Forme trigonométrique des nombres complexes

Exercice 1

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z, $\quad z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :
$$z^3 = 1$$
Écrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. On notera j la solution dont la partie imaginaire est strictement positive. Vérifier que $j^2 = \overline{j}$.
3. Calculer :
$$1 + j + j^2 \quad , \quad 1 \times j \times j^2 \quad , \quad (1+j)^6$$
4. Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C images des trois solutions de l'équation (E). Préciser la nature du triangle ABC. Indiquer son centre de gravité.

Exercice 2

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit A le point d'affixe 1.

On appelle f l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :
$$z' = 1 - z^2$$

1. Quelle est l'image du point A par l'application f ?
Déterminer les points invariants par f.
2. Dans cette question, on pose $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ avec x, y, x' et y' réels.
   (a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   (b) Déterminer l'ensemble Γ des points M pour lesquels z' est réel.
3. (a) Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner à l'aide des points A, M et M' une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe
$$\frac{z'-1}{z-1}$$
   (b) En déduire que les points A, M et M' ($A \neq M$ et $A \neq M'$) sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{z^2}{z-1}$ est un réel non nul.
4. Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,,\,\pi[$
On désigne par N le point d'affixe $z = e^{i\,\theta}$ et N' d'affixe z', l'image de N par f.
   (a) Montrer que N' appartient à un cercle de centre A dont on précisera le rayon.
   (b) Vérifier que
$$z' = e^{i\,\theta}\left(e^{-i\,\theta} - e^{i\,\theta}\right)$$
En déduire l'écriture exponentielle de z', puis un argument de z'.
   (c) Que peut-on dire du triangle ONN' ?

(d) Sur la figure jointe, est placé le point N d'affixe $z = e^{i\theta}$
Expliquer comment on peut obtenir géométriquement (et sans calcul) le point N' à partir de N. Effectuer cette construction.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'unité graphique est 4 cm.
On pose :

$$z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

1. Simplifier z_0^5 puis calculer $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4$.
2. Montrer que pour tout complexe z non nul,
$$\frac{1}{z^2}\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4\right) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1$$
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$.
   (b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
4. On note Ω, A et B les points d'affixes respectives $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}i$ et z_0.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω passant par A.
   (a) Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.
   (b) Le cercle $\mathcal{C}$ coupe l'axe $(O; \overrightarrow{u})$ en deux points H et H' (H étant d'abscisse positive). Montrer que H a pour abscisse $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
   (c) En déduire une construction géométrique simple du point B.

Exercice 4

Dans cet exercice, les cinq questions sont indépendantes. Pour chaque question, une seule des cinq propositions est exacte. On demande d'indiquer laquelle, sans justification.
Chaque réponse juste rapporte 1,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,75 point.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.

1. Le nombre complexe $(i - \sqrt{3})^{2005}$ a pour argument :

   (a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $-\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{11\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{6}$ (e) $\frac{2\pi}{3}$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|1 + \overline{z}| = |1 + i|$ est :
   (a) un cercle (b) une droite (c) une demi-droite (d) un segment
   (e) réduit à un seul point

3. On pose $u = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$. Alors $1 + u + u^2 + \cdots + u^6$ est égal à :

   (a) 0 (b) $\frac{1}{1-u}$ (c) $\frac{1-u^6}{1-u}$ (d) $\frac{2}{1-u}$ (e) $\frac{2}{1+u}$

4. On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{\begin{array}{l} z_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2}\, z_n \end{array}\right.$

   Alors la suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$

   (a) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ (b) est arithmétique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   (c) converge vers 1 (d) est divergente (e) converge vers 0

5. Dans le plan complexe, on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et i.
   L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\arg\left(\dfrac{i-z}{1-z}\right) = \pi\ [2\,\pi]$ est :

   (a) la droite (AB) privée des points A et B
   (b) la demi-droite $[BA)$ privée des points A et B
   (c) le segment $[AB]$ privé des points A et B
   (d) le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B
   (e) un demi-cercle d'extrémités A et B (extrémités exclues)

réponses : 1.(a) 2.(a) 3.(d) 4.(e) 5.(c)