Etude de quelques fonctions irrationnelles

1e exemple $f(x)=\sqrt{x}$

$D_f=[0;+\infty[$

Parité : D_f n'est pas symétrique par rapport à donc f n'est ni paire, ni impaire

Limites aux bornes de D_f

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Dérivabilité :

. Sur $]0\,;+\infty[$, x > 0, donc f est dérivable sur cet intervalle et

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour x >0

. En 0,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}==+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0, et la courbe représentative de f admet une demi tangente verticale en 0.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	+
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

Branches infinies :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction asymptotique $(x'Ox)$

Courbe

2e exemple $f(x) = x + \sqrt{-x}$

$D_f =]-\infty;0]$

Limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0\ ;\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Dérivabilité

. Sur $]-\infty;0[$, -x >0, donc f est dérivable et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$

. En 0

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to0^-}\frac{x+\sqrt{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{x}{x} + \lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x}$$

$$= 1 + \lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x\sqrt{-x}}$$

$$= 1 + \lim_{x\to0^-} -\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$$

Donc f n’est pas dérivable en 0, et la courbe de f admet en 0 une demi tangente verticale

Tableau de variations

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{-x}}$$
$$f'(x)=\frac{2\sqrt{-x}-1}{2\sqrt{-x}}$$

$2\sqrt{-x}\ -1>0$ si et seulement si $\sqrt{-x}\ >\ \frac{1}{2}$, donc si $-x\ >\ \frac{1}{4}$

alors f ' (x) > 0 si $x\ <\ -\frac{1}{4}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

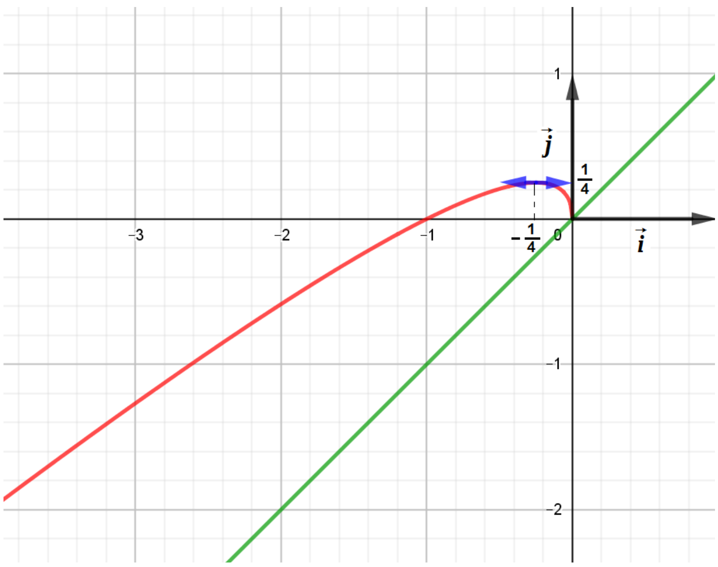
f ' ($-\frac{1}{4}$) = 0, donc on a une tangente parallèle à (x'Ox) au point d'abscisse $-\frac{1}{4}$

Branches infinies

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{-x}}{x}\right)=1(=a)$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x}=+\infty$$

La courbe admet donc en $-\infty$ une branche infinie parabolique de direction asymptotique y = x.

Courbe



3ᵉ exemple $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$

$x^2+2x+2>0$ pour tout réel x donc D_f = IR
f n'est ni paire ni impaire

Limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Dérivabilité
$x^2+2x+2>0$ pour tout réel x donc f est dérivable sur IR.

$$f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Tableau de variations

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

f '(-1) = 0, donc on a une tangente parallèle à (x'Ox) en -1
Branches infinies
. en - ∞ y = -x – 1
. en + ∞ y = x +1
Courbe