Séquence 2 : Suites arithmétiques

1. Définition

Dire qu'une suite (U_n) est **arithmétique** de raison r signifie qu'il existe un réel r tel que pour tout n :

$$U_{n+1} = U_n + r$$

Ce réel r est appelé **raison** de la suite. $r = U_{n+1} - U_n$ pour tout n

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

Exemples :

- La plus naturelle des suites arithmétiques est la suite des entiers naturels de premier terme 0 et de raison r = 1.
- La suite (U_n) définie par $U_n = -2n + 5$ est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $r = -2$.

2. Expression du terme général

D'après la définition, $U_1 = U_0 + r$.

Alors $U_2 = U_1 + r = U_0 + r + r = U_0 + 2r$; $U_3 = U_2 + r = U_0 + 2r = U_0 + 3r$ …. et $U_{n+1} = U_n + r = U_0 + n\,r$.

Ainsi, pour tout n, nous avons: $U_n = U_0 + n\,r$.

Mais si l'indice commence par un entier $p > 0$, $U_n = U_0 + n\,r$ et $U_p = U_0 + p\,r$.

En retranchant membre à membre: $U_n - U_p = n\,r - p\,r$.

D'où : $U_n = U_p + (n - p)\,r$.

3. Somme des termes

On cherche à calculer la somme $S = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots + U_n$

On a $S = \dfrac{(n-k+1)(U_k + U_n)}{2}$.

4. Applications

- Une suite arithmétique (U_n) a pour raison r = - 2, et, pour premier terme $U_0 = 4$.

1) Exprimer U_n en fonction de n.

2) Calculer le 8e terme et le 28e terme de cette suite.

3) Calculer la somme : $S = U_7 + U_8 + \ldots + U_{27}$.

Réponse :

1) En utilisant la formule, $U_n = U_0 + n\,r$, avec r = - 2 et $U_0 = 4$, on obtient $U_n = 4 - 2n$.

2) Le 8e terme et le 28e terme de cette suite correspondent à U_7 et U_{27}. En remplaçant n par 7 puis par 27, on a $U_7 = -10$ et $U_{27} = -50$.

3) En utilisant la formule pour k = 7 et n = 27, on a $S=\frac{(27-7+1)(-10-50)}{2}$ soit S = - 630.

- Calculer la somme S = 1 + 2 + 3 + 4 + …. + n.

Posons $U_0 = 1$, $U_1 = 2$, $U_2 = 3$, $U_3 = 4$, …, $U_{n-1} = n$

$$S=U_0+U_1+U_2+U_3+\ldots+U_{n-1}=\frac{(n-1-0+1)(U_0+U_{n-1})}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

D'où : $$S=\frac{n(1+n)}{2}$$