DIVISION EUCLIDIENNE - Exercices corrigés

Exercice 1

Le reste de la division euclidienne de m par 17 est 8, celui de n est 12. Déterminer le reste de la division euclidienne par 17 de m + n, m.n, m^2.

Méthode : - *Ecrire, pour le diviseur b, les relations de la forme a = bq + r, 0 ≤ r < b.*
- Effectuer les opérations demandés puis mettre en facteur le diviseur b pour faire apparaître le reste.

- Ecrivons la division euclidienne de m et n par 17.
Il existe q et q' ∈ IN tels que m = 17q + 8, n = 17q' + 12.

- Effectuons les calculs demandés puis factorisons 17

$$\begin{aligned} m + n &= 17 (q + q') + 20 \\ &= 17 (q + q') + 17.1 + 3 \\ &= 17 (q + q' +1) + 3 \end{aligned}$$

le reste de la division euclidienne de m + n par 17 est 3.

$m.n = 17 (17 qq' + 12 q + 8q' + 5) + 11$

$m^2 = 17 (17 q^2 + 16 q +3) + 13$

Exercice 2

Démontrer que, quels que soient les entiers relatifs a et b, le nombre n=ab(a2-b2) est divisible par 3.

On a $n=ab(a^2-b^2)= ab(a+b)(a-b)$.
1er cas : a ou b est divisible par 3, (a=3k ou b=3k), alors n l'est aussi.
2ème cas : ni a ni b n'est divisible par 3. Donc a=3k+1 ou a=3k+2, b=3k+1 ou b=3k+2.
Si a=3k+1 et b=3k'+1 alors a-b=3(k-k') donc a-b est divisible par 3, donc n aussi.
Si a=3k+1 et b=3k'+3 alors a+b=3(k+k'+1) donc a+b est divisible par 3, donc n aussi.

Exercice 3

Démontrer que le produit de trois naturels pairs consécutifs est divisible par 48.

Il s'agit de démontrer que le nombre N=2n(2n+2)(2n+4) est divisible par 48.

Comme N=8n(n+1)(n+2), il suffit de prouver que n(n+1)(n+2)=N' est divisible par 6. Or 6=3x2 et 3 et 2 sont premiers entre eux, donc il suffit de montrer que N' est divisible par 2 et par 3.

n, (n+1) et (n+2) sont trois entiers consécutifs. L'un d'eux , est nécessairement est divisible par 2 (sinon cela voudrait dire que deux multiples de 2 sont séparés d'au moins quatre unités). De même l'un deux est divisible par 3. Donc n(n+1)(n+2) est divisible par 6.

Exercice 4

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, n3-n est divisible par 6.
b) Déterminer les entiers naturels n tels que n2-n soit divisible par 6.

a) Pour tout entier naturel n, n^3-n = (n-1) n (n+1). Le produit de deux entiers consécutifs est pair; le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 3. Puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, n^3-n est divisible par 6.

b) La relation n^2-n = n (n-1) montre que n^2-n est pair. Par suite, n^2-n est divisible par 6 si et seulement si n est congru à 0 ou à 1 modulo 3.

Exercice 5

On considère la fraction $\frac{n^3+n}{2n+1}$, *n entier strictement positif.*
1. Prouver que tout diviseur commun d à 2n+1 et n3+n, est premier avec n.
2. En déduire que d divise n2+1, puis que d =1 ou d = 5.
3. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles la fraction est irréductible ?

1. Soit d' un diviseur commun à d et n. comme d divise 2n+1, d' divise aussi 2n+1; et comme d' divise n, il divise aussi 2n, donc aussi (2n+1)-2n, c'est-à-dire 1. d'où n et d sont premier entre eux.

2. d divise n^3+n = n(n^2+1) ; d étant premier avec n, le théorème de Gauss permet de conclure que d divise (n^2+1).
d divise (n^2+1) et 2n+1, donc il divise la différence (n^2+1) – (2n+1) = n(n-2).
D'après le théorème de Gauss, d est premier avec n donc il divise n-2.
Divisant 2n+1 et n-2, d divise (2n+1) – 2(n-2)=5. Donc d=1 ou d=5.

3. La fraction et réductible lorsque 2n+1 = 5k. (k $\in$IN) et irréductible dans le cas contraire.
Or, 2n+1 = 5k nécessite k impair, k=2p+1, d'où n = 5p+2.

Conclusion : la fraction est irréductible lorsque n n'est pas de la forme 5p+2 (p $\in$IN).

Exercice 6

Soit la fraction $\frac{2n+17}{n+1}$, *où n est un nombre entier. Quelle doit être la forme générale de l'entier n pour que les deux termes de la fraction soient:*
a) divisibles par 3 ?
b) divisibles par 5 ?
c) divisibles par 15 ?
Quelles doivent être les valeurs de l'entier n pour que la fraction soit un nombre entier?

Etude de la diversité des 2 termes de la fraction.
Pour faciliter le raisonnement, il est bon d'écrire la fraction sous la forme :
$F=\frac{2(n+1)+15}{n+1}=2+\frac{15}{n+1}$ où apparaît la seule quantité (n + 1).

Le nombre 15 est divisible par 3, 5 et 15. Par conséquent les deux termes de la fraction seront divisibles par 3, 5 et 15 si :

a) n + 1 = 3k soit n = 3k - 1 (k > 0)
b) n + 1 = 5k soit n = 5k - 1 (k > 0)
c) n + 1 = 15k soit n = 15k - 1 (k > 0)

Valeurs de n pour lesquelles la fraction est égale à un nombre entier.

Sur la forme donnée précédemment à la fraction, il apparaît que les nombres n répondant à la question sont tels que (n + 1) divise 15. Les valeurs possibles pour n sont donc :

$n+l = 1 \Rightarrow n = 0$ et $F= 17$

$n+l = 3 \Rightarrow n = 2$ et $F= 7$

$n+l = 5 \Rightarrow n = 4$ et $F= 5$

$n+1 = 15 \Rightarrow n = 14$ et $F= 3$

Exercice 7

Les nombres a, b, c sont des nombres entiers appartenant à l'ensemble {0, 1,2,3, 4}. On représente par abc le nombre 52a + 5b + c.

1° Montrer que $\overline{abc}$ *est divisible par 4 si, et seulement si, a + b + c est divisible par 4.*

2° Montrer que $\overline{abc}$ *est divisible par 6 si, et seulement si, a - b + c est divisible par 6.*

Remarque. Pour résoudre ces deux questions, le lecteur pourra s'inspirer de la méthode de démonstration des critères de divisibilité par 9 et par 11 dans le système décimal.

1° Divisibilité par 4.

Le nombre abc peut s'écrire : $\overline{abc} = 25a + 5b + c$ ou $\overline{abc} = (24a + 4b) + (a + b + c)$
or 24a + 4b est toujours divisible par 4.

$\overline{abc}$ est donc divisible par 4 si, et seulement si, (a + b + c) est divisible par 4.

2° Divisibilité par 6.

D'une façon analogue, écrivons : $\overline{abc} = (24a + 6b)+ (a - b + c)$

24a + 6b est congru à zéro modulo 6, et par conséquent $\overline{abc}$ est divisible par 6 si, et seulement si, (a - b + c) est divisible par 6.

Exercice 8

Soit le nombre $\overline{34x5y}$*, dont x est le chiffre des centaines et y le chiffre des unités. Indiquer toutes les façons possibles de choisir les chiffres x et y pour que ce nombre soit divisible par 36.*

Pour qu'un nombre soit divisible par 36, il faut et il suffit qu'il soit divisible par 4 et par 9.

La divisibilité par 4 du nombre $\overline{34x5y}$ exige que le nombre $\overline{5y}$ soit lui-même divisible par 4, c'est-à-dire que y = 2 ou y = 6. Les nombres cherchés sont donc soit de la forme $\overline{34x52}$, soit de la forme $\overline{34x56}$.

- Nombre de la forme $\overline{34x52}$.

Un tel nombre est divisible par 9 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 9, c'est-à-dire si : $x + 14 = 9k$ $k > 0$, entier.

La seule valeur possible de k est k=2, qui conduit à x=4. Le nombre 34452 est donc divisible par 36.

- Nombre de la forme 34x56.

De la même façon, 34x56 est divisible par 9 si $x + 18 = 9k$

k = 2 conduit à x = 0, donc au nombre 34056.

k = 3 conduit à x = 9, donc au nombre 34956.

Il existe donc trois nombres répondant à la question : 34 452, 34 056 et 34 956.

Exercice 9

On suppose que n prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 3.

Trouver les valeurs de n telles que la fraction $F = \frac{3n^2 + 4n}{n - 2}$ *soit égale à un entier naturel.*

Il suffit de décomposer F en éléments simples, de façon à faire apparaître une partie entière et une partie fractionnaire, plus simple que F. La fin du raisonnement s'effectue sur cette partie fractionnaire.

Dans ce cas, la fraction F peut s'écrire :

$$F = \frac{3n^2 + 4n}{n - 2} = 3n + 10 + \frac{20}{n - 2}$$

La fraction F, écrite sous cette dernière forme, est égale à un nombre entier si $\frac{20}{n-2}$ est un nombre entier, c'est-à-dire si (n−2) divise 20. On peut donc avoir:

$n - 2 = 1 \Rightarrow n = 3$ et $F = 39$

$n - 2 = 2 \Rightarrow n = 4$ et $F = 32$

$n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6$ et $F = 33$

$n - 2 = 5 \Rightarrow n = 7$ et $F = 35$

$n - 2 = 10 \Rightarrow n = 12$ et $F = 48$

$n - 2 = 20 \Rightarrow n = 22$ et $F = 77$

Il y a donc 6 valeurs de n qui répondent à la question.