INEGALITES DES ACCROISSEMENT FINIS - APPLICATIONS

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par $f(x)=e^{\frac{1}{2x}}$

1- Etudier les variations de f et tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Unité 2 cm.
2- a) Etudier le sens de variation de g : $x \mapsto g(x)= f(x)-x$
b) En déduire que l'équation f(x) = x admet une solution positive unique α

Etablir que $\frac{5}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$

3- a) Prouver que pour tout élément x de $J=\left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right]$ f(x) appartient aussi à J

b) Démontrer que, pour tout élément x de , $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En déduire que, pour tout élément x de : $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

4- On considère la suite définie par : $u_0 = \frac{5}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer, à l'aide de 2)a) que pour tout entier n $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

b) En déduire que, pour tout $|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

c) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 2 : On définit la fonction f_n, pour n entier naturel non nul, par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ et f_0 par $f_0(x) = e^{-x^2}$.

Notons (C_n) la courbe représentative de f_n (pour tout entier n) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

A - 1- Etudier les variations et tracer la courbe représentative de f_0.
2- a) Etudier les variations de f_n. (On distinguera les cas n pair et n impair). Préciser les asymptotes et la tangente en 0.
b) Tracer (C_1) et (C_2).
B - On se propose d'étudier l'équation (E) : $f_0(x) = x$.
1- a) Montrer que (E) ne peut avoir de solution négative.
b) A l'aide de l'étude de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f_0(x) - x$, montrer que (E) admet une solution unique α, puis que $\alpha \in I$ où $I = [0{,}5\,;0{,}8]$.
2 - Etudier les variation de f_0' (dérivée de f_0) sur I. En déduire que, pour tout x de I,

$|f_0'(x)| \leq \left| f_0'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right|$; puis que, pour tout x de I, $|f_0'(x)| \leq 0{,}9$.

3 - On définit alors une suite de réels (u_n) par : $u_0= 0{,}5$ et $u_{n+1}= f_0(u_n)$ pour tout entier naturel n.
a) Montrer que, pour tout n, $u_n \in I$.
b) Montrer que, pour tout n, $|u_{n-1}-\alpha| \leq 0{,}9|u_n-\alpha|$.

En déduire que, pour tout n, $|u_n-\alpha| \leq 0{,}3\,(0{,}9)^n$.
Quelle est la limite de (u_n) ?

Exercice 3 :

A- Soit f la fonction numérique définie pour tout x de [0;+ ∞[par f(x) = x ln x -x pour x > 0 et f (0) = 0.
1. Etudier les variations de f. Etudier en particulier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal et soit (D) la droite d'équation y = x-1.
Soit u la fonction numérique définie par u(x) = x ln x - 2x +1.
a) Etudier les variations de u.
b) Montrer que l'équation u(x) = 0 possède exactement deux solutions que l'on notera a et b, (a < b).
En déduire que (D) et (C) se coupent en deux points A et B d'abscisses respectives a et b.
c) Déterminer le signe de u (x).
d) Montrer que a appartient à]0 ; 1[et que b appartient à]6;7[.
3. Tracer dans le repère la courbe (C) et la droite (D) . On se limitera à l'intervalle [0 ; 8].
4. Soit Δ le domaine du plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x = a et x = b.
a) En intégrant par parties, calculer $\int_a^b x\ln x\,dx$ en fonction de a et b. En déduire l'expression de S.

B- On se propose de déterminer une valeur approchée de b. Pour cela, on considère la fonction h définie par : $h(x)=\dfrac{x-1}{\ln x-1}$.

1.a) Montrer que, pour tout x de]e; + ∞[, $h'(x)=-\dfrac{u(x)}{x(\ln x-1)^2}$ où u est la fonction définie dans A.2.En déduire le signe de h' sur]e;+ ≡[.
b) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition. Vérifier que h (b) = b. Dresser le tableau de variations de h.
2. Montrer que, pour tout x de l'intervalle [6;7], on a : $x(\ln x-1)^2\geq 6(\ln 6-1)^2$.
En déduire que pour tout x de l'intervalle [6;7], on a : $|h'(x)|\leq\dfrac{u(7)}{6(\ln 6-1)^2}\leq 0{,}17$.
3. a) Déterminer l'image de l'intervalle[b;7] par h et démontrer qu'elle est incluse dans l'intervalle [b;7].
b) Soit (U_n) la suite numérique définie pour tout entier naturel n par : $U_0 = 7$ et $U_{n+1}= h(U_n)$.
Montrer que pour tout entier naturel n, U_n appartient à l'intervalle [b; 7].
Montrer que pour tout entier n, on a $|U_{n+1}-b|\leq 0{,}17|U_n-b|$.
En déduire que pour tout entier naturel n, $|U_n-b|\leq(0{,}17)^n$.
d) Montrer que la suite (U_n) converge vers b.
Déterminer un entier n tel que U_n soit une valeur approchée de b à 10^{-4} près. Calculer cette valeur approchée.

Exercice 4 :

A – On considère la fonction f définie par $f(x)=1-\dfrac{1}{x}-2\ln x$. Et soit (C) la courbe représentative de f dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- a) Étudier les variations de f. On remarquera que l'on peut écrire : $\dfrac{1}{x}+2\ln x=\dfrac{1}{x}(1+2x\ln x)$
b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre, notée □, est comprise entre $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{3}$
c) Construire la courbe (C) dans le plan P.

2 – a) Soit u un nombre réel de] 0 ; 1 [. Calculer $I_u=\int_u^1 f(x)\,dx$

b) Donner, à l'aide de l'égalité f(α) = 0, une expression de I_α ne contenant pas ln α.
Quelle est la signification graphique de I_α ?

On pose $\beta = \frac{1}{\alpha}$ et soit M la valeur moyenne de f sur l'intervalle [α,1]. Montrer que $M = 2 - \frac{\beta}{2}$

B – On se propose de donner une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de M. Pour cela, on considère la fonction h définie par h (x) = 1 + ln x.

1 – Exprimer $f(\frac{1}{x})$ à l'aide de h(x). En déduire que β est l'unique solution de l'équation h (x) = x qui soit comprise entre 3 et 4.

2 – a) Montrer que l'image de l'intervalle [3 ; 4] par f est incluse dans [3 ; 4]

b) Montrer que l'on a $0 \leq h'(x) \leq \frac{2}{3}$ pour tout x de [3;4] . En déduire que $|h(x) - \beta| \leq \frac{2}{3}|x - \beta|$

3 – On considère la suite (u_n) définie par u_0 =3 et u_{n+1}=h (u_n).

a) Montrer que pour tout n de IN, u_n appartient à [3 ; 4]

b) Montrer que $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{2}{3}|u_n - \beta|$ pour tout entier naturel n. En déduire que, $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout entier naturel n.

4 – Quel est le plus petit entier n tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-1}$? En déduire une valeur décimale approchée de β à 10^{-1} près, puis de M.