Similitude plane : Fiche

Comment déterminer la similitude directe f définie par son centre Ω point A, et son image A' ?

Méthode complexe

- Choisir un repère orthonormé.
- Donner les affixes des points dans ce repère.
- Ecrire l'expression complexe de f. C'est de la forme : $z'-z_\Omega = a\,(z-z_\Omega)$ **où** z_Ω **est l'affixe du centre** Ω**.**
- déterminer la valeur de a)
- f est une similitude directe d'angle θ = arg a, de rapport k = | a |

Exemples d'application

- **Exemple 1**

  ABCD est un carré de sens direct et de centre O avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

  1- Déterminer la similitude directe S de centre D qui transforme O en C.
  2- Quelle est l'image du point A ?
  3- Construire l'image du point C.

Réponses non détaillées :

1- Ecriture complexe de f

On considère le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, avec $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

A, B, C et D ont les affixes respectives : z_A = -1–i ; z_B = 1–i ; z_C = 1+i et z_D=-1+i.

L'écriture complexe de f est : $z' - z_D = a\,(z - z_D)$.
Comme S(O) = C, on a :
$z_C - z_D = a\,(0 - z_D)$
$(1+i) - (-1+i) = a\,[0-(-1+i)]$

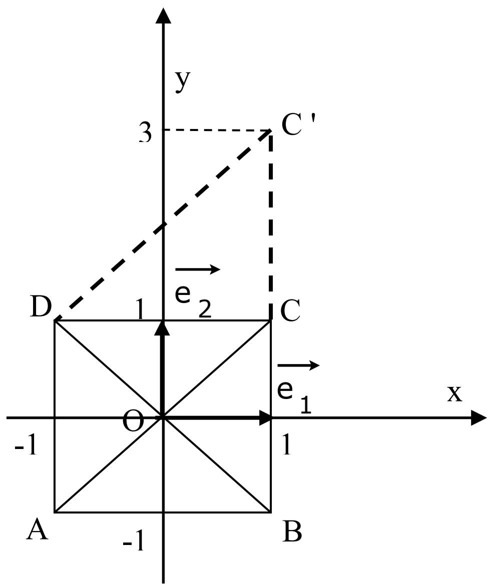
D'où $a = \frac{2}{1-i} = 1+i$.

Le rapport de S est : $k = |1+i| = \sqrt{2}$.

L'angle de S est : $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{4}$.

2- image de A par S.
L'écriture complexe de f s'écrit sous la forme : z' = (1+i) z+1+i.
L'affixe de l'image A' de A est : $z_{A'}$ = (1+i) (-1-i) +1+i = 1-i.
C'est-à-dire A'=B.

3- image C' du point C.
L'affixe de l'image C' de C est : $z_{C'}$ = (1+i) (1+i) +1+i = 1+3i.



- **Exemple 2**
  ABC est un triangle rectangle en A avec BC=2AB
  Caractériser la similitude directe f de centre B qui transforme A en C.
  Construire l'image de C par f.

- **Exemple 3**
  ABC est un triangle équilatéral direct. I le milieu de [AB].
  Caractériser la similitude directe s de centre A et telle que s(C)=I.
  Construire l'image de B par s.

Exercices proposés

- **Exercice 1 :**

  ABC est un triangle isocèle et rectangle en C avec $(\vec{AB},\vec{AC})=\frac{\pi}{4}$.

  On considère la similitude directe de centre A, qui transforme B en C.
  a) Déterminer son angle et son rapport.
  b) Construire l'image de C par cette similitude.

- **Exercice 2 :**
  ABC est un triangle isocèle direct et rectangle en C.
  Caractériser la similitude directe S de centre B qui transforme A en C.
  Construire l'image de C par S.

- **Exercice 3 :**

  ABCD est un rectangle vérifiant $(\vec{AB},\vec{AD})=-\frac{\pi}{2}$.

  S est la similitude de centre A, telle que S (D) = C.
  a) Déterminer son angle et son rapport.
  b) Construire l'image d'un rectangle ABCD par S.

- **Exercice 4 :**

  ABC est un triangle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$. [AH] est une hauteur.

  On considère la similitude de centre H qui transforme A en B.
  Déterminer son rapport, son angle et l'image du point C.

- **Exercice 5 :**
  ABC est un triangle équilatéral direct, I le milieu de [AB].
  Caractériser la similitude S de centre A telle que S(C) = I.
  Construire l'image du point B.

- **Exercice 6 :**

  ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}$ et D est le milieu de [AE] et de [IC].

  1. On considère la similitude directe S_1 de centre I qui transforme A en D. Déterminer son angle, son rapport et l'image du point C.
  2. On considère la similitude directe S_2 de centre I qui transforme D en A. Déterminer son angle, son rapport et l'image du point E.
  3. Construire l'image B_1 de B par S_1 et l'image B_2 de B_1 par S_2.

- **Exercice 7 :**

  ABCD est un rectangle tel que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}$, BC = 2 AB et D est le milieu de [AE]. I est le symétrique de A par rapport à (BD).
  1. On considère la similitude directe S de centre I qui transforme B en D. Déterminer son angle, son rapport et l'image du point A.
  2. Montrer que I, C et E sont alignés. Trouver l'antécédent de C par la similitude S.

- **Exercice 8 :**
  Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

  $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}\ (2\pi) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{3}\ (2\pi).$$

  Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
  1. Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B.
  a) Déterminer les éléments caractéristiques de S_1.
  b) Montrer que S_1 (C) = I. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1.
  2. Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C.
  a) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2.
  b) Soient M un point de (BI), M' son image par S_2. On suppose que M et M' sont distincts de I.
  Montrer que les quatre points (A, M, I, M') sont cocycliques.

  (on dit que des points sont cocycliques lorsqu'ils appartiennent à un même cercle)