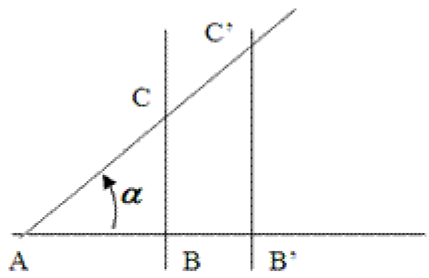
# TRIGONOMÉTRIE

## I - RAPPEL ET DÉFINITIONS :

Figure :

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$$
$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

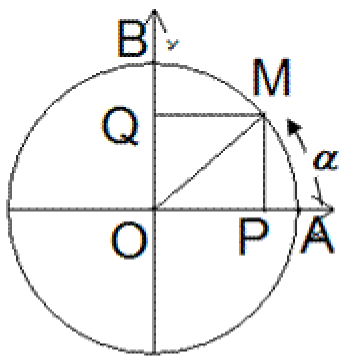



### 1. Cercle trigonométrique :

Une unité de longueur étant choisie, on appelle cercle trigonométrique un cercle centré en un point 0, de rayon 1, et sur lequel on a choisi un point A comme origine pour la mesure des arcs, On lui associe le repère $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ avec $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ orienté dans le sens direct.

On prend l'axe (OA) comme origine de la mesure des angles.

Figure :




### 2. Mesure d'arcs – Mesure d'angles :

Prenons un point M du cercle trigonométrique.

$\overset{\frown}{AM}$ Désigne un arc orienté.

Le radian est l'arc dont la longueur est égale au rayon.

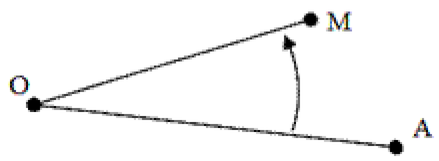
Un angle de 1 radian est un angle au centre qui intercepte un arc de 1 radian.

La mesure l de la longueur d'un arc est donnée par $l = R\alpha$ où R est le rayon et $\alpha$ la mesure en radian de l'angle correspondant.

### 3. Angles de deux vecteurs

$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$ Désigne un angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$

Figure :

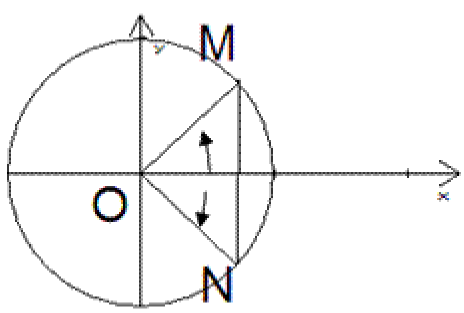



C'est aussi l'angle des deux demi-droites de même origine O.

### 4. Quelques propriétés des angles orientés :

- Deux angles orientés $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{ON})$ sont dits opposés si M et N sont symétriques par rapport à la droite (OA)

Figure :




- Relation de Chasles :

Soient $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ deux vecteurs.

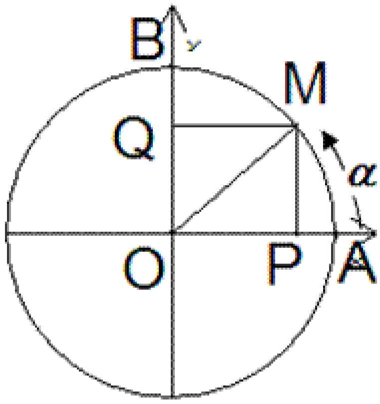
Quel que soit $\overrightarrow{W}$

$$(\vec{u}; \vec{w}) + (\vec{w}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$$

### 5. Fonctions circulaires :

On considère l'application $\phi$ qui, à tout angle $\alpha$, fait correspondre le point M(x ; y) du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = \alpha$

Figure :




On a alors

$\varphi(\alpha) = M \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = \alpha$

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OM} = OP = x$$
$$\sin\alpha = \frac{PM}{OM} = PM = OQ = y$$

$$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}$$
$$\tan\alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{AR}{OA} = AR$$
$$\varphi(\alpha + 2\pi) = M$$
$$\varphi(\alpha + 2k\pi) = M$$
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle OPM, on a

$OM^2=OP^2+PM^2$

$1 = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2$ ou $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

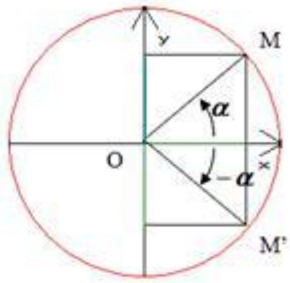
et

## 6. Angles associés :

### i. Angles opposés :

Deux angles $\alpha$ et \(\alpha \'sont opposés si leurs images M et M' par $\phi$ sont symétriques par rapport à l'axe (OA) (on écrit $\alpha$ = - $\alpha$ ')

Figure :




On a

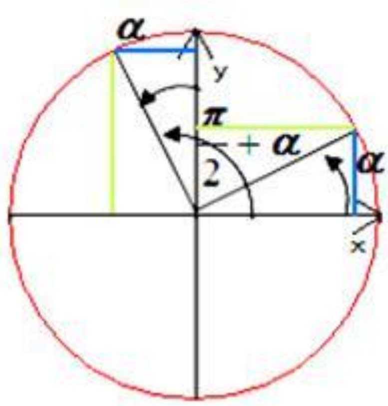
$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \sin \alpha' &= \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \tan \alpha &= \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \end{aligned}$$

### ii. Angles supplémentaires :

$\alpha$ et $\alpha$ ' sont supplémentaires si $\alpha$ + $\alpha$ ' = $\pi$ , donc si $\alpha$ ' = $\pi$ - $\alpha$

Figure :

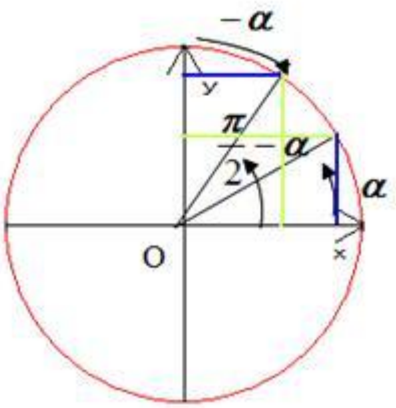
$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \sin \alpha' &= \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \tan \alpha' &= \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \end{aligned}$$



### iii. Angles complémentaires :

$\alpha$ et $\alpha'$ sont complémentaires, si $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$ , donc si $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Figure :




$$\cos\alpha' = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin\alpha' = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan\alpha' = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\mathrm{an}\alpha$$

### iv. Angles dont la différence est $\pi$

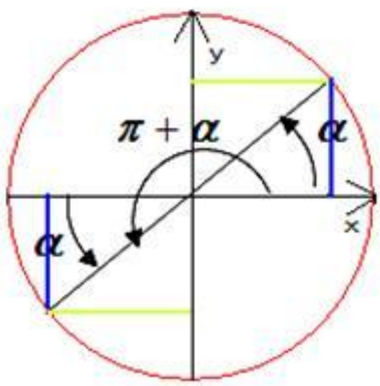
C'est-à-dire $\alpha$ - $\alpha' = \pi$ ou $\alpha' = \pi + \alpha$

Figure :

$$\cos\alpha' = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin\alpha' = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\tan\alpha' = \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

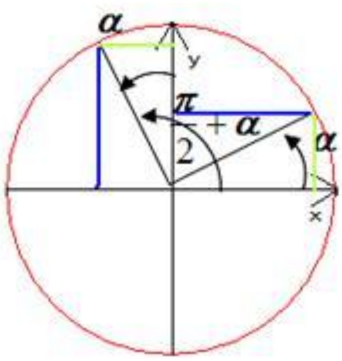


### v. Angles dont la différence est $\frac{\pi}{2}$

C'est-à-dire $\alpha - \alpha' = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha' = \frac{\pi}{2} + \alpha$

Figure :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\alpha' = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha \\ \sin\alpha' = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha \\ \tan\alpha' = \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\tan\alpha} \end{array}}$$




## 7. ANGLES REMARQUABLES :

| $\alpha$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\ \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| $\tan\ \alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |