III. ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES :

On rappelle que $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ quels que soient $x \in R$ et $k \in Z$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$
$$\tan(x+\pi) = \tan x$$
$$\tan(x+k\pi) = \tan x \quad \text{quel que soit } k \in Z$$

1. Equation cosx = a, $a \in R$

- Si $|a| > 1$, équation n'admet aucune solution

- Si $|a| \leq 1$, on a une infinité de solution. En effet si α est solution, (c'est-à-dire $\cos\alpha = a$), $-\alpha$ est aussi solution (car $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = a$)

Et comme $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha = a$ quel que soit $k \in Z$, $\alpha + 2k\pi$ est aussi solution, de même que $-\alpha + 2k\pi$

En admettant que ce sont les seules solutions, on a

Théorème :

$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$ $(k \in Z)$

Cas général :

$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 2k\pi$ ou $f(x) = -g(x) + 2k\pi$ $(k \in Z)$

Exemple :

- résoudre 2cosx-1=0

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ,\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\} \quad (k,k' \in Z)}$$

- $\cos^2(2x + \frac{\pi}{3}) + 2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 3 = 0$

Posons $X = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

$$X^2 + 2X - 3 = 0$$

$$(X - 1)(X + 3) = 0$$

$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 1 \quad \text{ou } \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -3$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$\cos(2k + \frac{\pi}{3}) = -3$ n'a pas de solution

$$\boxed{S = \left\{k\pi - \frac{\pi}{6} \ ,\ k \in Z\right\}}$$

2. Equation sinx = a :

- Si $|a| > 1$ pas de solution

- Si $|a| \leq 1$ on a une infinité de solution

Si α est solution

Comme $(\pi - \alpha) = \sin\alpha\ ,\ \pi - \alpha$ est aussi solution, donc $\pi - \alpha + 2k\pi \ (k \in Z)$ aussi

En admettant que ce sont les seules solutions on a :

Théorème :

$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$

Plus généralement

$\sin f(x) = \sin g(x) = f(x) = g(x) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi \quad (k \in Z)$

Exemple:

- Résoudre $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$
- $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

○ $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

$$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4})$$

$$(1)\quad \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi$$

$$x = \frac{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi + \pi$$

$$x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi + \pi$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3},\ \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \ (k \in Z)\right\}}$$

- $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

  Posons $X = \sin x$

  $2X^2 - 5X + 2 = 0$

  $\Delta = 25 - 16 = 9$

  $X' = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2} \qquad X'' = \dfrac{8}{4} = 2$

  $\sin x = \dfrac{1}{2} \quad ou \quad \sin x = 2$

  $\sin x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou \ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

  $\sin x = 2$ *n'a pas de solution*

  $$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in Z)\right\}}$$

3. Equation acosx+ bsinx=c

Posons $S = a\cos x + b\sin x \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$

$$S = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

$$\text{or}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Le point $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \ , \ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ appartient au cercle trigonométrique

Soit $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Théorème :

Si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe un réel φ tel que $\cos\varphi = \alpha \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \beta$

$$S = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$$

$$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta) = c \Leftrightarrow \cos(x-\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemple

Résoudre $\cos x - \sin x = 1$

$a = 1 \quad b = -1$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{1^2 + (-1)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right] = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right]$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \pi - \frac{\pi}{4} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4} + x)$$

$$\sqrt{2}\sin(x - \frac{3\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad x + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = 2k\pi$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;,\; 2k\pi \;,\; k \;,\; (k \in Z)\right\}}$$

4. Equation tanx = a

Théorème :

Quel que soit le réel a, l'équation $\tan x = a$ admet toujours une infinité de solution.

Si α est solution, $\alpha + k\pi$ est aussi solution, quel que soit $k \in Z$

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$$

Exemple :

$$\tan x - 1 = 0$$

$$\tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi \;,\; k \in Z}$$

5. Images des solutions d'une équation :

L'image d'une solution α d'une équation est le point M du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = \alpha$

Si les solutions sont de la forme $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n} \quad , \; n \geq 3$ les images des solutions forment un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Si n = 3, on a un triangle équilatéral

Si n = 4, on a un carré,

Si n = 5 , on a un pentagone régulier

…..

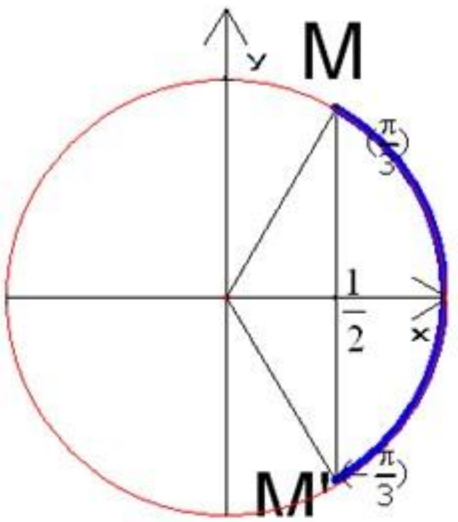
si n = 1, on un seul point

si n = 2, on a deux points symétriques par rapport à l'origine du repère

6. Exemples d'inéquation trigonométrique :

Exemples :

- résoudre 2cosx - 1 > 0



$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$\cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ L'image de x appartient à l'arc (orienté) MM'

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in Z} \left] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;,\; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right[}$$

- *Résoudre* $2\sin x - \sqrt{3} < 0$

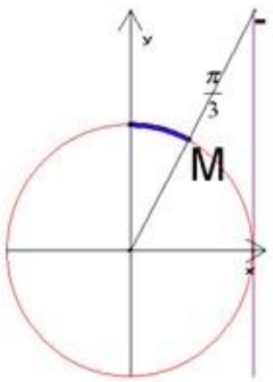
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

L'image de x appartient à l'arc (orienté) MM'

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in Z} \left] \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;,\; \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \right[}$$

- $\tan x > \sqrt{3}$

$\tan x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3}$



$$\boxed{S = \bigcup_{k\in Z} \left] \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;,\; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[}$$