MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SECRETARIAT GENERAL
DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
PUBLIC et PRIVE
Service d'Appui au Baccalauréat

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2018

C

Série : C
Code matière : 009

Epreuve de : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

NB : - L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.
- L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires.

EXERCICE *(4 points)*

I- Arithmétique

1) Soit l'entier naturel $A = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ avec $n \geq 1$.
   a) Montrer $20 \times A$ est divisible par 17. **(0,5 pt)**
   b) En déduire que A est divisible par 17. **(0,25 pt)**

2) Un entier naturel B s'écrit $\overline{3122}$ en base 4 et $\overline{431}$ en base n. Déterminer l'entier naturel n. **(0,5 pt)**

3) Calculer les entiers naturels non nuls a et b vérifiant :
$$a^2 - b^2 = 2\,916 \quad \text{et} \quad PGCD\,(a;b) = 18.$$ **(0,75 pt)**

II- Probabilité

Une urne contient $2n$ jetons rouges et $(n+3)$ jetons noirs, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On tire au hasard successivement et sans remise trois jetons de l'urne
   a) Exprimer en fonction de n la probabilité P(A) de l'événement
A : " On obtient un jeton rouge au premier tirage ". **(0,75pt)**
   b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A)$ **(0,25pt)**

2) On tire au hasard successivement et avec remise trois jetons de l'urne .
   a) Exprimer en fonction de n la probabilité P(B) de l'événement
B : " On obtient un jeton noir au premier tirage ". **(0,75pt)**
   b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(B)$. **(0,25pt)**

PROBLEME 1 *(7 points)*

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on considère le triangle ABC rectangle en A tel que BC = 2AB = 4cm et mes $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point B et transforme le point A en C.

I – 1) Construire en vraie grandeur le triangle ABC . **(0,25pt)**

2) a) Soit G le barycentre du système $\{(A,-1),(B,1),(C,1)\}$. Placer le point G. **(0,5 pt)**
   b) Déterminer puis construire l'ensemble $(E_1) = \{M \in \mathcal{P} / -MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4\}$ **(0,5pt+0,25pt)**
   c) Démontrer que, pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant dont on précisera son expression en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. **(0,5pt)**
   d) Déterminer puis construire l'ensemble
$$(E_2) = \{M \in \mathcal{P} / (-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0\}.$$ **(0,5 pt + 0,25 pt)**

II – 1) Déterminer le rapport et l'angle de S. **(0,5 pt)**

2) Soient M le point du demi-cercle de diamètre [BC] ne contenant pas A et M′ le point tel que BM′=2BM et que C, M et M′ soient alignés dans cet ordre.
   a) Placer les points M et M′. **(0,25 pt)**
   b) Montrer que S (M) = M′. **(0,5 pt)**

III – Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

1) a) Donner les affixes des points B, C et G. **(0,75 pt)**
   b) Déterminer l'expression complexe de S. **(0,5 pt)**
   c) En déduire les éléments caractéristiques de S. **(0,5 pt)**

/....

2) Soit T la transformation du plan définie par son expression complexe

$z' = (-1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 2 - 2i\sqrt{3}.$

a) Quelle est la nature de T ? **(0,25 pt)**

b) Déterminer les éléments caractéristiques de T. **(1 pt)**

PROBLEME 2 ***(9 points)***

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln(x+1)} & \text{si } x \in]0;+\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

Partie A

1- Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

a) Etudier la variation de g. **(0,5 pt)**

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x > 0$. **(0,25 pt)**

2- Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

a) Etudier la variation de h. **(0,5 pt)**

b) En déduire le signe de $h(x)$ pour tout $x \geq 0$. **(0,25 pt)**

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2} \geq 0$. **(0,5 pt)**

d) En déduire que pour tout $x > 0$, $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\ln(x+1) - x}{x^2} \leq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3}$. **(0,5 pt)**

e) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\dfrac{\ln(x+1)}{x} - 1}{x}$. **(0,25 pt)**

Partie B :

1) Soit φ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

Montrer que les deux fonctions f et φ sont continues à droite en 0. **(0,75 pt)**

2) a) Exprimer $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ en fonction de x, $\varphi(x)$ et $\varphi(0)$. **(0,25 pt)**

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$. Que peut-on dire de f ? **(0,75 pt)**

3) Calculer la limite de f en $+\infty$. **(0,5 pt)**

4) a) Donner une relation entre $f'(x)$ et $g(x)$ pour tout $x > 0$, où f' est la fonction dérivée de f. **(0,5 pt)**

b) Dresser le tableau de variation de f. **(0,5 pt)**

5) a) Etudier la branche infinie de la courbe ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$. **(0,25 pt)**

b) Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) en précisant la demi-tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$ **(1,25 pt)**

Partie C :

1) Démontrer que, pour tout réel $t \in [0\,;1]$, on a $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$. **(0,5 pt)**

2) En déduire que, pour tout $x \in [0\,;1]$, on a : $1 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{2-x}$ **(0,5 pt)**

3) Montrer alors que $1 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 2\ln 2$. **(0,5 pt)**

⊕⊕⊕⊕⊕⊕⊕⊕⊕⊕⊕⊕