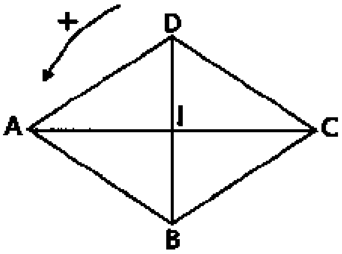
ISOMETRIES PLANES

Composées de symétries axiales

1 Soit ABCD un rectangle direct. On considère les symétries axiales s_1, s_2, s_3 et s_4 d'axes respectifs (AB), (DC) (BC) et (AD).
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications : $s_1 \circ s_2$, $s_3 \circ s_4$, $s_1 \circ s_3$ et $s_3 \circ s_1$.

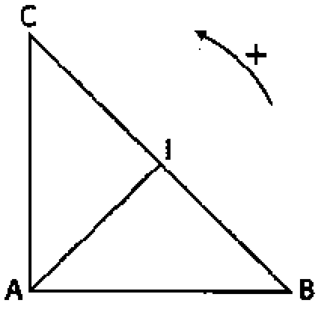
2 Soit ABCD un carré direct. On considère les symétries axiales s_1, s_2 et s_3 d'axes respectifs (AB), (AC) et (DC). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications : $s_1 \circ s_2$, $s_2 \circ s_3$ et $s_3 \circ s_1$.

3 Soit ABCD un losange direct de centre I ; montrer que $s_{(AC)} \circ s_{(BD)} = s_{(BD)} \circ s_{(AC)}$.



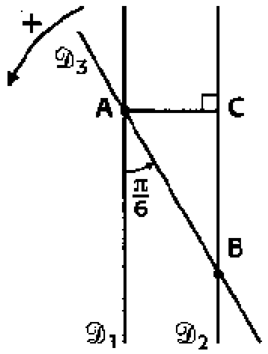
4 Soit ABCD un carré direct de centre I ; on considère les symétries axiales s_1, s_2 et s_3 d'axes respectifs (AC), (BD) et (AB).
a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s_1 \circ s_2$ et de $s_2 \circ s_1$.
b. Même question pour les composées $s_1 \circ s_3$ et $s_3 \circ s_1$.

5 Soit ABC un triangle direct isocèle rectangle en A et I le milieu de [BC]. On note s_1, s_2 et s_3 les symétries axiales d'axes respectifs (AB), (AC) et (AI).
a. Déterminer $s_1 \circ s_2$ et $s_2 \circ s_1$.
b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 = s_1 \circ s_3$ et $r_2 = s_3 \circ s_2$.
c. Déterminer $r_1 \circ r_2$.



6 Soit ABC un triangle équilatéral direct. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de :
a. $s_{(BC)} \circ s_{(BA)}$. **b.** $s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$.
c. $s_{(CB)} \circ s_{(CA)}$.

7 Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites parallèles et $\mathscr{D}_3$ une droite sécante à $\mathscr{D}_1$ et à $\mathscr{D}_2$, avec un angle de $\frac{\pi}{6}$.
On note s_1, s_2 et s_3 les symétries axiales d'axes $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$.



a. Déterminer la nature des applications $s_1 \circ s_2$ et $s_2 \circ s_1$.
b. On pose $r_1 = s_3 \circ s_1$ et $r_2 = s_3 \circ s_2$. Caractériser r_1 et r_2.
c. On pose $r_3 = s_1 \circ s_3$ et $r_4 = s_2 \circ s_3$. Caractériser r_3 et r_4.

Décomposition de translations et de rotations

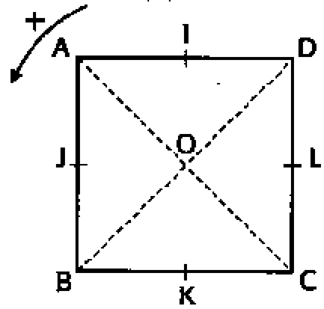
8 Soit ABCD un carré direct et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
a. Déterminer la droite Δ telle que $r = s_\Delta \circ s_{(AC)}$.
b. Déterminer la droite Δ' telle que $r = s_{(AC)} \circ s_{\Delta'}$.

9 Soit ABCD un rectangle direct et I, J les milieux respectifs de [BC] et [AD]. On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
a. Déterminer la droite Δ telle que $t = s_\Delta \circ s_{(IJ)}$.
b. Déterminer la droite Δ' telle que $t = s_{(IJ)} \circ s_{\Delta'}$.

10 Soit ABCD un losange direct de centre O.
Déterminer les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 et Δ_4 telles que :
$t_{\overrightarrow{BD}} = s_{\Delta_1} \circ s_{(AC)}$;
$t_{\overrightarrow{BD}} = s_{(AC)} \circ s_{\Delta_2}$;
$t_{\overrightarrow{AO}} = s_{\Delta_3} \circ s_{(BD)}$;
$t_{\overrightarrow{AO}} = s_{(BD)} \circ s_{\Delta_4}$.

11 Soit ABC un triangle équilatéral direct et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note I le milieu de [BC].
a. Déterminer la droite Δ telle que $r = s_{(AC)} \circ s_\Delta$.
b. Déterminer la droite Δ' telle que $r = s_{(AI)} \circ s_{\Delta'}$.

12 Soit ABCD un carré direct de centre O ; on note I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AD], [AB], [BC] et [CD]. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$;



déterminer les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 et Δ_4 telles que :
$r = s_{(BD)} \circ s_{\Delta_1}$; $r = s_{(AC)} \circ s_{\Delta_2}$;
$r = s_{(IK)} \circ s_{\Delta_3}$; $r = s_{(JL)} \circ s_{\Delta_4}$.

13 Soit ABC un triangle équilatéral direct ; on considère la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note I le milieu du segment [AC] et J son symétrique par la symétrie axiale d'axe (BC).
Déterminer les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 telles que :
$r = s_{(BC)} \circ s_{\Delta_1}$; $r = s_{\Delta_2} \circ s_{(BI)}$; $r = s_{\Delta_3} \circ s_{(BC)}$.

14 Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ telle que $t = s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ où s_1 et s_2 sont deux symétries axiales d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2.
a. Que peut-on en conclure pour les droites Δ_1 et Δ_2 ?
b. Que peut-on en conclure pour le vecteur $\vec{u}$?

15 Déterminer toutes les rotations r telles que : $r = s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ où s_1 et s_2 sont deux symétries axiales d'axes sécants Δ_1 et Δ_2.

Isométries

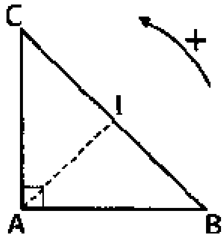
16 Soit ABC un triangle équilatéral et f une isométrie telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.
Démontrer que A'B'C' est un triangle équilatéral.

17 Soit ABCD un carré et f une isométrie telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$.
a. Prouver que $A'B' = A'D' = B'C' = C'D'$.
b. Prouver que $A'C' = B'D'$.
c. En déduire la nature du quadrilatère A'B'C'D'. Justifier la réponse.

18 Prouver qu'une isométrie f transforme le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R en un cercle $\mathscr{C}'$ dont on déterminera le centre et le rayon.

19 Soit f, g et h trois isométries.
a. Démontrer que $F = f \circ g \circ h$ est une isométrie.
b. Démontrer que $G = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$ est une isométrie.
c. Déterminer $F \circ G$ puis $G \circ F$.

20 Soit ABC un triangle direct isocèle et rectangle en A et I le milieu de [BC].
Déterminer les isométries f et g telles que $f(A) = A$, $f(B) = C$, $f(C) = B$ et $g(A) = A$, $g(B) = C$ et $g(C) \neq B$.



21 Sachant que ABC est un triangle isocèle de sommet principal A, quelles sont les isométries f telles que : $f(A) = A$ et $f(B) = C$?

22 Soit ABC un triangle quelconque dont on note H l'orthocentre et f une isométrie telle que : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.
Prouver que $H' = f(H)$ est l'orthocentre du triangle A'B'C'.

Isométries et configurations

23 Soit s_1, s_2 et s_3 trois symétries axiales ; on pose $r_1 = s_1 \circ s_2$ et $r_2 = s_2 \circ s_1$.
1. a. Déterminer $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$.
b. En déduire que $(s_1 \circ s_2)^{-1} = s_2 \circ s_1$.
2. En utilisant le résultat du 1., déterminer en fonction de s_1, s_2 et s_3, la transformation $(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^{-1}$.

24 Soit ABCD un carré direct de centre O ; on note I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AD], [AB], [BC] et [CD]. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ et r la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
a. Déterminer la droite Δ telle que $t = s_\Delta \circ s_{(JL)}$.
b. Déterminer la droite Δ' telle que $r = s_{(JL)} \circ s_{\Delta'}$.
c. En déduire $t \circ r$.

25 * On considère quatre points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et f une isométrie telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$.
1. On suppose que A = B.
Montrer que C = D puis que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.
2. On suppose que $A \neq B$.
a. Démontrer que [AD] et [BC] ont le même milieu.
b. En déduire que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.
3. Quelle est l'image d'un parallélogramme par une isométrie ? Justifier la réponse.

26 Soit ABCD un carré direct et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note A', B', C', D' les images des points A, B, C, D par r.
a. Démontrer que B' = D.
b. Démontrer que A est le milieu de [BD'].
c. Quelle est la nature du quadrilatère BCC'D'.

27 Soit ABC un triangle équilatéral direct. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB] et r la rotation de centre A' et qui transforme B' en C'.
a. Déterminer l'angle de la rotation r.
b. Quelles sont les images de C et de C' par r ?
c. En déduire les images des droites (AC) et (B'C').