TRANSLATIONS – HOMOTHETIES

Dans les exercices 1 à 15, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Écritures complexes

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation suivante dont on donne l'écriture complexe puis déterminer l'image du point A d'affixe 1 + i (exercices 1 à 4).

1 $z' = z - i$.

2 $z' = 2z + 1 - i$.

3 $z' = -1{,}5z + 5i$.

4 $z' = z + 3 + i$.

Déterminer l'écriture complexe de la transformation suivante (exercices 5 à 11).

5 Translation de vecteur $\vec{u}$ (5 ; – 1).

6 Translation t telle que $t(O) = A$ avec A(– 3 ; 4).

7 Homothétie de rapport – 0,5 et de centre O.

8 Homothétie de rapport – 2 et de centre A(– 3 ; 4).

9 Homothétie de centre A(– 3 ; 4) qui transforme le point O en O' (– 6 ; 8).

10 Homothétie de rapport 3 qui transforme A(– 3 ; 4) en A'(– 6 ; – 2).

11 Homothétie qui transforme B(– 9 ; 4) en A(– 3 ; 2) et C(– 3 ; 0) en O.

Déterminer l'écriture complexe de la transformation $f = g \circ h$ puis sa nature et ses éléments caractéristiques sachant que : (exercices 12 à 15).

12 g est la translation de vecteur $\vec{u}$ (1 ; – 1).
h est la translation de vecteur $\vec{v}$ (0 ; 2).

13 g est la translation de vecteur $\vec{u}$ (1 ; – 1).
h est l'homothétie de rapport 3 et de centre Ω(2 ; – 3).

14 g est l'homothétie de rapport – 2 et de centre Ω(1 ; – 2).
h est l'homothétie de rapport 3 et de centre Ω.

15 g est l'homothétie de rapport – 2 et de centre I(1 ; – 2).
h est l'homothétie de rapport 3 et de centre J(– 2 ; 3).

Lieux géométriques

A et B étant fixes, déterminer l'ensemble décrit par :

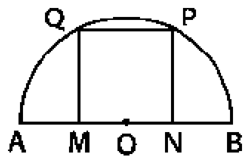
16 Le sommet D du parallélogramme ABCD quand :
a. C décrit une droite $\mathscr{D}$. **b.** C décrit un cercle $\mathscr{C}$.

17 Le centre O du parallélogramme ABCD quand :
a. C décrit une droite $\mathscr{D}$. **b.** C décrit un cercle $\mathscr{C}$.

18 Le centre de gravité G du triangle ABC quand :
a. C décrit une droite $\mathscr{D}$. **b.** C décrit un cercle $\mathscr{C}$.

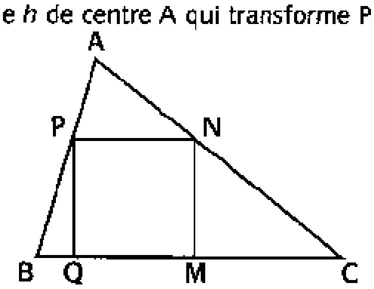
Constructions

19 On veut inscrire un carré dans un demi-cercle.
a. $\mathscr{C}$ est le demi-cercle de diamètre [AB] et de centre O. En supposant la figure réalisée, quelle est l'image du carré MNPQ par l'homothétie h de centre O qui transforme M en A ?



b. Décrire et réaliser la construction demandée.

20 On veut inscrire un carré dans un triangle.
a. ABC est un triangle quelconque. En supposant la figure réalisée, quelle est l'image du carré MNPQ par l'homothétie h de centre A qui transforme P en B ?



b. Décrire et réaliser la construction demandée.

21 Soit A et B deux points distincts d'un plan $\mathscr{P}$ et f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M associe le point M' barycentre de (A ; 1), (B ; 1) et (M ; 2).

a. Prouver que f admet un point invariant unique Ω.

b. Démontrer que f est une homothétie que l'on caractérisera.

22 Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC.

a. Déterminer le point G, barycentre des points A, B et C respectivement affectés des coefficients 2, 1 et 1.
Préciser sur une figure la position du point G.

b. On considère l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, au point M, associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Préciser la nature de l'application f et les éléments qui la caractérisent.

23 Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un carré ABCD tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Soit I et J les milieux respectifs des segments [BC] et [AD].

a. Déterminer le barycentre G du système
(A ; 1), (B ; – 3), (C ; – 3) et (D ; 1).

b. Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, au point M, fait correspondre le point M' défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$$

Préciser la nature de l'application f et les éléments qui la caractérisent.

24 Soit A et B deux points distincts d'un plan $\mathscr{P}$, et a et b deux nombres réels non nuls.

1. Déterminer la condition sur a et b pour que, pour tout point M de $\mathscr{P}$, il existe un unique point M' de $\mathscr{P}$ tel que :

$$a\overrightarrow{M'A} + b\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$$

2. On suppose réalisée la condition trouvée dans la question 1 et on désigne par f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M associe M'.

a. Déterminer, suivant les valeurs de a et b, l'ensemble des points invariants par f.

b. On suppose $a + b = 0$.
Exprimer, pour tout point M de $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du nombre réel a ; en déduire la nature de f.

c. On suppose $a + b \neq 0$.
Démontrer que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

25 * Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites parallèles, A un point n'appartenant pas à $\mathscr{D}$ et A' un point n'appartenant pas à $\mathscr{D}'$.
À tout point M de $\mathscr{D}$, on associe le point M', intersection de $\mathscr{D}'$ et de la parallèle à (AM) passant par A'.
Montrer que les droites (MM') passent par un point fixe.

26 * Soit ABC un triangle quelconque, A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA], [AB].
Soit P un point du plan distinct de A', B' et C'.
On note :
$\mathscr{D}_1$ la droite passant par A, parallèle à (PA') ;
$\mathscr{D}_2$ la droite passant par B, parallèle à (PB') ;
$\mathscr{D}_3$ la droite passant par C, parallèle à (PC').
Démontrer que $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ sont concourantes en un point Q dont on précisera la position par rapport au point P et au centre de gravité G du triangle ABC.

Lieux géométriques et problèmes de construction

27 * Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R ($R > 0$) et A et B deux points diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$.

a. Pour tout point M de $\mathscr{C}$, distinct de A et de B, on construit le point Q tel que MABQ soit un parallélogramme. Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment [MQ], puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BQM lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé des points A et B.

b. On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM). Quel rôle joue le point P relativement au triangle ANB ? Trouver une homothétie de centre B transformant M en P et déterminer l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé des points A et B.

28 * * Soit k un nombre réel non nul et différent de 1.
On considère quatre points alignés M, N, M' et N' tels que $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$.

a. Pourquoi existe-t-il une homothétie h telle que $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$? Quel est son rapport ? Où se trouve son centre Ω ?

b. Construire le centre de l'homothétie h.
On utilisera deux droites auxiliaires distinctes de la droite (MN), l'une $\mathscr{D}$ passant par M et l'autre Δ passant par N.