MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SECRETATRIAT GENERAL
DIRESTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
DIRESTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PUBLIC et PRIVE
Service d'Appui au Baccalauréat

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2001

C

Série	**: C**	**Epreuve de** :	MATHEMATIQUES
		Durée :	4 heures
Code Matière	**: 009**	**Coefficient** :	5

NB : Les DEUX Exercices et le Problème sont obligatoires

\- - - - - - - - - - - - - -

Exercice – 1 (04 points)

Dans le plan orienté ($\mathcal{P}$), on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que AB = AC et mes $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{2}$.

1. Dans cette question, le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   a. Déterminer les affixes respectives z_A, z_B, z_C des points A, B, C. **(0,25 pt)**
   b. Soit T la transformation ponctuelle du plan ($\mathcal{P}$) vers ($\mathcal{P}$) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = -z + 2i$.
   Caractériser géométriquement T. **(0,25 pt)**
   c. Donner l'expression complexe de la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. **(0,25 pt)**
   d. On pose $f = T \circ R$. Donner l'expression complexe de f. **(0,25 pt)**
   En déduire la nature et les éléments géométriques de f. **(0,25 pt)**
   e. On note I le centre de f ; donner la nature du quadrilatère ABIC. Justifier votre réponse. **(0,25 pt)**

   Dans toute la suite, on utilisera une méthode géométrique. On pose AB = AC = a où $a \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Soit S la similitude plane directe de centre I qui transforme A en B. On note C' = S(C) ; O' = S(O) où O est le milieu du segment [BC].
   a. Donner le rapport et l'angle de S. **(0,50 pt)**
   b. Montrer que $C' \in [IA]$. **(0,25 pt)**
   c. Donner l'image par S du segment [IA] et montrer que O' est le milieu du segment [IB]. **(0,75 pt)**
3. On considère le système de points pondérés {(A ; – 1), (B ; 1), (C ; 1)}.
   a. Quel est le barycentre G de ce système ? **(0,25 pt)**
   b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2$. **(0,75 pt)**

Exercice – 2 (04 points)

1. On considère deux dés cubiques parfaitement équilibrés D_1 et D_2 tels que :
   – D_1 porte sur ses six faces les chiffres 1, 1, 2, 3, 3, 4.
   – D_2 porte sur ses six faces les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

   On lance simultanément ces deux dés. On note **a** le chiffre lu sur D_1 et **b** le chiffre lu sur D_2.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « obtenir un couple (a, b) tel que a = b » **(0,50 pt)**
   B : « obtenir un couple (a, b) de nombres impairs ». **(0,50 pt)**
2. On prend le dé D_2 dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.
   On lance une fois ce dé. A chaque entier n obtenu ($1 \leq n \leq 6$), on associe le couple d'entiers (a, b) tels que $a = 5n + 3$ et $b = 3n + 1$.
   a. Pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donner le couple (a, b) correspondant ainsi que leur plus grand commun diviseur d (d = PGCD (a, b)). **(1,00 pt)**

b. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
C : « a et b sont des nombres premiers » **(0,50 pt)**
D : « a et b sont premiers entre eux ». **(0,50 pt)**

3. Résoudre l'équation $13x - 7y = 11$, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. **(1,00 pt)**

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n e^{-x}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_0(x) = e^{-x}$.
On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

PARTIE A. Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand $x \to +\infty$. **(0,25 pt)**
2. Dans toute la suite de cette question, on distinguera les cas n pair et n impair.
   a. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand $x \to -\infty$. **(0,50 pt)**
   b. Calculer $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n. **(2,00 pts)**
   c. Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. **(0,50 pt)**
   En déduire les positions relatives de $(\mathcal{C}_{n+1})$ et $(\mathcal{C}_n)$. **(0,50 pt)**
3. Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par deux points fixes indépendants de n dont on précisera les coordonnées. **(0,50 pt)**

PARTIE B.

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.
   a. Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^2e^{-x}$ est solution de (E). **(0,50 pt)**
   b. Montrer qu'une fonction numérique f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation (E') : $y'' + 2y' + y = 0$. **(0,25 pt)**
   c. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E). **(0,75 pt)**
   d. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$ et exprimer f en fonction de f_0, f_1 et f_2. **(0,75 pt)**
2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$.
   a. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **(1,00 pt)**
   b. Construire la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Unités $\|\vec{i}\| = 1$ cm ; $\|\vec{j}\| = 5$ cm. **(0,50 pt)**
   On donne : $e^{-1} \approx 0{,}37$; $e^{-2} \approx 0{,}13$.

PARTIE C.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $I_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$ (On rappelle que $0! = 1$).

1. a. Calculer $I_0(x)$, $I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x. **(0,75 pt)**
   b. Utiliser la question B 1.d. pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe (x'Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. **(0,50 pt)**
2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$. **(0,50 pt)**
   b. En déduire $I_n(x)$ en fonction de n et x. **(0,50 pt)**
   c. Pour n fixé, calculer la limite de $I_n(x)$ quand $x \to +\infty$. **(0,25 pt)**
3. a. On prend $x = 1$, démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \le I_n(1) \le \dfrac{1}{(n+1)!}$. **(0,50 pt)**
   b. En déduire la limite de $I_n(1)$ quand $n \to +\infty$. **(0,25 pt)**
   c. Déduire de la question 2. b. l'expression de $I_n(1)$ en fonction de n. **(0,25 pt)**
   d. Utiliser les résultats précédents pour montrer que : $e = \lim\limits_{n \to +\infty}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right]$. **(0,50 pt)**