Étude de quelques fonctions rationnelles

1. Asymptotes

1.1 Branches infinies:

La courbe représentative d'une fonction f admet une branche infinie si l'une des coordonnées d'un point M(x,y) de cette courbe peut tendre vers l'infini. C'est-à-dire si on a l'un des cas suivants

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} f(x) = l \ , \ \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \ et \ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

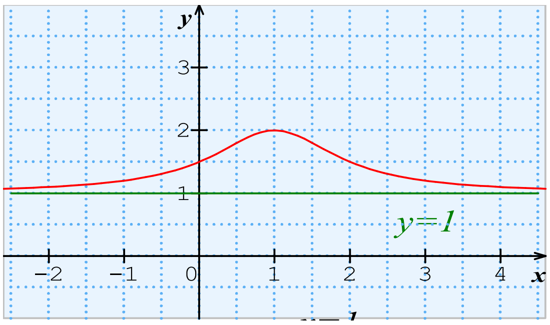
1.2 Asymptotes :

1.2.1 Définition :

Une droite (D) est une asymptote à la courbe (ζ) si la distance d'un point M(x ;y) de la courbe à la droite D tend vers 0 quand M s'éloigne indéfiniment sur la branche infinie.

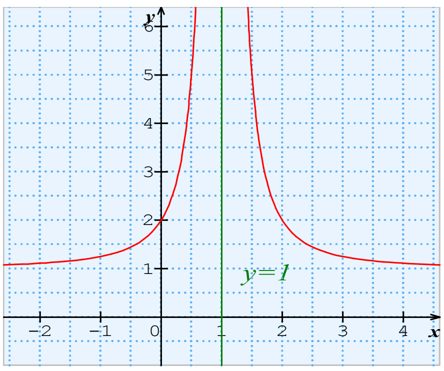
1.2.2 Asymptote horizontale (parallèle à l'axe des abscisses):

Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ alors la droite d'équation. $y=l$ est une asymptote horizontale



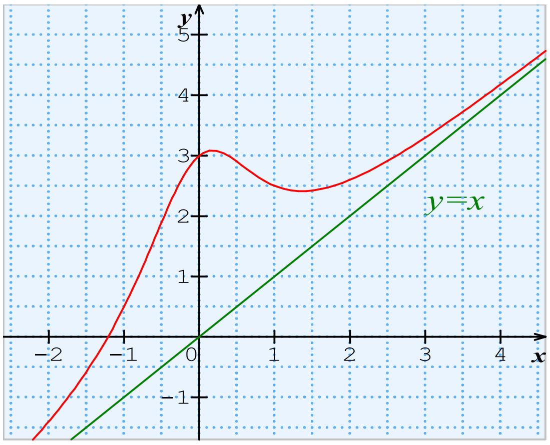
1.2.3 Asymptote verticale (parallèle à l'axe des ordonnées):

Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, alors la droite d' équation $x=x_0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f



1.2.4 Asymptote oblique :

La courbe (ζ_f) admet une asymptote oblique si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et s'il existe deux réels a et b tels que $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$; l'équation de l'asymptote est alors $y = ax+b$



Détermination de a et b :

Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et s'il existe deux réels a et b tel que $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

alors $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{f(x) - (ax+b)}{x} \right] = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} - a - \dfrac{b}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} - a = 0$,

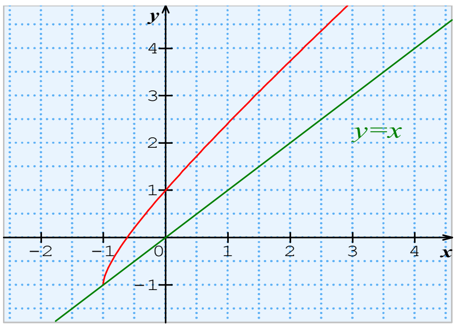
Donc, $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ lorsque cette limite existe.

$\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$ si cette limite existe.

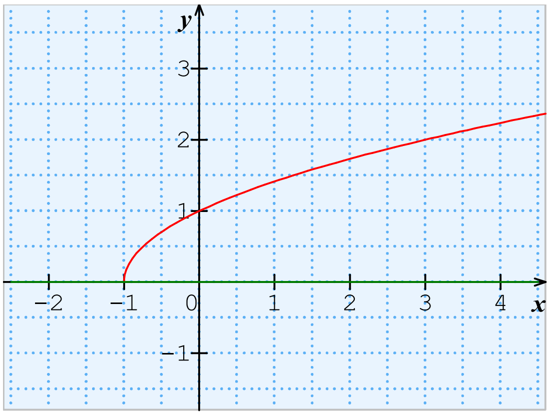
Remarques

- Si f(x) est de la forme $f(x) = \alpha x + b + \varphi(x)$ ou φ est telle que $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote à la courbe.

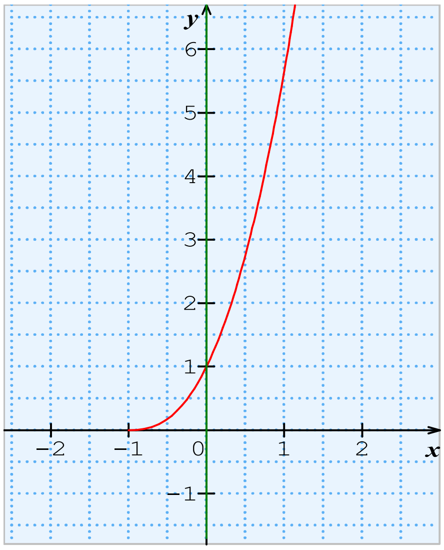
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ mais $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \infty$, la courbe admet une branche infinie parabolique de direction asymptotique y = ax.



- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ mais $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ la courbe n'admet pas d'asymptote mais une branche infinie parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.



- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$, la courbe n'admet pas d'asymptote mais une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.



2. Fonctions homographiques $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ *avec* $c\neq 0$ *et* $ad-bc\neq 0$

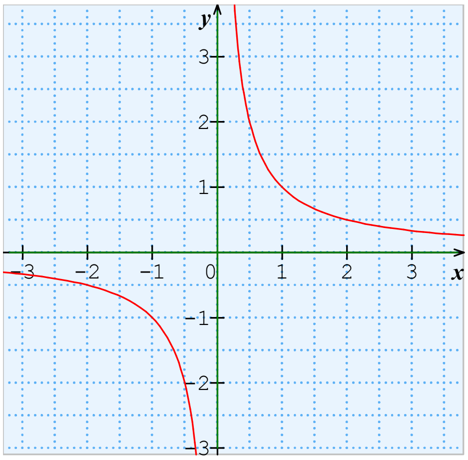
<u>*1e exemple*</u> : $f(x)=\frac{1}{x}$

- $D=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.
- Comme f est impaire, on peut réduire le domaine d'étude à $D_e=\left]0;+\infty\right[$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote parallèle à (x'Ox)

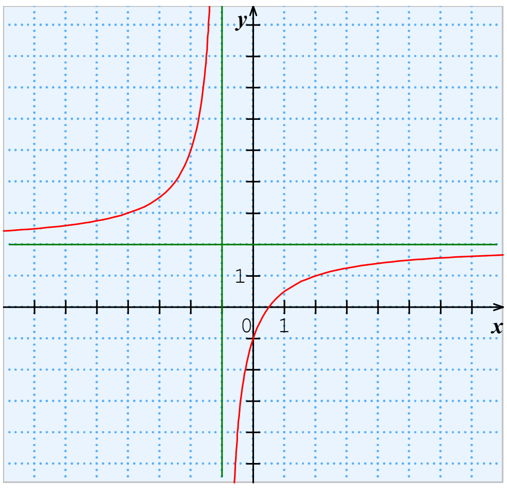
- Dérivée $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
- Tableau de variation

x	0		$+\infty$
f'(x)	‖	-	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	0

- Courbe



<u>*2^e^ exemple*</u> : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$



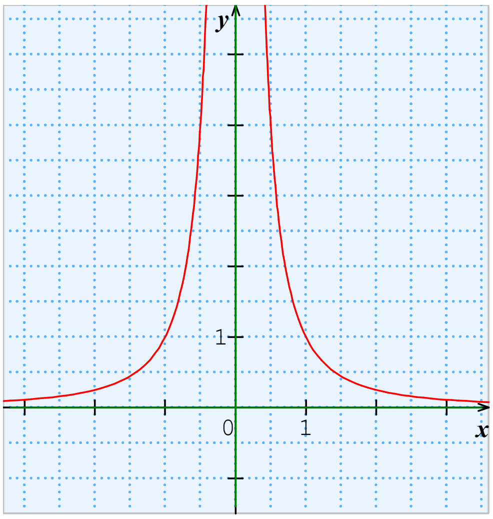
3. Fonctions du type $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ avec $a'\neq 0$

1e exemple $f(x)=\frac{1}{x^2}$

- $D=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
- Comme f est paire, on peut réduire le domaine d'étude à $D_e=]0;+\infty[$.
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy)
- $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote.
- Dérivée $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$
- Tableau de variations

x	0	$+\infty$
f'(x)	‖	-
f(x)	‖ $+\infty$	↘ 0

- Courbe



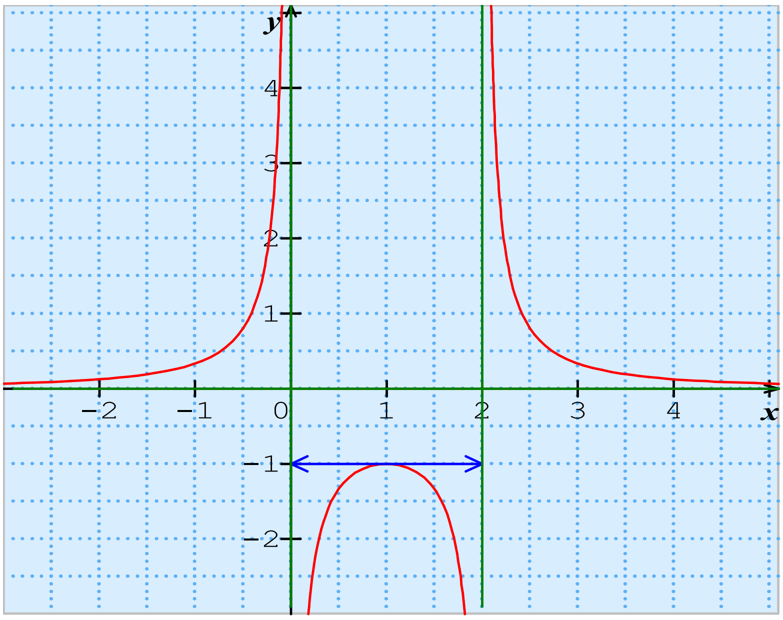
2e exemple : $f(x)=\frac{1}{x^2-2x}$

- $D_f=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$
- f n'est ni paire ni impaire
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale (parallèle) à (x'Ox) en $-\infty$ et en $+\infty$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ *et* $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale (parallèle à (y'Oy)

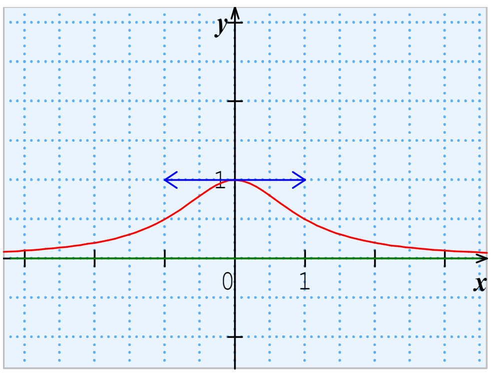
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. Donc la droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale (parallèle à (y'Oy).
- Dérivée : $f'(x) = -\dfrac{2(x-1)}{(x^2-2x)^2}$
- Tableau de variations :
-

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
2(x-1)	-		-	0	+		+
$(x^2-2x)^2$	+	0	+		+	0	+
f '(x)	+	‖	+	0	-	‖	-
f(x)	0 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

- Courbe



3^e^ exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$



3. Fonctions du type $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ avec $a\neq 0$ et $d\neq 0$

1^e exemple : $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x}$

- $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- $f(-x)=\dfrac{x^2-x+1}{-x}$ et $-f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{-x}$ f n'est ni paire ni impaire.

$$D_e=D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$$

- limites

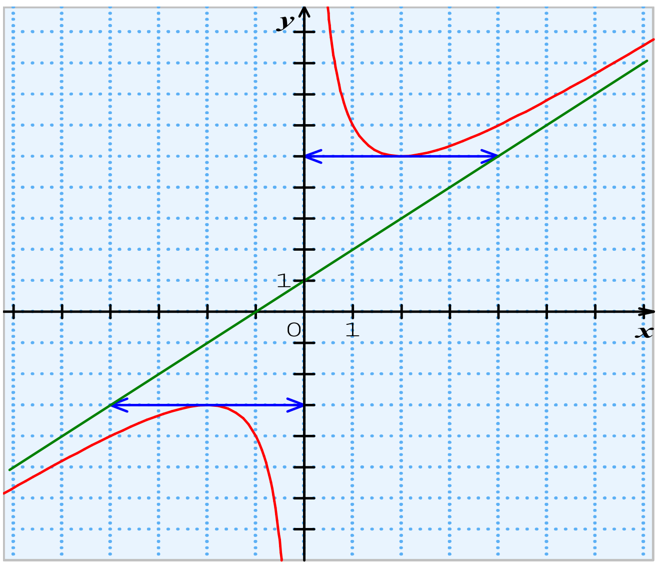
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty \ ; \ \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

- Dérivée $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$
- Tableau de variations

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Tangentes horizontales en $x_0 = -2$ et $x_1 = 2$

- Courbe :



2

<u>***2e exemple :***</u> $f(x) = -x + \dfrac{1}{x}$

- $D_f =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$
- $f(-x) = x - \dfrac{1}{x}$ $-f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ f est impaire $D_e =]0\,;+\infty[$
- *Limites*

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc la droite d'équation y = x est une asymptote oblique

- Dérivée : $f'(x) = -1 + \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -1 - \dfrac{1}{x^2}$
- Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	-
$f(x)$	|| $-\infty$	$+\infty$

- Courbe _