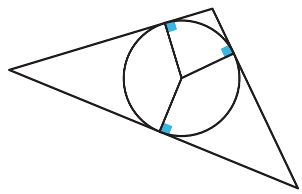
Cercle circonscrit

Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle qui passe par les trois sommets de ce triangle. Son centre est le point de concours des **médiatrices** du triangle.



Cercle inscrit

Le cercle inscrit à un triangle est le cercle tangent aux trois côtés de ce triangle. Son centre est le point de concours des **bissectrices** de ce triangle.



Cercle trigonométrique .... *Page 248*

Circonférence

Voir **Périmètre d'un cercle**

Classe d'une série statistique .... *Page 10*
Coefficient directeur .... *Page 230*
Colinéaires .... *Page 208*
Concave .... *Page 149*

Conclusion d'une propriété

Dans une **propriété** de la forme si... alors..., il s'agit de la partie après le alors. Si les hypothèses sont vérifiées par la situation étudiée, la conclusion sera vraie et pourra être utilisée pour poursuivre le raisonnement.

Conjecturer (émettre une conjecture)

Proposer une hypothèse que l'on pense être vraie. Le plus souvent, une conjecture est émise suite à l'étude d'une situation ou à des simulations.

Constante (fonction)

Voir **Fonction constante**

Constante (sens de variation) .... *Page 118*

Contre-exemple

voir **Infirmer**

Convexe .... *Page 149*

Coordonnées d'un vecteur .... *Page 206*

Coplanaire .... *Page 172*

Cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, si $\widehat{a}$ note l'un des deux angles aigus, alors

$$\cos \widehat{a} = \frac{\text{Longueur du côté adjacent à } \widehat{a}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$$

Cosinus d'un nombre .... *Page 249*

Courbe représentative .... *Page 83*

Croissant (variations) .... *Page 119*

D

Décroissant (variations) .... *Page 119*

Dénominateur

Dans une fraction, le dénominateur dénomme c'est-à-dire donne le nom de la portion représentée.

Par exemple, dans $\frac{5}{4}$, le 4 indique que l'unité a été partagée en 4 parts égales ; chaque part s'appelle donc un quart.

Développer

Développer une expression, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Diagonale d'un carré

La longueur de la diagonale d'un carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$.

Diagramme de Venn .... *Page 52*

Différence

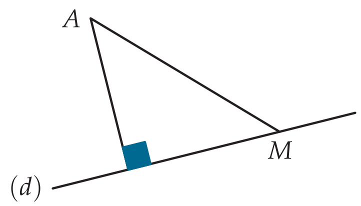
Une différence est le résultat d'une soustraction.

Distance à zéro

La distance à zéro d'un nombre relatif est la distance entre le nombre et l'origine sur une droite graduée.

Distance d'un point à une droite

Soient une droite (d), deux points A et M tels que $M \in (d)$.



- La distance du point A à la droite (d) est la plus courte des distances AM quand M parcourt (d).
- Le point de (d) qui réalise ce minimum est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.

Distributivité

Il s'agit d'une propriété de la multiplication par rapport à l'addition.

- Pour la distributivité simple :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

- Pour la double distributivité :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Diviseur

Soient a et b deux nombres entiers (b non nul). On dit que b est un diviseur de a si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Diviseur commun

Un diviseur commun à plusieurs nombres entiers est un nombre qui divise chacun des nombres.

Division euclidienne
Effectuer la division euclidienne de deux nombres **entiers naturels**, c'est trouver deux nombres entiers (le quotient et le reste) tels que : $dividende = diviseur \times quotient + reste$ avec $reste < diviseur$.

Donnée
On appelle donnée toute information fournie dans l'énoncé d'un exercice.

Données brutes .... Page 10

E

Échantillon .... Page 31

Écriture scientifique d'un nombre
L'écriture scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^n$ où la distance à zéro de a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu) et n un nombre entier relatif.
Elle sert à simplifier les calculs avec des grands nombres (astronomie...) ou de très petits nombres (biologie moléculaire...).

Effectif d'un caractère
L'effectif associé à une valeur du **caractère** est le nombre d'**individus** de la **population** étudiée dont le caractère correspondant prend cette valeur.

Effectif total
L'effectif total est le nombre total d'individus de la population étudiée lors d'une enquête statistique.

Encadrement
Réaliser l'encadrement d'un nombre x, c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
L'**amplitude** de l'encadrement est $b - a$.

Ensemble de définition .... Page 82

Entier naturel
Un nombre entier naturel est un nombre positif dont la partie décimale est nulle.

Entier relatif
Un nombre entier relatif est un nombre relatif dont la partie décimale est nulle.
Les entiers naturels sont les entiers relatifs positifs.

Équation
Une équation est une égalité dans laquelle se trouve(nt) un (ou plusieurs) nombre(s) inconnu(s).

Équation (résoudre une)
Résoudre une équation, c'est chercher toutes les valeurs possibles du (ou des) nombre(s) inconnu(s) qui rend(ent) l'égalité vraie.

Équation de courbe .... *Pages 83, 229*
Équation réduite .... *Page 230*
Étendue .... *Page 10*
Événement .... *Page 52*
Événement contraire .... *Page 54*
Éventualités .... *Page 52*
Expérience aléatoire .... *Pages 31, 52*

Exposant
voir **Puissance**

Expression algébrique .... *Page 82*
Extrémité (vecteur) .... *Page 203*
Extremum .... *Page 120*

F

Factoriser
Factoriser une expression, c'est transformer une somme algébrique en un produit.

Fluctuation d'échantillonnage .... *Page 31*
Fonction .... *Page 82*
Fonction affine .... *Pages 82, 136*
Fonction carrée .... *Page 82*
Fonction constante .... *Page 231*
Fonction de référence .... *Page 82*
Fonction homographique .... *Page 138*
Fonction inverse .... *Page 82*
Fonction linéaire .... *Page 231*
Fonction polynôme de degré 2 .... *Page 153*
Fonction trinôme .... *Page 153*

Forme canonique .... *Page 153*

Fréquence d'apparition .... *Page 11*

G

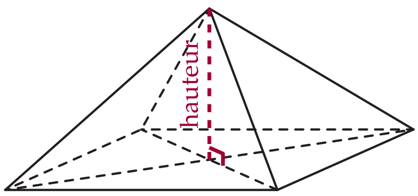
Grand cercle

Dans une sphère (ou une boule), un grand cercle est un cercle qui a pour centre le centre de la sphère (ou de la boule).
Son diamètre est celui de la sphère.

H

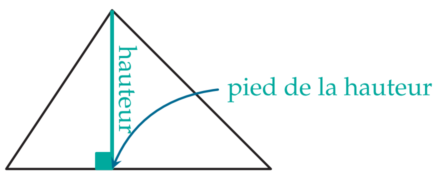
Hauteur d'une pyramide, d'un cône

La hauteur d'une pyramide ou d'un cône désigne le segment issu de son sommet et perpendiculaire au plan de la base mais aussi la longueur de ce même segment.



Hauteur d'un triangle

Dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé, mais aussi la distance entre ce sommet et ce côté opposé. L'intersection de la hauteur avec ce côté s'appelle le **pied de la hauteur**.



Hauteur d'un triangle équilatéral

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a mesure $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

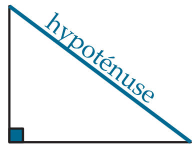
Homographique

voir **Fonction homographique**

Hyperbole .... *Page 83*

Hypoténuse

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. C'est aussi le plus grand côté.



Hypothèses d'une propriété

Chaque **propriété** ne peut s'appliquer que lorsque certaines conditions sont réunies. Pour les propriétés de la forme si... alors..., la partie après le si décrit ces conditions. Il s'agit donc de vérifier que la situation étudiée satisfait aux hypothèses de la propriété avant de pouvoir utiliser effectivement la propriété.

I

Identités remarquables

Pour a et b deux nombres relatifs :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Ces identités servent à **développer** (utilisation de la gauche vers la droite) et à **factoriser** (utilisation de la droite vers la gauche).

Image .... *Page 82*

Individus

« Personne » dont on étudie statistiquement un caractère.

Inégalité

Une inégalité est une relation d'ordre entre deux grandeurs. Par exemple : $a > b$ ou $a \leqslant b$.
La double barre inférieure indique que a et b peuvent éventuellement être égaux ; sans la double barre a et b sont distincts.

Inéquation

Une inéquation est une inégalité dans laquelle se trouve(nt) un (ou plusieurs) nombre(s) inconnu(s).

Inéquation (résoudre une)

Résoudre une inéquation, c'est chercher toutes les valeurs possibles du (ou des) nombres inconnus pour lesquelles l'inégalité est vraie.

Infini

L'usage des symboles $+\infty$ et $-\infty$ comme borne d'un intervalle indique que l'intervalle n'est pas borné.
Dans $]-\infty; b]$, $-\infty$ indique que cet intervalle comprend tous les nombres inférieurs ou égaux à b sans aucune limite.

Infirmer

Infirmer une proposition revient à prouver qu'elle est fausse. Souvent, il suffit de trouver une situation où elle ne fonctionne pas. C'est le **contre-exemple**.

Intersection d'événements .... *Page 52*

Intervalle

L'intervalle $[a; b]$ est l'ensemble des nombres réels compris entre a et b inclus.

- Quand le [est tourné vers le nombre ($[a$), le nombre est compris dans l'intervalle.
- Quand le [tourne le dos au nombre ($]a$), le nombre n'est pas compris dans l'intervalle.

L'une des bornes peut être le symbole ∞ (voir **Infini**).

Intervalle de confiance .... *Page 33*

Intervalle de fluctuation .... *Page 32*

Inverse

L'inverse d'un nombre relatif a ($a \neq 0$) est le nombre qui, multiplié par a, donne 1. Il se note $\dfrac{1}{a}$ ou a^{-1}.

Inverse (fonction)

voir **Fonction inverse**

Irréductible (fraction)

Une fraction irréductible est une fraction que l'on ne peut plus simplifier, c'est-à-dire que le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun.
Pour rendre une faction irréductible en une seule simplification, il suffit de simplifier par le **PGCD** du numérateur et du dénominateur.

L

Linéaire (fonction)

voir **Fonction linéaire**

Littéral (calcul)

Le terme calcul littéral désigne le fait de calculer avec des nombres dont on ne connaît pas la valeur et qui ont été remplacés par des lettres.

Loi de probabilité .... *Page 54*

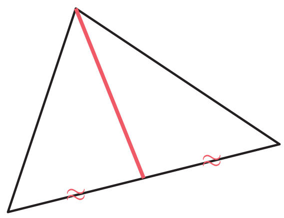
M

Maximum .... *Page 120*

Médiane .... *Page 11*

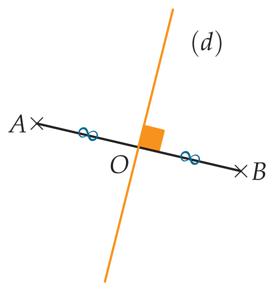
Médiane (d'un triangle)

Dans un triangle, une médiane est un segment qui joint un sommet du triangle et le milieu du côté opposé à ce sommet.



Médiatrice

La médiatrice d'un segment est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu. La médiatrice d'un segment est un axe de symétrie de ce segment.



Minimum .... *Page 120*

Modalités .... *Page 10*

Modèle équiréparti .... *Page 53*

Monotone .... *Page 118*

Moyenne .... *Page 13*

Moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique d'une série de nombres est le quotient de leur somme par le nombre de valeurs. Exemple, pour a, b, c et d :

$$\text{moyenne arithmétique} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Moyenne géométrique

La moyenne géométrique d'une série de n nombres est la racine n^{e} de leur produit. Exemple, pour a, b :

$$\text{moyenne géométrique} = \sqrt{a \times b}$$

pour a, b et c :

$$\text{moyenne géométrique} = \sqrt[3]{a \times b \times c}$$

N

Numérateur

Dans une fraction, le numérateur numère c'est-à-dire qu'il indique le nombre de portions égales.

Par exemple, dans $\frac{2}{3}$, le numérateur 2 donne le nombre de tiers.

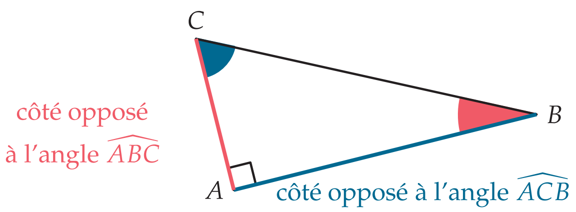
O

Opposé

- L'opposé d'un nombre relatif est le nombre qui a la même distance à zéro que ce nombre et qui est de signe contraire.
- La somme de deux nombres opposés est égale à 0.

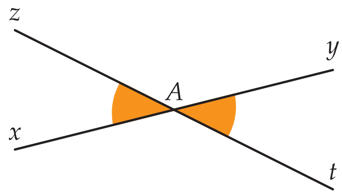
Opposé (côté)

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle aigu est le côté qui n'est pas un côté de cet angle.



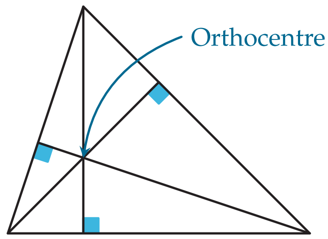
Opposés par le sommet (angles)

Deux angles opposés par le sommet sont deux angles qui ont un sommet commun et qui ont leurs côtés dans le prolongement l'un de l'autre.



Orthocentre

Dans un triangle, l'orthocentre est le point de concours des hauteurs.



Orthogonal

voir **Repère orthogonal**

Orthonormal

voir **Repère orthonormal**

Orthonormé

voir **Repère orthonormé**

P

Périmètre d'un carré

$\mathcal{L} = 4 \times \textit{côté}$

Périmètre d'un cercle

$\mathcal{L} = 2 \times \pi \times \textit{rayon}$

Périmètre d'un rectangle

$\mathcal{L} = 2 \times (Longueur + largeur)$

Perspective cavalière .... *Page 170*

PGCD

Le PGCD de deux (ou plusieurs) nombres entiers est le plus grand diviseur commun à ces nombres.

Pied (de la hauteur)

Voir **Hauteur d'un triangle**

Plan .... *Page 171*

Polygone

Un polygone est une figure fermée à plusieurs côtés.

Polygone régulier

Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

Polynôme

Expression littérale résultat de la somme pondérée de plusieurs puissances d'exposants positifs d'un nombre x. Le **degré** du polynôme est donnée par la puissance de plus grand exposant.

Population

Groupe d'**individus** à propos desquels on étudie statistiquement un caractère.

PPCM

Le PPCM de deux nombres entiers positifs est le plus petit de leurs multiples communs.

Premier (nombre)

Un nombre premier est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs distincts (1 et lui-même).

Premier quartile .... *Page 12*

Premiers entre eux (nombres)

Deux nombres entiers sont premiers entre eux quand leur PGCD vaut 1.

Probabilité d'un événement .... *Page 54*

Produit

Un produit est le résultat d'une multiplication.

Produit d'un vecteur par un nombre

voir **Vecteur**

Produits en croix

Dans un tableau de quatre cases, faire les produits en croix revient à multiplier les nombres deux par deux en diagonale.

a	b
c	d

Les produits en croix sont : $a \times d$ et $b \times c$

Dans le cas d'une situation de proportionnalité, les produits en croix sont égaux.

Proportionnel

Deux grandeurs sont proportionnelles si chacune s'obtient en multipliant l'autre par un même nombre non nul.

Propriété

Une propriété est une règle connue (démontrée ou admise) présentée souvent sous la forme « Si... alors... ».

Puissance

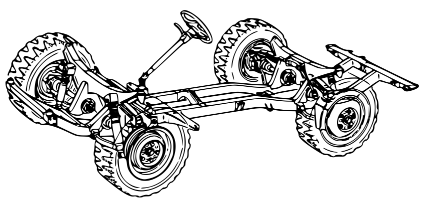
Pour tout nombre relatif a et tout nombre entier n positif non nul, on définit les puissances de a par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$$

Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Dans les deux cas, le nombre n s'appelle l'exposant.



Q

Qualitatif

voir **Caractère**

Quantitatif

voir **Caractère**

Quotient

Le quotient d'un nombre a par un nombre b non nul est le nombre qu'il faut multiplier par b pour obtenir a. On le note : $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$.

R

$\mathbb{R}$

Ce symbole note l'ensemble des nombres réels.

- $\mathbb{R}^+$ note l'ensemble des nombres positifs.
- $\mathbb{R}^-$ note l'ensemble des nombres négatifs.
- $\mathbb{R}^*$ note l'ensemble des nombres non nuls.
- $\mathbb{R}^{+*}$ note l'ensemble des nombres strictement positifs.
- $\mathbb{R}^{-*}$ note l'ensemble des nombres strictement négatifs.

Racine carrée

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif qui, élevé au carré (multiplié par lui-même), donne a.

Rationnel (nombre)

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction de deux nombres entiers.

S

Section

Une section est la figure géométrique obtenue lorsqu'on coupe un solide par un plan.

Simplifier une fraction

Simplifier une fraction, c'est trouver une autre fraction égale à la première de telle sorte que le numérateur et le dénominateur soient des nombres entiers plus petits.

Sinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, si $\widehat{a}$ note l'un des deux angles aigus, alors

$$\sin \widehat{a} = \frac{\text{Longueur du côté opposé à } \widehat{a}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$$

Solution

- La (ou les) solution(s) d'une **équation** sont la (ou les) valeur(s) qui vérifie(ent) l'égalité.
- Les solutions d'une **inéquation** sont les valeurs qui vérifient l'inégalité.

Somme

Une somme est le résultat d'une addition.

Somme de vecteurs

voir **Vecteur**

Soustraire un vecteur

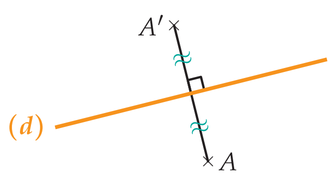
voir **Vecteur**

Sphère

La sphère de centre O et de rayon r est formée de tous les points de l'espace situés à la distance r du point O.

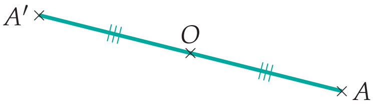
Symétrie axiale

Le point A' est l'image du point A par la symétrie axiale d'axe (d) si (d) est la médiatrice du segment $[AA']$.



Symétrie centrale

Le point A' est l'image du point A par la symétrie centrale de centre O si O est le milieu de $[AA']$.



Système d'équations

Un système de deux équations à deux inconnues est formé par deux équations qui comportent chacune deux inconnues.

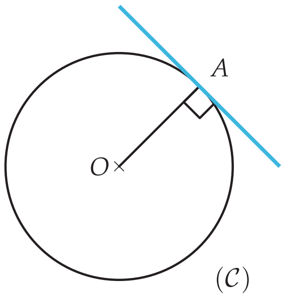
Système d'équations (résoudre)

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est trouver toutes les solutions communes à ces deux équations.

T

Tangente (à un cercle)

La tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O en un point A de ce cercle est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon $[OA]$.
Elle a un unique point d'intersection avec le cercle.



Tangente d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, si $\widehat{a}$ note l'un des deux angles aigus, alors

$$\tan \widehat{a} = \frac{\text{Longueur du côté opposé à } \widehat{a}}{\text{Longueur du côté adjacent à } \widehat{a}}$$

Trapèze

Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles.

Trinôme

voir **Fonction trinôme**

Tronc de cône ou de pyramide

Le volume d'un tronc de pyramide ou de cône est le produit de sa hauteur par la somme de la moyenne arithmétique des aires de ses bases et de leur moyenne géométrique.

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{B}_1 + \sqrt{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2} + \mathcal{B}_2\right)$$

Par exemple, pour le cône :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 \times r_2 + r_2^2\right)$$

U

V

BON COURAGE