Exercice 1

Le plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$. Soit f l'application de P dans P qui à tout point M(x ;y) associe le point M'(x' ;y') tels que :

$$\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x+2 \end{cases}$$

1°) Montrer que f est une isométrie affine. f est-elle un déplacement ? un antidéplacement ?
2°) Démontrer que l'ensemble des points I milieu des segments [MM'] est une droite D.
3°) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S par rapport à D.
4°) Déterminer t tel que f = $S \circ t$.

Exercice 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$. Soit f l'application définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x+\sqrt{3}y-\sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}x+y+\sqrt{3} \end{cases}$$

1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2°) Mettre sous la forme : z' = az + b ; (z = x + iy et z' = x' + iy' ; a et b sont des nombres complexes).

Exercice 3

A-/ Soit E l'espace orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$.
On considère l'application f de E dans E qui à tout point M(x ;y ;z) associe le point M'(x';y';z') définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(3x+y+\sqrt{6}z) \\ y' = \frac{1}{4}(x+3y-\sqrt{6}z) \\ z' = \frac{1}{4}(-\sqrt{6}x+\sqrt{6}y+2z) \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie ;
2) Chercher l'ensemble des points invariants. En déduire que f est une rotation.
3) Déterminer l'angle de f.

B-/ Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport au plan (P) d'équation : 2x – y – z – 4 = 0.

Exercice 4

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ on donne la droite (D) d'équation : y = – $\sqrt{3}$x + 2.

1) Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_D$ d'axe (D).

2) Soit S la similitude de centre A(0 ;2), d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\sqrt{3}$.

   a) Soit M le point d'affixe z = x + iy tel que S(M) = M' d'affixe z' = x' + iy'. Exprimer z' en fonction de z. Quelle est alors la nature de S ?

   b) En déduire l'expression analytique de S dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$.

3) Soit T l'application affine définie par : T = $S_o\mathcal{S}_D$.

   a) Montrer que l'application affine T a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{3}{2}y + 3 \\ y' = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} + 2 \end{cases}$$

   b) A-t-on $S_o\mathcal{S}_D = \mathcal{S}_{Do}S$?

4) Montrer que T = $S_{Do}h_{(A,\sqrt{3})} = h_{(A,\sqrt{3})o}S_{D'}$ où $S_{D'}$ est la symétrie orthogonale d'axe (D') à déterminer et $h_{(A,\sqrt{3})}$ l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$. On vérifiera que le point A appartient à D.

5) a) Donner la nature de T tout en précisant ses éléments caractéristiques.

   b) Montrer que T est bijective et définir T^{-1}.

Exercice 5

L'espace orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. On considère l'application f définie par :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ z' = z \end{cases}$$

1) Montrer que f est une rotation ; préciser son axe et son angle

2) On donne les quatre points A(2 ;0 ;0) ;B(–1;$\sqrt{3}$;0) ;C(–1;– $\sqrt{3}$;0) ;D(0;0; 0).

Soit $\mathcal{F}$ ={ A, B, C, D}.

   a) Montrer que $\mathcal{F}$ est globalement invariant par f ;

   b) Vérifier que ABC est un triangle équilatéral de centre O.

3) Soit g une isométrie qui laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant

   a)Déterminer l'isobarycentre G des points A, B ,C, D puis calculer GA, GB, GC, GD.

   b)En déduire que g laisse invariant G et D.

4) Quels sont : la nature et les éléments caractéristiques de l'application affine r du plan (ABC) dans lui-même telle que : r(A) = B ; r(B) = C ; r(C) =A ?
5) Sachant que r(A) = f(A), r(B) = f(B), r(C) = f(C), r(D) = f(D), préciser les éléments caractéristiques de r dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. Justifier alors les résultats obtenus.

Exercice 6

Dans l'espace E orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ on considère l'application f qui au point M(x ;y ;z) associe le point M'(x';y';z') définie par :

$$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = z-1 \\ z' = -y+3 \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie.
2) Montrer que f est un vissage dont on déterminera l'axe (D), l'angle et le vecteur.

Exercice7

A-/ Soit un espace E orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. On considère l'application f qui à tout point M(x ; y ; z) associe le point M'(x';y';z') de E tel que : $\begin{cases} x' = z \\ y' = x+1 \\ z' = y+2 \end{cases}$

Montrer que f est un vissage dont on déterminera les éléments caractéristiques.

B-/ Soit (Δ) la droite de E dont un vecteur directeur est $\vec{i}$ et qui passe par le point H(0 ;0 ;2). On désigne par r la rotation d'axe (Δ) dans laquelle le point O a pour image le point A(0 ;–2 ;2) et par t la translation de vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Quelle est la nature géométrique de la transformation $t \circ r$?. Préciser ses éléments caractéristiques.
C-/ On considère la rotation R_1 d'axe (D_1) : y =0, z = 1 ; et transformant A(0 ;–1 ;1) en O, la rotation R_2 d'axe la droite D_2 : x = 0 ; z = –1 et transformant O en B(1 ;0 ; –1).

1) Calculer les coordonnées (x' ; y' ; z') de M' image de M(x ;y ;z) par l'application f = $R_2 \circ R_1$.

2) Montrer que f est un vissage dont on déterminera les éléments caractéristiques.

D-/ On donne l'application f_α de E dans E qui au point M(x ;y ; z) associe M'(x'; y' ; z') définies par :

$$\begin{cases} x' = -z + \alpha \\ y' = -x \qquad \text{où } \alpha \text{ est un réel donné} \\ z' = y - 2 \end{cases}$$

1) Montrer f_α est une isométrie.

2) Pour quelle valeur de α, f_α est-elle une rotation ?
Préciser dans ce cas l'axe de rotation

3) On suppose dans cette question que α = 1 .
Montrer que f1 est un vissage dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 8

A-/ Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ on considère le plan (P) d'équation : 2x + y – z + 3 = 0
Soit S la symétrie orthogonale par rapport au plan (P).

1) Soit M(a ;b ;c) déterminer les coordonnées (a' ;b' ;c') de M' image par S du point M.
2) On considère la droite (D) passant par O et de vecteur directeur $\vec{U} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Déterminer les équations paramétriques de la droite (D') ensemble des images par S des points de (D).

B-/ On désigne par f l'application affine de E dans E qui à tout point M(x ; y ; z) dans $\mathcal{R}$ associe le point M' (x'; y'; z') dans $\mathcal{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{4}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ z' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie de E.

2) Montrer que f est involutive.

3) Donner l'ensemble des points invariant par f.

4) Donner la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 9

I– Dans le plan affine euclidien orienté P rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$direct, trouver la nature de l'application f, ses éléments caractéristiques, sa forme réduite éventuelle dans les cas suivants.

$$(1)\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

II– Dans le plan P on considère pour θ réel donné, l'application T_θ affine définie par $T_\theta(0) = 0$ et dont l'application linéaire associée a pour matrice dans la base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

a) Calculer θ pour que T_θ soit une rotation ; préciser suivant θ le centre et l'angle de cette rotation.

b) Calculer θ pour que T_θ soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite ; préciser suivant θ l'axe de cette symétrie.

III– Soient R_1 , R_2 , R_3 les rotations de P de centres respectifs $A_1\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$; $A_2\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$; $A_3\begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{matrix}$ d'angles respectifs $\dfrac{\pi}{2}$; π ; $\dfrac{\pi}{2}$ en radians. Soient S_1 ; S_2 ; S_3 les symétries orthogonales par rapport aux droites respectivement :

$$D_1 : y = 0\,;\ D_2 : x + y = 2\,;\ D_3 : -x + y = 2\,.$$

– Définir analytiquement : $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\ \mathrm{R}_3 S_1\, S_2\, S_3$.

– Définir analytiquement et géométriquement : $S_1 \circ S_2$; $S_2 \circ S_3$; $S_3 \circ S_1$;

– Déterminer $R_1 \circ R_2 \circ R_3$.

IV– Soient dans P les points A(1 ;0) et B(0 ;1) et R la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$. T est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Déterminer $R \circ T \quad et \quad T \circ R$.

V– Soient A, B, A' , B' quatre points de P tels que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| \neq 0$.

Montrer qu'il existe un antidéplacement f unique tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.