II- FORMULES DE TRANSFORMATION :

1. Formules d'addition :

Rappel : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u};\vec{v})$$

Et si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$

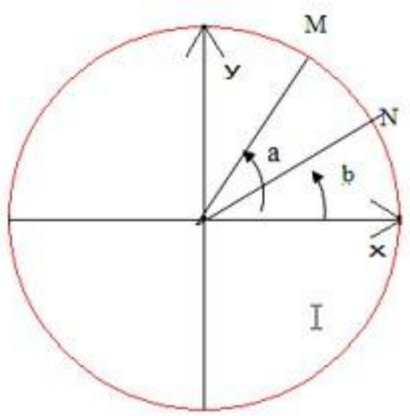
Soit M un point du cercle trigonométrique tel que:

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = a$$
$$M(\cos a, \sin a)$$
$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$$

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = a$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}) = b$

Figure :

$$M(\cos a, \sin a)$$
$$N(\cos b, \sin b)$$
$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$$



$$a - b = (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$$

D'une part, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\|\|\overrightarrow{ON}\|\cos(a-b)$ (1)

D'autre part, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (2)

Comme $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = 1$,

(1) et (2) donnent $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

On a donc:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos[a-(-b)]$$
$$= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$$

D'où

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Puisque $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

On a:

$$\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = \cos[(\frac{\pi}{2} - a) - b] = \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin b$$
$$= \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (\text{car } \sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a)$$

$$\mathbf{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

$$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Calcul de tan (a+b):

On suppose que $\cos(a+b) \neq 0$ et $\cos a.\cos b \neq 0$

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Comme $\cos a.\cos b \neq 0$

$$\tan(a-b) = \tan[a+(-b)] = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \tan(-b)}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \tan[a+(-b)] = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \tan(-b)}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2. Formules de duplication :

$\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

- $\sin 2a = \sin(a + a) = 2 \sin a \cos a$

- $\tan 2a = \tan(a + a) = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ D'où $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Alors $\cos 2a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a$

- $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$

$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

- $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$

Expression de cos2a et de sin2a en fonction de tan a :

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = \dfrac{2 \sin a \cos a}{1} = \dfrac{2 \sin a \cos a}{\cos^2 a + \sin^2 a}$

En supposant que $\cos a \neq 0$

- $\sin 2a = \dfrac{\dfrac{2 \sin a \cos a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a}}$

$\sin 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a}}$

$\cos 2a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$

- $\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Comme $\sin 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$ alors $\sin a = \dfrac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$ et si on pose $t = \tan \dfrac{a}{2}$

- $\sin a = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

Comme $\cos 2a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$ alors $\cos a = \dfrac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$

- $\cos a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

- $\tan a = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

Remarque :

$$\tan^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1 = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

3. Formules de transformation d'un produit en somme :

On rappelle que :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad (1)$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad (2)$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad (3)$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad (4)$$

(1) + (2) donne $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$

(2) − (1) donne $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$

(3) + (4) $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$

(3) − (4) $\sin(a+b) - \sin(A-b) = 2\sin b \cos a$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin b \cos a = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

4. Formules de transformation d'une somme en produit :

Posons $p = a + b$ et $q = a - b$

On a $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$

(1) et (2) s'ecrit $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

(2) − (1) $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

(3) + (4) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

(3) − (4) $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$