Ce document a été conçu par l'association ACCESMAD a destination des élèves de l'enseignement technique de Madagascar .Il propose une méthode pédagogique d'assimilation des contenus du texte officiel des programmes intitulé:

REPOBLIKAN'I MADAGASIKARA

MODULE DE FORMATION : MÉCANIQUE ET RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Indexation	UNITES DE FORMATION	DUREE
 UF/05/04/01 UF/05/04/02 UF/05/04/03 UF/05/04/04 UF/05/04/05	**Généralités et hypothèses** **Calculs analytiques et graphiques des réactions aux appuis** **Détermination des efforts dans les barres par la méthode de CREMONA** **Détermination des efforts dans les barres par la méthode de Ritter** **Dimensionnement des éléments d'un système triangulé**	
DUREE TOTALE		**90 HEURES**

Sous module traité UF/05/04/04: Systèmes triangulés, Méthode de Ritter (ou des sections)

Les autres sous modules du tableau ci-dessus sont traités dans d'autres documents de cours

CONNAISSANCES REQUISES POUR LIRE CE DOCUMENT: IL FAUT SAVOIR,

-déterminer les composantes d'un vecteur dans un repère cartésien.

-calculer le produit vectoriel de deux vecteurs.

-utiliser les expressions scalaire et vectorielle du moment d'une force en un point.

-utiliser le principe fondamental de la statique: PFS.

-connaître les unités de force et de moment de force.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES DU DOCUMENT:

Déterminer par le calcul les efforts normaux dans les barres un système triangulé.

Contrairement à la méthode graphique, on peut se limiter à la détermination des efforts dans quelques barres plus déterminantes de la structure.

Remarques préalables sur les symboles utilisés dans le texte :

- La méthode de calcul nécessite une grande rigueur dans le choix des notations et des symboles.

- L'indication F_2 **notée en rouge dans le texte** doit être lue « vecteur force F2 »
Par contre son intensité (ou module) est notée simplement en noir F_2

La notation vectorielle classique (avec flèche) est utilisée dans les formules inscrites sur fond jaune et dans les annexes manuscrites.

- La valeur numérique (ou intensité) d'une force est une grandeur positive.

Que signifie alors l'écriture du type : « F_2= -1000N » ?

- Le signe « moins » indique simplement que le sens réel de la force est contraire au sens envisagé sur le schéma initial (ce dernier n'étant qu'une hypothèse).

(la force a donc une intensité de 1000N mais sons sens est contraire au sens initial).

- Les calculs de R.D.M imposent souvent de faire un choix sur le sens des forces initialement inconnu. Après calcul, le signe devant la valeur numérique indique si ce choix était le bon.

Comme nous allons le voir, la résolution de ce type de problème demande beaucoup de méthode !

1- Choisissons un exemple de structure à calculer:

Nous allons traiter l'exemple de la structure déjà résolue graphiquement par la méthode de Crémona. (voir schéma ci-dessous) Nous pourrons comparer ainsi les deux méthodes. **Nous souhaitons calculer les efforts dans les barres CD, CE, BE**.

Les forces **P** verticales orientées vers le bas ont toutes une intensité égale à 1000N. Les réactions ont une intensité de 1500N.

2-Principe de la méthode :

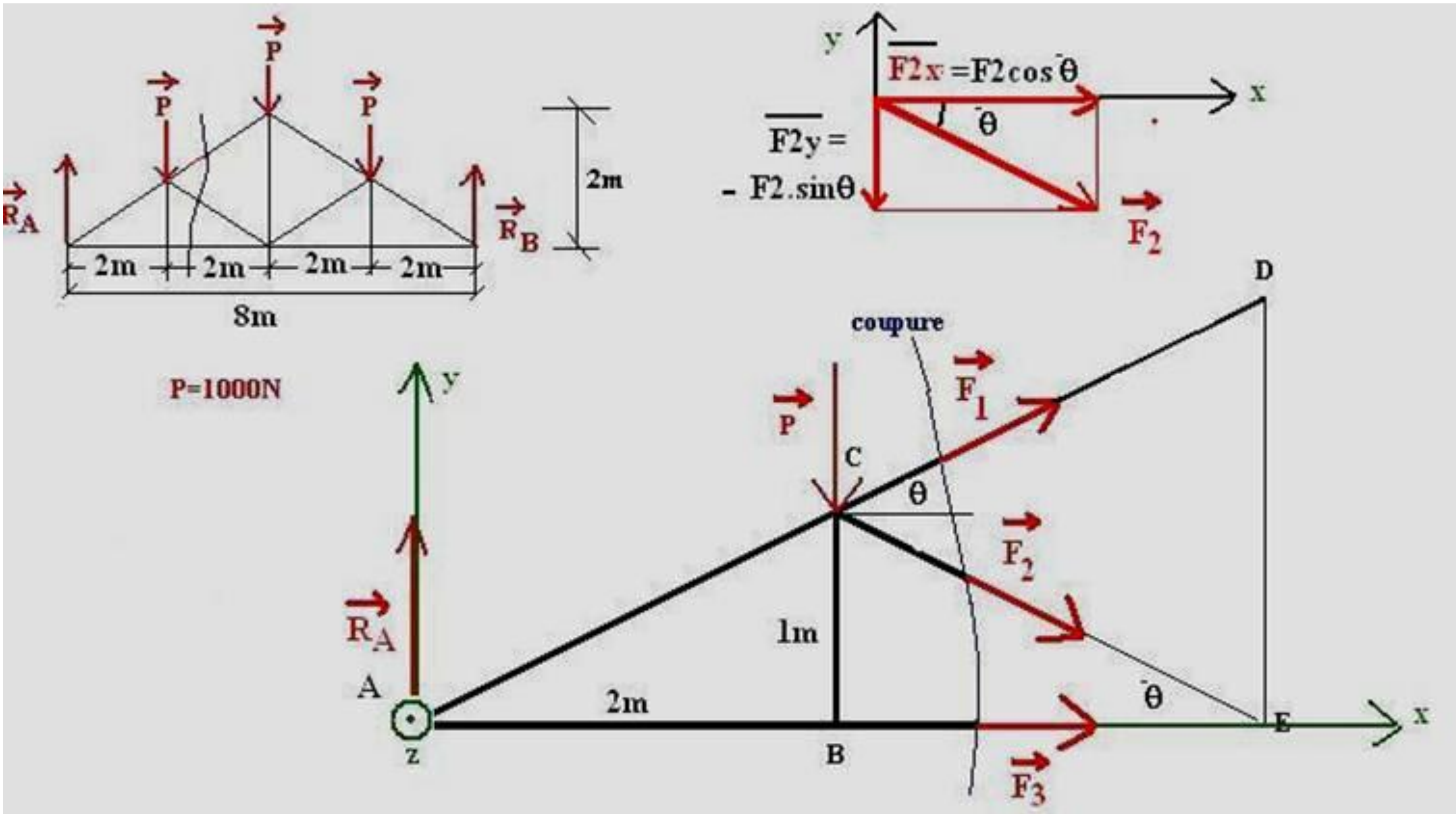
Elle consiste à effectuer une coupure fictive de la structure treillis à étudier à travers les barres dont on veut connaître les efforts internes de traction ou de compression.

La coupure doit affecter 2 ou 3 barres (pas plus !) de la structure. Nous réalisons donc la coupure représentée sur le schéma ci-dessous.

La structure à gauche de la coupure est en équilibre sous l'action de toutes les forces extérieures y compris les forces inconnues **F_1**, **F_2** et **F3** appliquées par les barres sur les nœuds B et C. (Attention, les sens de ces forces indiqués sur le schéma ne sont pas forcément les sens réels .C'est le calcul qui déterminera le vrai sens).

Il suffit alors d'appliquer le PFS pour la partie gauche en choisissant bien le point par rapport auquel on calculera les moments des forces.

L'équation des moments par rapport à ce point ne doit comporter qu'une seule inconnue.



Système triangulé à étudier avec coupure

3- détermination de la force F_2 dans la barre CE:

Seule sa direction est connue, il reste à déterminer son intensité F_2 et son sens.

Le PFS permet d'écrire les deux relations (1) et (2):

$$(1)\ \overrightarrow{\Sigma Fext} = \vec{0}; \text{soit} : \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{P} + \overrightarrow{R_A} = \vec{0}$$

Cette première relation ne nous sera pas très utile dans un premier temps car elle fait intervenir 3 inconnues.

Il faudra déterminer une équation de moments qui fasse intervenir uniquement F_2 :

Les moments de $\mathbf{R}_A$, de $\mathbf{F_3}$ et de $\mathbf{F_1}$ par rapport à A sont nuls puisque les directions de ces forces passent par A.

C'est donc par rapport à ce point A qu'il faut évaluer les moments. Seules les forces $\mathbf{F_2}$ et $\mathbf{P}$ ont alors un moment non nul . L'équation de moments s'écrit-alors :

$$(2)\ \overrightarrow{\Sigma M_A}(\overrightarrow{Fext}) = \overrightarrow{M_A}(\vec{P}) + \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F_2}) = \vec{0}$$

Equation a une inconnue F_2.

3-a Calculons le moment en A de P :

Nous utilisons dans un premier temps la définition scalaire du moment :

|Moment de force| = intensité de la force x bras de levier =P x AB=2.1000=2000N.m

(grandeurs toutes positives)

Le signe de M_A(P) est ensuite déterminé en considérant l'effet de la force sur la structure:

La force **P** (de direction, sens et intensité connus) tend à faire tourner la structure autour de A dans le sens horaire (sens contraire du sens trigo), le moment est donc négatif.

$M_A(P)$= -2000N.m

3-b Moment en A de F_2 :

Hypothèse : le sens de la force n'est pas connu. Cependant il faut bien faire le choix d'un sens pour résoudre le problème. Nous considérons la force F_2 inclinée et orientée vers le bas comme l'indique le schéma. Ce n'est qu'une hypothèse qu'il faudra ensuite vérifier après calcul.

Deux solutions sont possibles pour calculer M_A :

1ère solution : $|M_A|$=Force F_2 x bras de levier de la force.

Pour obtenir le bras de levier il faut tracer la droite (D) perpendiculaire à la direction de la force passant par le point A. Soit H le point d'intersection de (D) avec la direction de la force.

$|M_A|=F_2.AH$. La valeur de AH doit être évaluée par le calcul.(ou graphiquement éventuellement)

Le signe de M_A est ici négatif puisque la force tend à faire tourner la structure autour de A dans le sens horaire (négatif).

2éme solution (que nous développons ci-dessous) :

Décomposons la force F_2 en sa composante horizontale F_2x et sa composante verticale F_2y

Le moment de F_2 est la somme (algébrique) des moments de ses 2 composantes :

Moment en A de F_2=moment en A de F_2x + moment en A de F_2y.

Attention le signe de chaque terme dépend de l'effet de chaque composante sur la rotation autour de A

Calculons les valeurs absolues des projections de F_2 sur les deux axes Ax et Ay :

(Les valeurs absolues représentent les intensités des forces projetées sans se préoccuper de leur sens)

$F_2x = F_2.cosq$ et $F_2y = F_2.sinq$.

$$\boxed{\text{avec } \sin\theta = \frac{BC}{CE} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et } \cos\theta = \frac{BE}{CE} = \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

Préoccupons-nous maintenant du sens de ces forces donné sur le schéma afin d'évaluer le signe du moment

Avec l'hypothèse choisie sur le schéma F_2x et F_2y tendent à faire tourner la structure autour de A dans le sens inverse du sens trigo, leur moment respectif doit être négatif.
$M_A(F_2x)$=-BC. F_2x =-BC.F_2.cosq et $M_A(F_2y)$ = -AB . F_2y= -AB . F_2 .sinq. (avec BC=1m et AB=2m)
Finalement :

$$M_A(\overrightarrow{F_2}) = M_A(\overrightarrow{F_{2x}}) + M_A(\overrightarrow{F_{2y}}) = -1.F_2.\frac{2}{\sqrt{5}} - 2.F_2.\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-4F_2}{\sqrt{5}} = -1,79.F_2$$

3-c Ecrivons que le somme des moments en A est nulle (équation 2) ;

-2000 - 1.79.F_2=0 d'où **F_2**=-2000/1.79= **-1100N**

Si nous insérons la valeur numérique négative de F_2 dans l'expression $M_A(F_2)$=-1.79.F_2, le moment en A de F_2 devient positif .Le signe négatif devant F_2 contredit l'hypothèse sur le sens initial de la force. Le moment positif de **F_2** implique qu'elle tend à faire tourner la structure dans le sens trigonométrique. La force F_2 exercée par la barre CE pousse sur le nœud .La barre subit donc une compression de 1100N.

La méthode que nous venons d'utiliser fait intervenir la définition scalaire du moment d'une force. Elle est commode à utiliser tant que les sens des forces est connu d'avance. Il faut attribuer le signe du moment en fonction de son effet sur la rotation de la structure autour d'un point. Elle devient vite fastidieuse même pour l'exemple que nous venons de traiter !

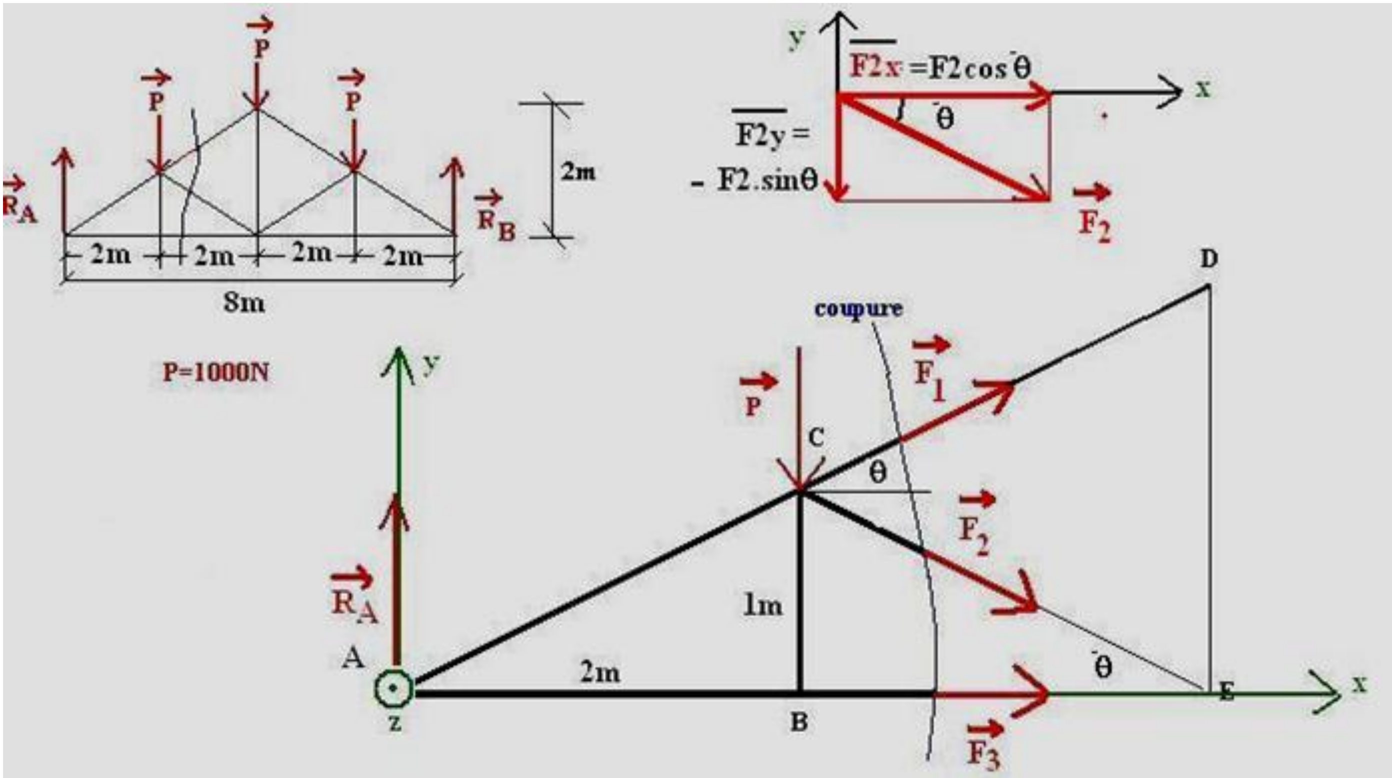
Nous avons effectué ci-dessous le même calcul en considérant la définition vectorielle du moment d'une force (voir annexe 1). Cette nouvelle méthode présente l'avantage de permettre la résolution de problèmes plus complexes sans risque d'erreur et satisfait l'utilisateur en général qui la trouve plus rigoureuse.

Seule condition préalable pour l'utiliser: bien connaître la définition mathématique du produit vectoriel et les règles de calcul le concernant. (Ce qui n'est pas un handicap)

Elle suppose le repérage de la structure dans un repère cartésien Axyz soigneusement choisi pour rendre les calculs aussi simples que possible. Dans le cas traité ici, les forces et les bras de levier appartiennent au plan de la structure. Les vecteurs moments sont donc tous orthogonaux à ce plan (donc orienté suivant z ou –z).

Attention, il faut considérer les valeurs algébriques des projections des forces et tenir compte du signe des coordonnées des points pour évaluer la valeur du bras de levier de la force.

Nous reprenons le même dessin que précédemment :



Annexe 1 : méthode de calcul faisant intervenir la définition vectorielle du moment d'une force :

- Vecteur moment en A du vecteur force $\vec{P}$:

$\vec{M}_A(\vec{P}) = \vec{AC} \wedge \vec{P}$ — $\vec{P}$ est entièrement définie (sens, direction, intensité)

Il faut exprimer chaque vecteur dans le repère cartésien $Axyz$

L'axe Ax porte le vecteur unitaire $\vec{i}$
L'axe Ay " " " " $\vec{j}$ avec $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$
L'axe Az " " " " $\vec{k}$ $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$

$$\vec{M}_A(\vec{P}) = [(x_c - \underbrace{\cancel{x_A}}_{=0})\vec{i} + (y_c - \underbrace{\cancel{y_A}}_{=0})\vec{j}] \wedge [-P.\vec{j}]$$

$$\vec{M}_A(\vec{P}) = (x_C . \vec{i}) \wedge (-P.\vec{j}) = -2P(\vec{i} \wedge \vec{j}) = -2P\vec{k}$$

$$\vec{M}_A(\vec{P}) = -2000\vec{k} \; (N \times m)$$

Le vecteur $M_A(\vec{P})$ est donc orienté dans le sens des $z<0$, ce qui signifie que $\vec{P}$ tend à faire tourner la structure ds le sens horaire.

- Vecteur moment en A du vecteur force $\vec{F_2}$:

Seule la direction de la force est connue, c'est celle de la barre CD
Le sens est pris arbitrairement vers le bas. Ce choix détermine le signe des composantes
La force $\vec{F_2}$ possède 2 composantes : $F_{2x} = F_2 \cos\theta$ et $F_{2y} = -F_2 \sin\theta$

$$\vec{M}_A(\vec{F_2}) = \vec{AC} \wedge \vec{F_2} = [x_c\vec{i} + y_c\vec{j}] \wedge [F_2\cos\theta\,\vec{i} - F_2\sin\theta\,\vec{j}]$$

$$= -x_c.F_2.\sin\theta\,(\vec{i} \wedge \vec{j}) + y_c.F_2.\cos\theta\,(\vec{j} \wedge \vec{i})$$

$$= (-x_c F_2.\sin\theta - y_c.F_2.\cos\theta)\,\vec{k} \quad ; \quad x_c = +2m \quad y_c = +1m$$

$$= \left[-2F_2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} - 1.F_2.\frac{2}{\sqrt{5}}\right]\vec{k} = -\frac{4F_2}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

- Le signe de F_2 et sa valeur seront connus après utilisation de la relation (2)

$$\vec{M}_A(\vec{P}) + \vec{M}_A(\vec{F_2}) = \vec{0} \quad (2) \; ; \text{ équation à 1 inconnue } F_2$$

$$\left[-2000 - \frac{4F_2}{\sqrt{5}}\right]\vec{k} = \vec{0} \Leftrightarrow F_2 = \frac{-2000 \times \sqrt{5}}{4} \simeq -1100\,N$$

Ceci implique donc que $\vec{M}_A(\vec{F_2}) = \frac{-4 \times (1100)}{\sqrt{5}} > 0$

La force $\vec{F_2}$ est donc orientée vers le point C et la barre est comprimée

4- déterminons la force F_1 dans la barre CD:

On effectue d'abord le calcul en utilisant la définition scalaire des moments.

Choix du point par rapport auquel le calcul des moments est effectué: le point B

Equation des moments en B :

$$(2') \ \Sigma \overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{Fext}) = \overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{F_2}) + \overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_A}) = \vec{0}$$

Les moments de **P** et et de **F_3** par rapport à B sont nuls puisque les lignes d'action de ces forces passent par B.

F2 a été calculée, R_A est connue, il reste donc 1 inconnue F_1 à déterminer.

Nous conservons l'hypothèse sur le sens des forces **F_1** et **F_2** comme l'indique le schéma ci-dessus.

Nous avons montré qu'avec cette hypothèse le calcul donne : F_2=-1100N

4-1 Moment en B de F_2 :

F_2 est la somme vectorielle de F_2x et de F_2y

$M_B(F_2x)$=-BC x F_2x =-BCxF_2.cosq (- car la force F_2x orientée vers la droite tend à faire tourner la structure autour de B dans le sens horaire). Finalement :

$$M_B(\overrightarrow{F_2x}) = -(1).(-1100).(\frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{2200}{\sqrt{5}} = 984\text{N.m}$$

$M_B(F_2y)$=0 (car la ligne d'action de cette force passe par B)

$M_B(F_2)$= $M_B(F_2x)$+ $M_B(F_2y)$=984N.m

4-2 Moment en B de R_A:

$M_B(R_A)$=-R_A x AB=-1500.2=-3000N.m (-car R_A tend à faire tourner la structure dans le sens horaire)

4-3 Moment en B de F_1 :

F_1 est la somme vectorielle de F_1x et de F_1y

Or,

$M_B(F_{1x})$=-BCxF_1x= -BC. F_1.cosq.

$M_B(F_1y)$=0 (la ligne d'action de la composante verticale de F_1 passe par B)

$M_B(F_1)= M_B(F_{1x})+ M_B(F_{1y})=-BC.F_1.cosq$.

Ce qui donne numériquement:

$$M_B(F_1) = -(1).(F_1).(\frac{2}{\sqrt{5}}) = -\frac{2F_1}{\sqrt{5}} = -0.894F_1$$

4-4 Reprenons l'équation des moments (2') :

$-0.894.F_1-3000+984=0$ soit $F_1=-2250N$ (la force F_1 a donc le sens contraire du dessin)

La force $\mathbf{F_1}$ pousse le nœud C, par conséquent la barre CD subit une compression de 2250N.

Voir en annexe ci-dessous le calcul de F_1 avec la méthode vectorielle.

Annexe 2 : méthode faisant intervenir la définition vectorielle de $\vec{M}$

a) vecteur moment en B de $\vec{F_1}$:

$$\vec{M}_B(\vec{F_1}) = \vec{BC}\wedge\vec{F_1} = 1.\vec{j}\wedge(F_1\cos\theta\,\vec{i} + F_1\sin\theta\,\vec{j}) = F_1\cos\theta(\vec{j}\wedge\vec{i})$$
$$= -(F_1\times\frac{2}{\sqrt{5}})\vec{k}$$

b) vecteur moment en B de $\vec{F_2}$:

$$\vec{M}_B(\vec{F_2}) = \vec{BC}\wedge\vec{F_2} = 1.\vec{j}\wedge(F_2\cos\theta\,\vec{i} - F_2\sin\theta\,\vec{j}) = -(F_2\cos\theta)\vec{k} = (+\frac{1100\times2}{\sqrt{5}})\vec{k}$$

c) vecteur moment en B de $\vec{R_A}$:

$$\vec{M}_B(\vec{R_A}) = \vec{BA}\wedge\vec{R_A} = -2\vec{i}\wedge1500\vec{j} = -3000\vec{k}$$

d) écrivons que la somme des moments en B est nulle :

$$(-F_1\times\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1100\times2}{\sqrt{5}} - 3000)\vec{k} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow F_1 = \left[-3000 + \frac{1100\times2}{\sqrt{5}}\right]\times\frac{\sqrt{5}}{2} = -2250\,N$$

5- déterminons la force F_3 dans la barre BE:

Cette fois il est possible d'utiliser la relation (1) puisque la seule inconnue est F_3.

$$(1)\ \Sigma\overrightarrow{Fext}=\vec{0};\text{soit}: \vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{P}+\vec{R_A}=\vec{0}$$

la force F_3 étant horizontale, projetons la relation (1) sur l'axe Ax, il vient :

F_1 cosq +F_2.cosq +F_3=0 soit numériquement :

$$-2250\times\frac{2}{\sqrt{5}}-1100\times\frac{2}{\sqrt{5}}+F_3=0\Rightarrow F_3=\frac{2}{\sqrt{5}}(2250+1100)=+3000N$$

F_3 a le sens indiqué sur le schéma, cette force exercée par la barre BE tire sur le nœud, la barre est donc tendue.

Voilà un calcul qui a nécessité une bonne dose de volonté pour aboutir ! Nous encourageons le lecteur à persévérer en réalisant d'autres exemples, seule façon de se familiariser avec les méthodes proposées.

PB mars 2013